

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

## **Estudo das Frequências Quasinormais das $p$ –branas negras**

**Jeferson de Oliveira**

**Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla**

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de São Paulo para a obtenção  
do título de Doutor em Ciências.

### **Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IF-USP)

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT-UNESP)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cecília Bertoni Martha Hadler Chirenti (UFABC)

São Paulo

2010

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Oliveira, Jeferson de  
Estudo das frequências quasinormais das p-branas  
negras. – São Paulo, 2010.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física, Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Buracos negros; 2. Teoria de cordas;  
3. Modos quasinormais; 4. Correspondência AdS/CFT;  
5. Branas.

USP/IF/SBI-033/2010

---

## RESUMO

Esta tese visa realizar um estudo acerca das frequências quasinormais das  $p$ -branas negras utilizando um campo escalar de teste. No contexto da correspondência AdS/CFT estudamos alguns aspectos da formação de estados supercondutores na teoria de campos definida na borda do espaço-tempo de Gauss-Bonnet AdS  $d$ -dimensional.

Apresentamos a derivação das soluções das  $p$ -branas negras, bem como a análise de sua estrutura causal. Revisamos o regime perturbativo da Relatividade Geral e a interpretação dos modos quasinormais de um buraco negro em termos dos elementos que compõem a correspondência AdS/CFT.

Estudamos a evolução de um campo escalar sem massa na geometria das  $p$ -branas negras em detalhe, sendo que utilizamos o método semianalítico WKB e a integração característica (Problema de Goursat) para calcular as frequências quasinormais correspondentes. Por fim, apresentamos uma expressão aproximada de um estado supercondutor na teoria de campos definida na borda do buraco negro de Gauss-Bonnet AdS através do dicionário AdS/CFT.

## ABSTRACT

This thesis aims at studying the quasinormal frequencies of black  $p$ -branes using a scalar field in the probe limit. In the context of AdS/CFT correspondence we study some aspects regarding the formation of superconductor states in the field theory set on the AdS boundary of the Gauss-Bonnet AdS spacetime.

We present the derivation of black  $p$ -brane solutions, as well as the analysis of its causal structure. We review the perturbative regime of General Relativity and the interpretation of the black hole quasinormal modes in terms of the correspondence AdS/CFT.

We study the evolution of a massless scalar field in the geometry of black  $p$ -branes in detail, and we use the WKB method and the characteristic integration (Goursat's problem) in order to calculate the corresponding quasinormal frequencies. Ultimately, we present an approximate expression for a superconductor state in the field theory defined in the AdS boundary of Gauss-Bonnet AdS spacetime.

## AGRADECIMENTOS

Foram inúmeras as pessoas que contribuíram para que eu pudesse finalizar este trabalho. Agradeço à todas elas.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Elcio Abdalla, pelas conversas esclarecedoras, pelo apoio nas horas difíceis do percurso de pesquisa e toda orientação ao longo dos últimos seis anos. Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Molina, por toda a ajuda no decorrer do trabalho desta tese.

Ao meu grande amigo João Basso Marques, aos meus amigos Admar Mendes de Souza, Leandro Ibiapiana Beviláqua, Camila Condilo, Michele Ferraz Figueró e aos meus *irmãos* Alan Bendasoli Pavan, Carlos Eduardo Pellicer de Oliveira e Rodrigo Dal Bosco Fontana, agradeço profundamente por todos esses anos de amizade.

Agradeço às meninas da secretaria do Departamento de Física Matemática Amélia e Simone pela amizade e paciência em resolver nossa burocracia diária.

Finalmente, agradecimentos especiais para minha família que sempre esteve ao meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis.

Agradeço à **FAPESP** pelo apoio financeiro.

*Aos meus amores Sirlei, Ariana e João.*

*“Por vezes à noite há um rosto  
Que nos olha do fundo de um espelho  
E a arte deve ser como esse espelho  
Que nos mostra o nosso próprio rosto”*

**-Jorge Luis Borges**

**Arte Poética**

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>As <math>p</math>–Branas Negras</b>	<b>17</b>
2.1	Ação das $p$ -branas e equações de movimento . . . . .	17
2.2	A escolha do <i>ansatz</i> para soluções extensas . . . . .	22
2.3	$p$ -branas extremas . . . . .	26
2.4	$p$ -branas negras . . . . .	29
2.5	Quadro de Einstein e o quadro de cordas . . . . .	33
2.6	Singularidade e horizonte de eventos . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Perturbações Lineares em Relatividade Geral e Modos Quasinormais</b>	<b>39</b>
3.1	Relatividade Geral linearizada . . . . .	40
3.2	Modos quasinormais . . . . .	42
3.3	O método WKB . . . . .	45
3.4	Integração característica . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Interpretação dos MQN's na Correspondência AdS/CFT</b>	<b>49</b>
4.1	Origens da correspondência . . . . .	49
4.2	Um pouco do dicionário AdS/CFT . . . . .	52
4.3	Receita de Son-Starinets . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Perturbação Escalar das <math>p</math>–Branas Negras</b>	<b>57</b>



---

5.1	O campo escalar sem massa . . . . .	57
5.2	O potencial efetivo . . . . .	61
5.3	O caso extremo . . . . .	63
5.4	Frequências quasinormais: Método WKB . . . . .	64
5.5	Frequências quasinormais: Integração característica . . . . .	71
5.6	O caso massivo $\beta > 0$ . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Supercondutores Holográficos na Gravidade de Gauss-Bonnet</b>	<b>78</b>
6.1	Supercondutores holográficos . . . . .	78
6.2	O buraco negro de Gauss-Bonnet AdS . . . . .	80
6.3	Campos clássicos definidos no <i>bulk</i> . . . . .	81
6.4	Soluções semianalíticas . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Comentários Finais</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>Fórmula WKB de sexta ordem</b>	<b>89</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>96</b>

# Lista de Figuras

3.1	Decaimento da perturbação gravitacional axial nas proximidades do buraco negro de Schwarzschild, com $M = 1$ e $l = 2$ . . . . .	43
3.2	Região retangular no plano $(u, v)$ delimitada pelos pontos $N, S, E, W$ e $C$ . . . .	48
5.1	Potencial efetivo $V(y)$ com $\mathbf{p} = \mathbf{3}$ , $L = 0$ , $a = 2$ e $b = 0.5$ para três valores diferentes do parâmetro massivo $\beta$ . . . . .	63
5.2	Potencial efetivo $V(y)$ com $\mathbf{p} = \mathbf{6}$ , $L = 0$ , $a = 2$ e $b = 0.5$ para três valores diferentes do parâmetro massivo $\beta$ . . . . .	64
5.3	Potencial efetivo $V(y)$ com $\mathbf{p} = \mathbf{3}$ , $L = 0$ , $a = b = 2$ para três valores diferentes do parâmetro massivo $\beta$ . . . . .	65
5.4	Potencial efetivo $V(y)$ com $\mathbf{p} = \mathbf{6}$ , $L = 0$ , $a = b = 2$ para três valores diferentes do parâmetro massivo $\beta$ . . . . .	65
5.5	Relação entre a parte real das frequências e o número de dimensões $p$ para $L = 0, 1, 2$ . . . . .	67
5.6	Relação entre a parte imaginária das frequências e o número de dimensões $p$ para $L = 0, 1, 2$ . . . . .	68
5.7	Efeito do parâmetro $a$ na parte real das frequências. Os parâmetros da $p$ -brana são $b = 0.5$ , $L = 0$ e $\beta = 0$ . . . . .	68
5.8	Efeito do parâmetro $a$ na parte imaginária das frequências. Os parâmetros da $p$ -brana são $b = 0.5$ , $L = 0$ e $\beta = 0$ . . . . .	69

5.9	Gráfico Log-Log do valor absoluto de $Z_L(t, r_*)$ . A fase transiente, quasinormal e a cauda estão indicadas. Os parâmetros da $p$ -brana são $p = 0$ , $a = 2$ , $b = 0.5$ , $L = 1$ e $\beta = 0$ . . . . .	72
5.10	Caudas para vários valores de $p$ . Os parâmetros da $p$ -brana são $a = 2$ , $b = 0.5$ , $L = 0$ , $\beta = 0$ . As retas que aparecem logo acima das caudas indicam suas respectivas inclinações. . . . .	74
5.11	Gráfico Log-Log do valor absoluto de $Z_L(t, r_*)$ . A fase transiente, quasinormal e a cauda massiva estão indicadas. Os parâmetros da $p$ -brana são $p = 0$ , $a = 2$ , $b = 0.5$ , $L = 1$ e $\beta = 1$ . . . . .	74
5.12	Cauda massiva para $p = 6$ . Os parâmetros da $p$ -brana são $a = 2$ , $b = 0.5$ , $L = 0$ e $\beta = 1$ . . . . .	76
5.13	Efeito de $\beta$ no comportamento da parte real de $\omega$ para $p = 2$ com $a = 2$ , $b = 1$ e $L = 0$ . Os dois métodos numéricos foram empregados. Eles são consistentes para $\beta$ pequeno e suficientemente grande, mas discrepantes próximo de $\beta = 1$ .	76
5.14	Efeito de $\beta$ no comportamento da parte imaginária de $\omega$ para $p = 2$ com $a = 2$ , $b = 1$ e $L = 0$ . Os dois métodos numéricos foram empregados. Eles são consistentes para $\beta$ pequeno e suficientemente grande, mas discrepantes próximo de $\beta = 1$ . . . . .	77
6.1	Condensado em função da temperatura com $\alpha = 0.0001$ para vários valores de massa do campo escalar em $d = 5$ . As quatro linhas de cima para baixo correspondem ao valores de massa $m^2 L^2 = -4, -3, -2$ e $-1$ respectivamente. .	84
6.2	Condensado em função da temperatura com $\alpha = 0.2$ para vários valores de massa do campo escalar em $d = 5$ . As quatro linhas de cima para baixo correspondem ao valores de massa $m^2 L^2 = -4, -3, -2$ e $-1$ respectivamente. . . . .	85

# Lista de Tabelas

5.1	<i>Frequências quasinormais escalares para <math>p = 0, 1, 2, 3</math> e <math>4</math> com <math>a = 2</math> e <math>b = 0.5</math>.</i>	66
5.2	<i>Frequências quasinormais escalares para <math>p = 4, 5</math> e <math>6</math> com <math>a = 2</math> e <math>b = 0.5</math>.</i>	66
5.3	<i>Frequências quasinormais escalares para <math>p = 0, 1, 2, 3, 4</math> no caso extremo <math>a = b = 1</math>.</i>	70
5.4	<i>Frequências quasinormais para <math>p = 0, 1, 2, 3</math> e <math>4</math> com <math>n = 0</math>, <math>a = 2</math> e <math>b = 0.5</math> usando a integração característica.</i>	71
5.5	<i>Frequências quasinormais escalares para <math>p = 4, 5</math> e <math>6</math> com <math>n = 0</math>, <math>a = 2</math> e <math>b = 0.5</math> usando a integração característica.</i>	72

# Capítulo 1

## Introdução

A Relatividade Geral é a teoria física mais bem sucedida em explicar o universo em larga escala. Relaciona o conteúdo de energia e matéria de uma dada região do espaço-tempo com a dinâmica de sua geometria. A equação que rege esta dinâmica é a equação de Einstein,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad , \quad (1.1)$$

onde o lado direito representa o conteúdo de energia e matéria e o esquerdo as propriedades da geometria. São muitos os fenômenos físicos descritos por estas equações. Podemos citar o desvio da trajetória de raios luminosos devido a campos gravitacionais, o arraste do espaço-tempo nas vizinhanças de corpos massivos em rotação, a previsão de ondas gravitacionais e, talvez a previsão mais interessante, a da existência de buracos negros.

Buracos negros surgem naturalmente como soluções exatas das equações de Einstein. São de grande importância para o entendimento da gravitação quântica, já que descrevem um estado extremo da matéria: uma quantidade enorme de massa concentrada em uma região de volume zero. Pelo lado astrofísico, os buracos negros são de suma importância pois aparecem como o produto final do colapso gravitacional de estrelas massivas. Possíveis candidatos incluem corpos extremamente massivos e densos, cuja explicação teórica mais aceita é que sejam buracos negros. Recentemente, estudos sobre a estrutura galáctica e observações de órbitas de corpos indicam que em todas as galáxias espirais, tal como a Via Láctea, possuem um buraco negro super massivo no seu bojo central.

As equações da Relatividade Geral são altamente não-lineares, devido a isso a utilização de técnicas aproximativas é bastante comum. Em particular, para o estudo de perturbações em buracos negros, a teoria de perturbações em Relatividade Geral é amplamente aplicada. Tal estudo teve início com o trabalho de Regge e Wheeler [1] na década de 1950. Naquele trabalho, foi analisada a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild usando para isto pequenas perturbações em sua geometria usando técnicas que são empregadas até hoje nesse tipo de estudo. Outros trabalhos pioneiros na mesma linha são os de Vishveshwara [2] e de Zerilli [3].

De um modo geral, perturbações devido a campos de teste ou mesmo a geometria nas vizinhanças de horizonte de eventos de um buraco negro evoluem com frequências bem características denominadas frequências quasinormais. Este termo foi introduzido por Press [4]. As frequências quasinormais dependem exclusivamente dos parâmetros que definem a família de buracos negros considerada, e não da perturbação inicial. Além disso, conforme será visto em mais detalhes no presente trabalho, analisando o espectro quasinormal de um buraco negro podemos descobrir se a solução é estável ou não frente a pequenas perturbações: se a parte imaginária dessas frequências for positiva significa que as perturbações crescem com o tempo tornando o sistema instável.

Além das aplicações em astrofísica, recentemente tem havido forte interesse no estudo dos modos quasinormais no contexto da correspondência AdS/CFT (*Anti-de Sitter/Conformal Field Theory*), proposta inicialmente por Maldacena [5]. Segundo esta conjectura, existe uma relação de correspondência entre uma teoria de cordas num espaço-tempo do tipo AdS e uma teoria de campos conforme sobre a fronteira desse espaço. De modo que buracos negros no espaço AdS correspondem a um estado aproximadamente térmico na teoria de campos. Foi devido ao trabalho de Horowitz e Hubeny [6] a primeira interpretação dos modos quasinormais em termos da correspondência AdS/CFT. Nessa interpretação, perturbar um buraco negro significa perturbar o estado térmico correspondente na teoria de campos. O tempo de amortecimento, isto é, o tempo que este estado térmico da teoria de campos leva para voltar ao equilíbrio, é dado pela parte imaginária da frequência quasinormal fundamental. Mais tarde, Birmingham *et al* [7] mostraram que há uma concordância exata entre as frequências quasinormais de perturbações

de vários spins do buraco negro BTZ (*Bañados, Teitelboim, Zanelli*) [8] e os pólos da função de Green retardada das correspondentes perturbações na teoria conforme dual em duas dimensões, definida na borda do espaço-tempo.

Um dos ingredientes fundamentais da correspondência AdS/CFT são as soluções das  $p$ -branas negras. Tais soluções foram obtidas por Horowitz e Strominger [9] no limite de baixas energias da teoria de cordas do tipo IIA/B. Como será tratado no capítulo 2 deste trabalho, as  $p$ -branas negras podem ser interpretadas como buracos negros em 10 dimensões, já que, para uma dada escolha de parâmetros, apresentam uma singularidade física coberta por um horizonte de eventos, que também é uma superfície de redshift infinito. No limite próximo do horizonte as  $p$ -branas se reduzem ao espaço-tempo AdS, que no exemplo original de Maldacena [5] é usado como dual gravitacional da teoria de Yang-Mills através do uso da correspondência AdS/CFT.

Além do escopo do estudo dos modos quasinormais, buracos negros AdS têm outras aplicações no contexto da correspondência AdS/CFT. Em particular, o estudo de estados supercondutores na teoria de campos dual, usando para isso um sistema gravitacional formado por um buraco negro carregado AdS e um campo escalar carregado. Esta proposta é devida a Gubser [10]. Inúmeros outros trabalhos seguindo esta linha foram levados a cabo, veja a revisão de Herzog [11] e suas referências. Em particular, destacamos o estudo do efeito de correções na curvatura da geometria do *bulk* na formação do estado supercondutor na borda [12].

O trabalho apresentado nesta tese consiste no estudo das frequências quasinormais das  $p$ -branas negras com o objetivo de observar a estabilidade desses espaços-tempos. Analisaremos a evolução de um campo escalar sem massa na vizinhança do horizonte e eventos através do método semianalítico WKB e um método numérico baseado no problema de condições iniciais características. Outro ponto analisado nesta tese, é o da formação de um supercondutor holográfico tendo como dual gravitacional o buraco negro de Gauss-Bonnet AdS em  $d$  dimensões.

Os assuntos abordados estão divididos da seguinte maneira.

No capítulo 2 faremos uma revisão pormenorizada da derivação das soluções das  $p$ -branas extremas e das  $p$ -branas negras e analisaremos a sua estrutura causal. O principal objetivo é caracterizá-las como buracos negros em dimensões mais altas. Procuraremos pela localização

das singularidades, horizontes de eventos e superfícies de *redshift* infinito.

No capítulo 3 faremos uma breve revisão da teoria de perturbações em Relatividade Geral e definiremos modos quasinormais em termos de pólos das funções de Green retardadas. Também apresentaremos os rudimentos dos dois métodos numéricos empregados neste trabalho para o cálculo das frequências quasinormais das  $p$ -branas.

O capítulo 4 basicamente traz as motivações do porque estudar modos quasinormais no contexto da correspondência AdS/CFT. Em particular a sua interpretação em termos dos pólos das funções de Green retardadas da teoria de campos definida na borda AdS. Daremos ênfase ao trabalho realizado por Son *et al* [13] que postularam uma prescrição para o cálculo das funções de Green retardadas baseada apenas na análise da evolução de campos de teste no *bulk*.

No capítulo seguinte tratamos em detalhe as frequência quasinormais escalares das  $p$ -branas extremas e negras que compõem o principal resultado desta tese.

O capítulo 6 trata do método semianalítico para a obtenção da densidade de um estado supercondutor de uma teoria de campos definida na borda do espaço-tempo do buraco negro de Gauss-Bonnet AdS.

Por fim, temos as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras.



# Capítulo 2

## As $p$ –Branas Negras

Estudaremos neste capítulo as soluções das  $p$ –branas negras. Tais objetos podem ser interpretados como uma família de buracos negros estendidos em  $D$  dimensões caracterizada por dois parâmetros.

Nosso ponto de partida será uma ação bem geral em  $D$  dimensões, para em seguida obter as equações de movimento dos campos envolvidos. Por fim, faremos uma escolha adequada de parâmetros e imporemos as simetrias convenientes para obtermos as  $p$ –branas negras. Seguiremos de perto as revisões de R. Argurio [14], K. Stelle [15] e a dissertação de L. Beviláqua [16].

### 2.1 Ação das $p$ –branas e equações de movimento

Consideremos uma teoria clássica em  $D$  dimensões que inclua gravitação, um campo dilatônico e uma  $n$ –forma intensidade de campo, cuja ação é dada por

$$I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \partial_a \Phi \partial^a \Phi - \frac{e^{A\Phi}}{2n!} F_n^2 \right], \quad (2.1)$$

sendo  $G_D$  a constante da gravitação em  $D$  dimensões,  $A$  é a constante de acoplamento entre o dilatão e a  $n$ –forma,  $R$  o escalar de Ricci,  $g$  o determinante do tensor métrico  $g_{ab}$ ,  $\Phi$  o campo escalar dilatônico e  $F_n$  a  $n$ –forma intensidade de campo. Os índices latinos  $a, b$  referem-se as coordenadas de todo o espaço-tempo  $D$ -dimensional, isto é  $a, b = 0, 1, \dots, (D-1)$  e o índice  $n$

representa a ordem da  $n$ -forma<sup>1</sup>.

Nosso ponto de partida para o estudo das  $p$ -branas negras será a ação acima descrita. O primeiro aspecto a ser estudado é o das equações de movimento, que são obtidas utilizando-se o princípio da mínima ação aplicado à cada um dos campos que compõem a teoria.

Começando pelo campo dilatônico  $\Phi$ , a variação da ação  $I$  em relação a este campo é

$$\delta_{\Phi}I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \delta_{\Phi} \left( g_{ab} \partial^a \Phi \partial^b \Phi \right) - \frac{\delta_{\Phi} (e^{A\Phi})}{2n!} F_n^2 \right]. \quad (2.2)$$

Da total simetria do tensor métrico  $g_{ab}$ , o primeiro termo do integrando pode ser escrito como  $-g_{ab} \partial^a \Phi \partial_b (\delta\Phi)$ . O segundo termo pode ser escrito como  $-\frac{A}{2n!} e^{A\Phi} \delta\Phi F_n^2$ . Substituindo estes dois resultados em (2.2), obtemos

$$\delta_{\Phi}I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -g_{ab} \partial^a \Phi \partial^b (\delta\Phi) - \frac{A}{2n!} e^{A\Phi} (\delta\Phi) F_n^2 \right]. \quad (2.3)$$

A primeira integral que aparece pode ser simplificada através de uma integração por partes. Usando o resultado

$$\int d^D x \partial^a [\sqrt{-g} g_{ab} \partial^b \Phi (\delta\Phi)] = \int d^D x \sqrt{-g} g_{ab} \partial^a \Phi \partial^b (\delta\Phi) + \int d^D x \partial^a (\sqrt{-g} g_{ab} \partial^b \Phi) \delta\Phi,$$

reescrevemos a primeira integral como<sup>2</sup>

$$\int d^D x \sqrt{-g} g_{ab} \partial^a \Phi \partial^b (\delta\Phi) = - \int d^D x \partial^a [\sqrt{-g} g_{ab} \partial^b \Phi] \delta\Phi.$$

Com isso, a variação da ação em relação ao campo dilatônico fica

$$\delta_{\Phi}I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left[ \partial^a \left( \sqrt{-g} g_{ab} \partial^b \Phi \right) - \frac{A \sqrt{-g} e^{A\Phi}}{2n!} F_n^2 \right] \delta\Phi.$$

Do princípio da mínima ação vem que  $\delta_{\Phi}I = 0$  para qualquer  $\delta\Phi$ , o que implica na equação de movimento para o campo dilatônico  $\Phi$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a \left( \sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \Phi \right) = \frac{A e^{A\Phi}}{2n!} F_n^2. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Para  $n = 2$  e  $D = 4$ ,  $F_n$  é simplesmente o tensor de Maxwell  $F_2 = \frac{1}{2} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$ .

<sup>2</sup>No passo anterior, usamos a seguinte identidade  $\nabla^a [\sqrt{-g} T_a] = \partial^a [\sqrt{-g} T_a]$ , já que, sendo  $T^a = g_{ab} \partial^b \Phi$  um vetor, o objeto  $\sqrt{-g} T^a$  é uma densidade tensorial de peso +1.

Quando não há interação entre o campo dilatônico e a  $n$ -forma, isto é, quando  $A = 0$ , o termo de fonte desta equação é zero. A equação resultante é a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa.

Variando a ação (2.1) em relação ao tensor métrico  $g_{ab}$  obtemos

$$\delta_g I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left[ \delta_g(\sqrt{-g}R) - \frac{1}{2} \delta_g(\sqrt{-g} \partial_a \Phi \partial^b \Phi) - \frac{e^{A\Phi}}{2n!} \delta_g(\sqrt{-g} F_n^2) \right]. \quad (2.5)$$

Explicitando a dependência do escalar de Ricci  $R$  na métrica  $g_{ab}$  como  $R = g_{ab} R^{ab}$ , o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima fica

$$\int d^D x \delta_g(\sqrt{-g}R) = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{ab} R + R_{ab} \right] \delta g^{ab} + \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \delta_g R_{ab},$$

sendo que usamos o resultado  $\delta_g \sqrt{-g} = -1/2 \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$ .

O próximo passo é mostrar que a segunda integral do lado direito da equação acima pode ser escrita como uma derivada total. O objetivo é usar o fato de que as variações dos campos nos extremos é zero, para assim, anular esta integral.

Este trabalho é realizado lançando mão da equação de Palatini. Esta equação relaciona  $\delta_g R_{ab}$  com as primeiras derivadas das conexões métricas  $\Gamma_{bc}^a$  escritas em um sistema de coordenadas tal que  $\Gamma_{bc}^a = 0$  mas não suas derivadas. Além disso, derivadas covariantes e parciais ordinárias coincidem. Esta equação é dada por

$$\delta_g R_{ab} = \nabla_c [\delta_g \Gamma_{ab}^c] - \nabla_b [\delta_g \Gamma_{ad}^d].$$

Apesar dessa equação ter sido obtida em um particular sistema de coordenadas, o resultado é uma equação tensorial, ou seja, podemos usá-la em qualquer outro sistema. Assim,

$$\int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \delta_g R_{ab} = \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \left\{ \nabla_c [\delta_g \Gamma_{ab}^c] - \nabla_b [\delta_g \Gamma_{ad}^d] \right\}.$$

Usando o fato de que  $\nabla_c [\sqrt{-g} T_{b\dots}^{a\dots}] = \sqrt{-g} \nabla_c T_{b\dots}^{a\dots}$  e que  $\nabla_c g^{ab} = 0$ , a equação anterior fica

$$\int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \delta_g R_{ab} = \int d^D x \nabla_c \left[ \sqrt{-g} \left( g^{ab} \delta_g \Gamma_{ab}^c - g^{ac} \delta_g \Gamma_{ad}^d \right) \right].$$

O termo entre colchetes é uma densidade tensorial de peso  $+1$ , portanto usando o teorema da divergência obtemos uma integral de superfície. Da hipótese de que os campos se anulem nessa

superfície, obtemos o resultado que procurávamos,

$$\int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \delta_g R_{ab} = 0.$$

Logo a variação do termo de Einstein-Hilbert em relação à métrica é simplesmente

$$\int d^D x \delta_g (\sqrt{-g} R) = \int d^D x G_{ab} \delta g^{ab}, \quad (2.6)$$

sendo  $G_{ab} = R_{ab} - 1/2 g_{ab} R$  o tensor de Einstein.

Continuando, o próximo termo a ser considerado é a segunda integral de (2.5). Usando o resultado para variação de  $\sqrt{-g}$  em relação à métrica, esta integral se escreve como

$$\int d^D x \delta_g \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi \right) = \int d^D x \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[ \partial_a \Phi \partial_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^c \Phi \partial_c \Phi \right] \right\} \delta g^{ab}. \quad (2.7)$$

Por último temos a variação da  $n$ -forma  $F_n$ . Expandindo a última integral de (2.5), temos

$$-\frac{e^{A\Phi}}{2n!} \int d^D x \delta_g (\sqrt{-g} F_n^2) = -\frac{e^{A\Phi}}{2n!} \int d^D x \left[ \delta_g (\sqrt{-g}) F_{a_1 \dots a_n} F^{a_1 \dots a_n} + \sqrt{-g} \delta_g (F_{a_1 \dots a_n} F^{a_1 \dots a_n}) \right],$$

usando o fato de que<sup>3</sup>

$$\delta_g (F_{a_1 \dots a_n} F^{a_1 \dots a_n}) = n F_{aa_2 \dots a_n} F_b^{a_2 \dots a_n} \delta g^{ab},$$

e a expressão da variação de  $\sqrt{-g}$ , obtemos

$$\int d^D x \left\{ \frac{e^{A\Phi}}{2n!} \left[ \frac{1}{2} g_{ab} F_n^2 - n F_{aa_2 \dots a_n} F_b^{a_2 \dots a_n} \right] \right\} \delta g^{ab}. \quad (2.8)$$

Substituindo o resultado acima e as expressões (2.6) (2.7) em  $\delta_g I$  e em seguida usando o princípio da mínima ação, obtemos a equação de movimento para o tensor métrico

$$G_{ab} = \frac{1}{2} \left( \partial_a \Phi \partial_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \Phi \partial^c \Phi \right) - \frac{e^{A\Phi}}{2n!} \left[ \frac{1}{2} g_{ab} F_n^2 - n F_{aa_2 \dots a_n} F_b^{a_2 \dots a_n} \right]. \quad (2.9)$$

Resta-nos encontrar a equação de movimento para a  $n$ -forma intensidade de campo  $F_n$ . Para isso, vamos escrevê-la em termos do potencial  $A_{n-1}$ ,

$$F_n = dA_{n-1},$$

---

<sup>3</sup>Neste ponto explicitamos a dependência na métrica da  $n$ -forma da seguinte maneira:  $F_n^2 = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n} F_{a_1 \dots a_n} F_{b_1 \dots b_n}$ .

sendo que  $d$  denota a derivada exterior<sup>4</sup>. Esta expressão em componentes fica  $F_{a_1 \dots a_n} = \partial_{[a_1} A_{a_2 \dots a_n]}$ , que para  $n = 2$  se reduz ao conhecido tensor de Maxwell  $F_{a_1 a_2} = \partial_{a_1} A_{a_2} - \partial_{a_2} A_{a_1}$ .

Em vista disso, a variação da ação  $I$  será tomada em relação ao potencial  $A_m$ , ou seja,

$$\delta_{A_m} I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{e^{A\Phi}}{2n!} \delta_{A_m} (F_n^2) \right\}. \quad (2.10)$$

A expressão de  $F_n^2$  termos de  $A_m$  é dada por

$$F_n^2 = n! (\partial_{a_1} A_{a_2 \dots a_n}) F^{a_1 \dots a_n}.$$

Ainda precisamos calcular a variação da expressão acima em relação ao potencial  $A_m$ . Novamente, por simplicidade, calcularemos explicitamente para o caso  $n = 2$ ,

$$\delta_{A_m} (F^{ab} F_{ab}) = 2g^{ac} g^{bd} \delta_{A_m} [\partial_c A_d (\partial_a A_b - \partial_b A_a)],$$

que usado em (2.10), nos permite realizar uma integração por partes em cada termo do tipo  $\partial_c (\delta A_d) \partial_a A_b$ , já que podemos escrever

$$\sqrt{-g} \partial_c (\delta A_d) \partial_a A_b = \partial_c (\sqrt{-g} \delta A_d) \partial_a A_b - \partial_c (\sqrt{-g} \partial_a A_b) \delta A_d.$$

O primeiro termo do lado direito é uma derivada total, que integrada dá zero já que as variações  $\delta A_d$  nos extremos se anulam. Portanto, sobra apenas o segundo termo, ou seja,

$$\delta_{A_m} I(n=2) = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left\{ \partial_a \left[ \sqrt{-g} e^{A\Phi} F^{ab} \right] \right\} \delta A_b,$$

que implica na equação de movimento,

$$\partial_a \left[ \sqrt{-g} e^{A\Phi} F^{ab} \right] = 0.$$

O procedimento análogo pode ser feito no caso geral de uma  $n$ -forma  $F_n$ . O que se obtém é a equação de movimento para a  $n$ -forma intensidade de campo  $F_n$

$$\partial_{a_1} \left[ \sqrt{-g} e^{A\Phi} F^{a_1 \dots a_n} \right] = 0. \quad (2.11)$$

---

<sup>4</sup>Por exemplo, a derivada exterior de uma 1-forma  $\omega = A_j dx^j$ , sendo  $A_j$  as componentes de um campo vetorial covariante e  $dx^j$  deslocamentos infinitesimais, é uma 2-forma  $d\omega$  dada por  $d\omega = \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) dx^j \wedge dx^k$

Assim, dos resultados (2.4), (2.9) e (2.11) e da identidade de Bianchi para a  $n$ -forma, o nosso sistema de equações de movimento originadas da variação da ação (2.1) é

$$G_{ab} = \frac{1}{2} \left( \partial_a \Phi \partial_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \Phi \partial^c \Phi \right) - \frac{e^{A\Phi}}{2n!} \left[ \frac{1}{2} g_{ab} F_n^2 - n F_{aa_2 \dots a_n} F_b^{a_2 \dots a_n} \right], \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a \left( \sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \Phi \right) = \frac{A e^{A\Phi}}{2n!} F_n^2, \quad (2.13)$$

$$\partial_{a_1} \left[ \sqrt{-g} e^{A\Phi} F^{a_1 \dots a_n} \right] = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_{(a_1} F_{a_2 \dots a_n)} = 0. \quad (2.15)$$

## 2.2 A escolha do *ansatz* para soluções extensas

Procuraremos resolver o sistema de equações deduzido na seção anterior, impondo certas restrições de simetria convenientes. Para tanto, faremos escolhas de *ansatz* apropriados para os campos envolvidos, a saber, a métrica  $g_{ab}$ , o campo dilatônico  $\Phi$  e a  $n$ -forma  $F_n$ .

Estamos interessados em soluções do tipo  $p$ -brana, que são soluções clássicas estendidas em  $p$  direções. Consideraremos o espaço-tempo com  $D$  dimensões, sendo  $p$  destas as dimensões da brana e  $(D-p)$  as dimensões do espaço-tempo ambiente (*bulk*). Representamos as  $p$  dimensões da brana pelas coordenadas  $\{x^i\}$  e as do *bulk* por  $t, z^\mu$ , sendo  $x^i$  as  $p$  coordenadas tipo-espaço da brana,  $t$  a coordenada tipo-tempo e  $z^\mu$  as  $(D-p-1)$  coordenadas tipo-espaço do *bulk*. Deste modo, todo o espaço-tempo é descrito pelas coordenadas

$$y^a = \{t, x^i, z^\mu\}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \mu = 1, \dots, D-p-1.$$

Em nosso estudo consideraremos as  $p$  direções da brana todas equivalentes, de modo que haja simetria de translação nessas direções. Como a brana tem uma posição definida em termos das coordenadas  $z^\mu$  a invariância por translações é quebrada nas direções espaciais que compõem o *bulk*, com exceção da coordenada tipo-tempo. Isto implica que consideraremos soluções estáticas. Além disso, postularemos que o *bulk* tenha simetria esférica.

Isto posto, o elemento de linha que usaremos como *ansatz* para o campo gravitacional será

$$ds^2 = d\hat{s}^2 + C^2(r) dx^i dx_i, \quad (2.16)$$

onde  $d\hat{s}^2$  representa o elemento de linha do *bulk*, que, como foi dito, representa um espaço-tempo  $(D-p)$ -dimensional estático dotado de simetria esférica. Desta forma, podemos escrever

$$d\hat{s}^2 = -\mathcal{B}^2(r)dt^2 + \mathcal{F}^2(r)dr^2 + r^2 \mathcal{G}^2(r)d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.17)$$

sendo  $d$  o número de dimensões do *bulk*, isto é,  $d = D - p$  e  $d\Omega_{d-2}^2$  o elemento de linha da esfera  $(d-2)$ -dimensional.

Substituindo (2.17) em (2.16) temos explicitamente o elemento de linha total

$$ds^2 = -\mathcal{B}^2(r)dt^2 + \mathcal{F}^2(r)dr^2 + r^2 \mathcal{G}^2(r)d\Omega_{d-2}^2 + \mathcal{C}^2(r)dx^i dx_i. \quad (2.18)$$

Notemos que se  $p = 0$ , o elemento de linha é simplesmente o de um espaço-tempo esfericamente simétrico. Como nosso objetivo são soluções extensas que possuam horizonte de eventos, o problema a ser resolvido neste caso é o de simplesmente encontrar soluções de buracos negros esfericamente simétricos em  $d$  dimensões.

Uma escolha adequada para a  $n$ -forma intensidade de campo é o chamado *ansatz* elétrico, que consiste na  $(p+2)$ -forma

$$F_{t\sigma_1 \dots \sigma_p r} = \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_p} \partial_r E(r), \quad (2.19)$$

sendo  $\varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$  a densidade tensorial de Levi-Civita<sup>5</sup>. Esta escolha para  $F_n$  satisfaz a identidade de Bianchi trivialmente.

Devido à simetria esférica do *bulk*, o campo dilatônico deve depender apenas da coordenada radial  $r$ , logo

$$\Phi = \Phi(r). \quad (2.20)$$

Lançando mão das escolhas feitas para os campos do nosso sistema, podemos explicitar as equações de movimento para em seguida buscar algumas de suas soluções.

---

<sup>5</sup>A densidade de Levi-Civita  $\varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$  é uma densidade tensorial de peso +1 totalmente antissimétrica, cujo valor, em qualquer sistema de coordenadas  $x^i = (x^1, \dots, x^p)$ , é +1 ou -1 se  $\sigma_1 \dots \sigma_p$  é uma permutação par ou ímpar de  $1, \dots, p$ .

A dinâmica da  $n$ -forma intensidade de campo  $F_n$  é regida pela equação (2.14). Utilizando o *ansatz* elétrico para a  $(p+2)$ -forma nessa equação, obtemos<sup>6</sup>:

$$\partial_r \left[ e^{A\Phi} \frac{(\mathcal{G}r)^{d-2}}{\mathcal{B}\mathcal{F}C^p} \partial_r E(r) \right] = 0 \quad ,$$

como se observa, o argumento da derivada é igual a uma constante. Chamando-a de  $Q$ , tiramos o valor de  $\partial_r E(r)$

$$\partial_r E(r) = \mathcal{B}\mathcal{F}C^p e^{-A\Phi} \frac{Q}{(\mathcal{G}r)^{d-2}} \quad ,$$

que substituído em (2.19) nos dá a solução para a  $(p+2)$ -forma intensidade de campo em termos das componentes do tensor métrico e do campo de dÍlaton

$$\boxed{F_{t\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} = \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} \mathcal{B}\mathcal{F}C^p e^{-A\Phi} \frac{Q}{(\mathcal{G}r)^{d-2}}} \quad (2.21)$$

Este resultado nos permite calcular os termos do lado direito das outras equações de movimento que dependam de  $F_n$ . Para tanto, vamos colecionar algumas expressões:

$$F_{(p+2)}^2 = (p+2)! F_{t\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} F^{t\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} ,$$

onde usamos o fato de que  $\varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_p} \varepsilon^{\sigma_1 \dots \sigma_p} = (p+2)!$ .

Substituindo (2.21) na expressão acima, obtemos

$$F_{(p+2)}^2 = -(p+2)! e^{-2A\Phi} \frac{Q^2}{(\mathcal{G}r)^{d-2}} \quad (2.22)$$

Outra expressão muito útil é

$$F^{a\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} F_{b\sigma_1 \dots \sigma_{p+2}} = -(p+1)! \hat{\delta}_b^a e^{-2A\Phi} \frac{Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} \quad (2.23)$$

onde  $\hat{\delta}_b^a = \delta_t^a \delta_b^t + \delta_i^a \delta_b^i + \delta_r^a \delta_b^r$ .

Devido ao fato do campo dilatônico depender apenas da coordenada radial, o lado esquerdo da equação (2.13) é simplesmente

$$\mathcal{F}^{-2} \left\{ \Phi'' + \left[ (\ln \mathcal{B})' + p(\ln C)' - (\ln \mathcal{F})' + (d-2)(\ln \mathcal{G})' + \frac{(d-2)}{r} \right] \Phi' \right\} \quad (2.24)$$

---

<sup>6</sup>Também usamos o valor da raiz do determinante da métrica  $\sqrt{-g} = \mathcal{B}C^p \mathcal{F}(\mathcal{G}r)^{d-2} f(\theta_\alpha)$ . As funções  $f(\theta_\alpha)$  dependem das coordenadas angulares que compõem o elemento de linha esférico  $d\Omega_{d-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{d-3} d\theta_{d-2}^2$ . Estas funções se cancelam com o denominador fora da derivada.



Usando a expressão (2.22) no lado direito de (2.13) e igualando ao resultado acima, obtemos a equação de movimento do dÍlaton em termos das componentes da métrica

$$\mathcal{F}^{-2} \left\{ \Phi'' + \left[ (\ln \mathcal{B})' + p(\ln C)' - (\ln \mathcal{F})' + (d-2)(\ln \mathcal{G})' + \frac{(d-2)}{r} \right] \Phi' \right\} = -\frac{Ae^{-A\Phi}}{2} \frac{Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} . \quad (2.25)$$

Vamos agora escrever explicitamente as equações de Einstein (2.12) em termos da métrica (2.16) e usando as expressões (2.22), (2.23). Antes disso é útil reescrever o tensor de Einstein, usando o escalar de Ricci, dado por

$$R = \frac{1}{2} \partial_c \Phi \partial^c \Phi + \frac{e^{A\Phi}}{n!} \frac{(2n-D)}{(2-D)} F_n^2 .$$

As equações de Einstein são totalmente diagonais nesse sistema de coordenadas. Listamos abaixo as equações na ordem  $R_t^t$ ,  $R_{x^i}^{x^i}$ ,  $R_r^r$  e  $R_{\theta_\alpha}^{\theta_\alpha}$ ,

$$\mathcal{F}^{-2} \left\{ -(\ln \mathcal{B})'' - (\ln \mathcal{B})' \left[ (\ln \mathcal{B})' + p(\ln C)' - (\ln \mathcal{F})' + (d-2)(\ln \mathcal{G})' + \frac{(d-2)}{r} \right] \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{(n-1)-(D-2)}{(D-2)} \right) \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} , \quad (2.26)$$

$$\mathcal{F}^{-2} \left\{ -(\ln C)'' - (\ln C)' \left[ (\ln \mathcal{B})' + p(\ln C)' - (\ln \mathcal{F})' + (d-2)(\ln \mathcal{G})' + \frac{(d-2)}{r} \right] \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{(n-1)-(D-2)}{(D-2)} \right) e^{-A\Phi} \frac{Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} , \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-2} \left\{ -(\ln \mathcal{B})'' - p(\ln C)'' - (\ln \mathcal{B})'^2 - p(\ln C)'^2 + (\ln \mathcal{B})'(\ln \mathcal{F})' + p(\ln C)'(\ln \mathcal{F})' \right. \\ \left. - (d-2) \left[ (\ln \mathcal{G})'' + (\ln \mathcal{G})'^2 + \frac{2}{r}(\ln \mathcal{G})' - (\ln \mathcal{G})'(\ln \mathcal{F})' - \frac{1}{r}(\ln \mathcal{F})' \right] \right\} \\ = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-2} (\Phi)'^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{(n-1)-(D-2)}{(D-2)} \right) \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} , \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{F}^{-2} \left\{ - \left[ \frac{1}{r} + (\ln \mathcal{G})' \right] \left[ (\ln \mathcal{B})' + p(\ln C)' - (\ln \mathcal{F})' + (d-2)(\ln \mathcal{G})' + \frac{(d-2)}{r} \right] - (\ln G)'' + \frac{1}{r^2} + (d-3) \frac{\mathcal{F}^2}{r^2 \mathcal{G}^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{(n-1)}{(D-2)} e^{-A\Phi} \frac{Q^2}{(\mathcal{G}r)^{2(d-2)}} . \quad (2.29)$$

## 2.3 $p$ -branas extremas

Neste ponto estamos em condições de obter a nossa primeira solução. Vamos resolver o sistema de equações (2.25)-(2.29) para as chamadas  $p$ -branas extremas. Estas soluções são caracterizadas por apenas um parâmetro, portanto quando formos resolver o sistema de equações devemos atentar para o fato de não podermos introduzir nenhuma outra constante além daquela introduzida em (2.21). Além disso, vamos simplificar as equações escolhendo o chamado calibre isotrópico, que nada mais é que uma redefinição da coordenada radial  $r$  tal que

$$\mathcal{F} = \mathcal{G},$$

fazendo com que a métrica do *bulk* possa ser escrita simplesmente como a multiplicação da função  $\mathcal{G}^2$  por uma métrica plana em  $d$  dimensões.

Outra restrição que faremos é motivada pela semelhança do lado esquerdo das equações (2.26) e (2.27). Vemos que estas equações são idênticas se tomarmos  $\mathcal{B} = C$ . Tal escolha se traduz na imposição da invariância de Lorentz  $SO(1, p)$  no volume-mundo<sup>7</sup> da brana.

Com estas escolhas o *ansatz* (2.18) se reduz em

$$ds^2 = \mathcal{B}^2 [-dt^2 + dx^i dx_i] + \mathcal{G}^2 [dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-2)}^2],$$

e o sistema de cinco equações (2.25)-(2.29) se reduz a quatro, dado que (2.26) e (2.27) se tornam

---

<sup>7</sup>Volume-mundo é a trajetória da  $p$ -brana no espaço-tempo, da mesma forma que uma partícula descreve uma linha-mundo e uma corda uma folha-mundo.

idênticas:

$$\begin{aligned}
 -(\ln \mathcal{B})'' - \frac{(d-2)}{r}(\ln \mathcal{B})' - (\ln \mathcal{B})' [(p+1)(\ln \mathcal{B})' + (d-3)(\ln \mathcal{G})'] = \\
 -\frac{d-3}{2(D-2)} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{r^{2(d-2)}} ,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
 -(p+1)(\ln \mathcal{B})'' - (d-2)(\ln \mathcal{G})'' - (p+1)(\ln \mathcal{B})'^2 + (p+1)(\ln \mathcal{B})'(\ln \mathcal{G})' \\
 - \frac{(d-2)}{r}(\ln \mathcal{G})' - \frac{1}{2}(\Phi)'^2 = -\frac{d-3}{2(D-2)} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{r^{2(d-2)}} ,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 -\left[(\ln \mathcal{G})' + \frac{1}{r}\right] [(p+1)(\ln \mathcal{B})' + (d-3)(\ln \mathcal{G})'] - (\ln \mathcal{G})'' - \frac{d-2}{r}(\ln \mathcal{G})' = \\
 \frac{(p+1)}{2(D-2)} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{r^{2(d-2)}} ,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi'' + \frac{(d-2)}{r}\Phi' + \Phi' [(p+1)(\ln \mathcal{B})' + (d-3)(\ln \mathcal{G})'] = \\
 -\frac{Ae^{-A\Phi}}{2} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} .
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Tomando a combinação  $\{(p+1) \times eq.(2.30) + (d-3) \times eq.(2.32)\}$ , obtemos a equação

$$\phi'' + \phi'^2 + \frac{(2d-5)}{r}\phi' = 0, \tag{2.34}$$

onde definimos  $\phi = (p+1)(\ln \mathcal{B}) + (d-3)(\ln \mathcal{G})$ . Uma solução para esta equação seria  $\phi = b$ , sendo  $b$  uma constante. Entretanto, estaríamos violando a nossa hipótese de que a  $p$ -brana seja extrema, isto é, uma solução que dependa apenas de um parâmetro. Então escolhemos simplesmente  $b = 0$  e temos

$$(p+1) \ln \mathcal{B} + (d-2) \ln \mathcal{G} = 0 ,$$

o que implica na relação

$$\mathcal{B}^{(p+1)} \mathcal{G}^{d-3} = 1. \tag{2.35}$$

Usando este resultado nas equações restantes, nosso sistema reduz-se a três equações para  $\mathcal{G}$  e  $\Phi$

$$(\ln \mathcal{G})'' + \frac{d-2}{r}(\ln \mathcal{G})' = -\frac{(p+1)}{2(D-2)} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{e^{-A\Phi} Q^2}{r^{2(d-2)}} , \quad (2.36)$$

$$\Phi'' + \frac{(d-2)}{r} \Phi' = -\frac{A}{2} e^{-A\Phi} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} , \quad (2.37)$$

$$\frac{(D-2)(d-3)}{(p+1)} (\ln \mathcal{G})'^2 + \frac{1}{2} \Phi'^2 = \frac{1}{2} e^{-A\Phi} \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} . \quad (2.38)$$

Da combinação  $\left\{ A \times eq.(2.36) - \frac{p+1}{D-2} \times eq.(2.37) \right\}$  resulta

$$\lambda'' + \lambda' = 0 , \quad (2.39)$$

em que  $\lambda = A \ln \mathcal{G} - \frac{p+1}{D-2} \Phi$ . Novamente, fixamos  $\lambda = 0$  para que não apareçam novos parâmetros na solução. Portanto,

$$A \ln \mathcal{G} - \frac{(p+1)}{D-2} \Phi = 0 ,$$

ou seja,

$$\mathcal{G} = e^{\frac{(p+1)}{(D-2)} \Phi} . \quad (2.40)$$

Desta forma, a equação restante (2.38) fica:

$$\frac{[(d-3)(p+1) + \frac{1}{2} A^2 (D-2)]}{A^2 (D-2)} \Phi'^2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{A(D-2)} [(d-3)(p+1) + \frac{1}{2} A^2 (D-2)]} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} .$$

Definindo o objeto  $\Delta = (d-3)(p+1) + \frac{1}{2} A^2 (D-2)$  e tomando a raiz quadrada da equação acima, obtemos

$$\left[ e^{\frac{\Delta}{A(D-2)} \Phi} \right]' = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{2(D-2)}} \frac{|Q|}{r^{d-2}} ,$$

cujas integração resulta em

$$e^{\frac{\Delta}{A(D-2)} \Phi} = 1 + \frac{1}{(d-3)} \sqrt{\frac{\Delta}{2(D-2)}} \frac{|Q|}{r^{d-3}} , \quad (2.41)$$

em que usamos a condição de que o valor do campo  $\Phi$  seja zero no infinito espacial  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, o sinal do lado direito da equação anterior foi escolhido de forma que  $\Phi$  não seja singular para valores de  $r > 0$ .

Mostra-se conveniente definirmos a seguinte função em termos de  $\Phi$ :

$$\mathcal{H} = 1 + \frac{1}{(d-3)} \sqrt{\frac{\Delta}{2(D-2)}} \frac{|Q|}{r^{d-3}} \equiv 1 + \frac{h^{d-3}}{r^{d-3}},$$

que implica em

$$e^\Phi = \mathcal{H}^{\frac{A(D-2)}{\Delta}}.$$

Desta forma, as componentes da métrica, o campo dilatônico e a  $(p+2)$ -forma intensidade de campo ficam determinadas:

$$\mathcal{B} = \mathcal{H}^{-\frac{(d-3)}{\Delta}}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{H}^{\frac{(p+1)}{\Delta}}, \quad e^\Phi = \mathcal{H}^{A\frac{D-2}{\Delta}}, \quad F_{t\sigma_1\cdots\sigma_{p+2}} = \frac{Q}{|Q|} \sqrt{\frac{2(D-2)}{\Delta}} (\mathcal{H}^{-1})'. \quad (2.42)$$

Portanto, a solução de uma  $p$ -brana extrema esfericamente simétrica é

$$\boxed{ds^2 = \mathcal{H}^{-2\frac{(d-3)}{\Delta}} (-dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_p^2) + \mathcal{H}^{2\frac{(p+1)}{\Delta}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-2)}^2)} \quad (2.43)$$

No decorrer deste trabalho, analisaremos em detalhe as propriedades desta solução. Por hora, vamos generalizá-la para o caso fora do limite extremo, isto é, considerando mais um parâmetro nas soluções.

## 2.4 $p$ -branas negras

Uma solução mais geral do que a que acabamos de obter pode ser encontrada se considerarmos que esta depende de mais um parâmetro além daquele que obtemos quando resolvemos a equação para  $(p+2)$ -forma intensidade de campo.

Similarmente ao que foi feito no caso extremo, nosso ponto de partida será a métrica (2.18) e o *ansatz* elétrico (2.19) para a  $(p+2)$ -forma. Com isto, o sistema de equações que temos que resolver é o mesmo que no caso anterior (2.25)-(2.29). Entretanto, no caso extremo, observamos que vale a relação

$$\mathcal{B}^{p+1} \mathcal{G}^{d-3} = 1, \quad ,$$

com  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  e  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ , o que não é verdade no caso das  $p$ -branas negras. Neste caso, vamos introduzir uma função  $f$  tal que

$$\mathcal{B} \mathcal{C}^p \mathcal{F}^{-1} \mathcal{G}^{d-2} = f, \quad (2.44)$$

que generaliza a relação anterior, que é obtida tomando-se  $f = 1$ .

Observando o lado direito das equações (2.25)-(2.29) é útil definir o objeto

$$\mathcal{S}^2 = \frac{e^{-A\Phi}}{2(D-2)} \mathcal{F}^2 \mathcal{G}^{-2(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} \quad , \quad (2.45)$$

que permite-nos rescrever o sistema (2.25)-(2.29) como

$$(\ln \mathcal{B})'' + \frac{d-2}{r} (\ln \mathcal{B})' + (\ln \mathcal{B})' (\ln f)' = (d-3) \mathcal{S}^2 \quad , \quad (2.46)$$

$$(\ln C)'' + \frac{d-2}{r} (\ln C)' + (\ln C)' (\ln f)' = (d-3) \mathcal{S}^2 \quad , \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} (\ln f)'' + (\ln \mathcal{F})'' - (\ln \mathcal{F})' (\ln f)' - (\ln \mathcal{F})'^2 + (\ln \mathcal{B})'^2 + p (\ln C)' ^2 + (d-2) (\ln \mathcal{G})'^2 \\ + 2 \frac{(d-2)}{r} (\ln \mathcal{G})' - \frac{d-2}{r} (\ln \mathcal{F})' + \frac{1}{2} (\Phi')^2 = (d-3) \mathcal{S}^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} (\ln \mathcal{G})'' + \frac{(d-2)}{r} (\ln \mathcal{G})' + (\ln \mathcal{G})' (\ln f)' + \frac{1}{r} (\ln f)' + \frac{(d-3)}{r} \left(1 - \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{G}^2}\right) \\ = -(p+1) \mathcal{S}^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\Phi'' + \frac{d-2}{r} \Phi' + (\ln f) \Phi' = -A(D-2) \mathcal{S}^2 \quad . \quad (2.50)$$

É conveniente rescrever  $\ln \mathcal{B}$  e  $\ln \mathcal{F}$  nas formas

$$\ln \mathcal{B} = \ln C + \ln \hat{\mathcal{B}}, \quad \ln \mathcal{F} = \ln \mathcal{G} + \ln \hat{\mathcal{F}},$$

onde vemos que o caso extremo é obtido tomando  $\hat{\mathcal{B}} = 1$  e  $\hat{\mathcal{F}} = 1$ . Desta forma (2.46) fica

$$(\ln \hat{\mathcal{B}})'' + \frac{(d-2)}{r} (\ln \hat{\mathcal{B}})' + (\ln \hat{\mathcal{B}})' (\ln f)' = 0 \quad , \quad (2.51)$$

onde eliminamos  $\mathcal{S}^2$  usando a equação (2.47).

Inspirando-se no caso extremo, vamos considerar a seguinte combinação de equações  $(p+1) \times eq.(2.47) + (d-3) \times eq.(2.49)$ , com a definição do campo  $\psi = (p+1) \ln C + (d-3) \ln \mathcal{G}$ . Obtemos a equação diferencial

$$\psi'' + \left[ \frac{(d-2)}{r} + (\ln f)' \right] \psi' + \frac{(d-3)}{r} \left[ (\ln f)' + \frac{(d-3)}{r} (1 - \hat{\mathcal{F}}) \right] = 0 \quad . \quad (2.52)$$

Nosso objetivo é encontrar uma solução que dependa de dois parâmetros, ou seja, vamos reduzir nosso sistema a duas funções independentes. É plausível, portanto, tomarmos  $\psi = 0$  a fim de obtermos uma relação entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{C}^{p+1} \mathcal{G}^{d-3} = 1, \quad (2.53)$$

já que no final dos cálculos relacionaremos  $\Phi$  e  $\mathcal{G}$ . A outra função independente que nos resta é  $f$ . Observando que  $\ln \hat{\mathcal{B}}$ ,  $\ln \hat{\mathcal{F}}$  e  $\ln f$  são zero no limite extremo, é consistente tomarmos  $\ln \hat{\mathcal{B}}$  e  $\ln \hat{\mathcal{F}}$  proporcionais à  $\ln f$ , ou seja,

$$\ln \hat{\mathcal{B}} = c_B \ln f, \quad \ln \hat{\mathcal{F}} = c_F \ln f, \quad (2.54)$$

onde  $c_B$  e  $c_F$  são constantes, que se relacionam por  $c_B - c_F = 1$  devido à (2.44).

Escrevendo (2.51) em termos de  $\ln f$ , obtemos

$$(\ln f)'' + (\ln f)'^2 + \frac{(d-2)}{r} (\ln f)' = 0, \quad ,$$

que, fazendo a mudança  $(\ln f)' = \frac{g(r)}{r}$ , fica

$$g' = -\frac{g^2 + (d-3)g}{r}. \quad (2.55)$$

Integrada, dá o resultado

$$g(r) = \frac{2\mu(d-3)}{r^{d-3} - 2\mu}.$$

Portanto,

$$f = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-3}}, \quad (2.56)$$

sendo  $\mu$  uma constante de integração, que é o parâmetro adicional que estávamos procurando, para generalizarmos o caso extremo.

As constantes  $c_B$  e  $c_F$  são determinadas através da equação (2.52) fazendo  $\psi = 0$ ,

$$\frac{(d-3)}{r} \left[ (\ln f)' + \frac{(d-3)}{r} \left( 1 - e^{2c_F \ln f} \right) \right].$$

Usando  $f' = (d-3) \frac{2\mu}{r^{d-2}} = \frac{d-3}{r} (1-f)$  e  $c_B - c_F = 1$ , encontramos

$$c_F = -\frac{1}{2}, \quad c_B = \frac{1}{2}, \quad (2.57)$$

o que implica em

$$\hat{\mathcal{B}} = f^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\mathcal{F}} = f^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.58)$$

Substituindo  $\psi = 0$  em (2.52) e usando o resultado em (2.49) obtemos a equação

$$\frac{(\ln \mathcal{G})''}{(p+1)} + \frac{d-2}{r} \frac{(\ln \mathcal{G})'}{(p+1)} + \frac{(\ln \mathcal{G})'}{(p+1)} (\ln f)' = -\mathcal{S}^2, \quad ,$$

que se for comparada com a equação do dÍlaton (2.50)

$$\frac{\Phi''}{A(D-2)} + \frac{(d-2)}{r} \frac{\Phi'}{A(D-2)} + \frac{\Phi'}{A(D-2)} (\ln f)' = -\mathcal{S}^2, \quad ,$$

justifica fortemente a seguinte igualdade entre  $\mathcal{G}$  e  $\Phi$

$$\mathcal{G} = e^{\frac{(p+1)}{A(D-2)}\Phi}, \quad (2.59)$$

da mesma forma que no caso da  $p$ -brana extrema (2.40). Substituindo esta igualdade na definição de  $\mathcal{S}$ , obtemos

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2(D-2)f} \frac{e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} Q^2}{r^{2(d-2)}}.$$

Com isto, a equação do dÍlaton (2.50) fica

$$\Phi'' + \frac{(d-2)}{r} \Phi' + (\ln f)' \Phi' = -\frac{A}{2f} e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}}. \quad (2.60)$$

Substituindo  $\mathcal{S}^2$  obtido acima na equação (2.48) e usando nesta a equação (2.49), obtemos outra equação para  $\Phi$

$$\frac{\Delta}{A(D-2)} \Phi'^2 - (\ln f)' \Phi' = \frac{A}{2f} e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}}, \quad (2.61)$$

que somada à equação anterior, fornece:

$$\left( e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} \right)'' + \frac{d-2}{r} \left( e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} \right)' = 0, \quad (2.62)$$

cujasolução é do tipo

$$e^{-\frac{2\Delta}{A(D-2)}\Phi} = 1 + \frac{k^{d-3}}{r^{d-3}} \equiv \mathcal{K}. \quad (2.63)$$

A constante  $k^{d-3}$  é determinada através da equação (2.61) usando a função  $f$  (4.8). Disto, encontramos uma equação algébrica de segundo grau para  $k^{d-3}$ , cuja solução é:

$$k^{d-2} = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{\Delta}{2(D-2)(d-3)^2} Q^2}. \quad (2.64)$$



A  $p$ -brana negra é totalmente caracterizada em termos das funções  $f$  e  $\mathcal{K}$  e de dois parâmetros  $Q$  (ou  $h$ ) e  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= f^{\frac{1}{2}} \mathcal{K}^{\frac{d-3}{\Delta}}, \quad C = \mathcal{K}^{-\frac{d-3}{\Delta}}, \quad \mathcal{F} = f^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K}^{\frac{p+1}{\Delta}}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{K}^{\frac{p+1}{\Delta}}, \\ e^{\Phi} &= \mathcal{K}^{A \frac{D-2}{\Delta}}, \quad F_{t\sigma_1 \dots \sigma_p r} = \frac{Q}{|Q|} \sqrt{\frac{2(D-2)}{\Delta}} \sqrt{1 + \frac{2\mu}{k^{d-3}}} (\mathcal{K}^{-1})'. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Note que para  $\mu = 0$ ,  $f = 1$  obtemos o valor dessas funções no caso extremo (2.42). Isto posto, temos a solução da  $p$ -brana negra:

$$ds^2 = \mathcal{K}^{-2\frac{d-3}{\Delta}} (-f dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_p^2) + \mathcal{K}^{2\frac{p+1}{\Delta}} (f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2). \quad (2.66)$$

## 2.5 Quadro de Einstein e o quadro de cordas

As soluções que obtivemos nas seções precedentes são puramente clássicas. O nosso ponto de partida foi a ação (2.1), que consiste no termo canônico de Einstein-Hilbert e o termo cinético de um campo escalar (dílato) e o acoplamento deste com uma  $n$ -forma intensidade de campo. Entretanto, tal ação tem origem no setor bosônico da supergravidade, que por sua vez é a teoria efetiva no limite de baixas energias da teoria de cordas (veja seção 2.7 de [17] e a seção 3.4 de [18]).

No presente trabalho, estamos interessados nas soluções de  $p$ -branas no limite de baixas energias de um tipo particular de teoria de cordas, mas precisamente na teoria das cordas fechadas, que contém a gravitação no seu espectro de oscilações. Tais teorias são a teoria de cordas do tipo IIB/IIA<sup>8</sup> com  $D = 10$ , cuja ação do setor bosônico no limite de baixas energias é dada pela ação da supergravidade em 10 dimensões [9]

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[ e^{-\Phi} (R + 4\partial_a \Phi \partial^a \Phi) - \frac{2e^{2\alpha\Phi}}{n!} F_n^2 \right], \quad (2.67)$$

<sup>8</sup>Estas teorias descrevem o espectro da corda aberta, sendo a teoria IIB é quiral e a IIA é não quiral. Além disso, na teoria IIA, o número  $p$  de dimensões espaciais da brana é par e o da teoria IIB é ímpar. De fato, em nosso trabalho, a questão da quiralidade não tem relevância já que estamos interessados apenas no setor bosônico. Em vista disso, omitiremos a designação IIA/B.

sendo  $R$  o escalar de Ricci,  $\Phi$  o campo de dÍlaton,  $F_n$  a  $n$ -forma intensidade de campo e  $\alpha$  uma constante. Comparando esta ação com a que consideramos para obter as equações de movimento (2.1), vemos que os campos envolvidos são os mesmos. Entretanto, aparece um termo de acoplamento entre o escalar de Ricci e o dÍlaton  $\sim \int d^D x e^{-\Phi} R$ . O que ocorre, é que a métrica na ação da supergravidade está escrita no quadro de cordas, que nada mais é que uma transformação conforme da métrica no quadro de Einstein. Esta última é a que consideramos na ação inicial (2.1). O fator conforme que relaciona os dois quadros é  $e^{\Phi/2}$ .

Seja, portanto,  $g_{ab}$  a métrica no quadro de Einstein e  $g_{ab}^S$  a métrica no quadro de cordas. Elas relacionam-se por

$$g_{ab}^S = e^{\frac{\Phi}{2}} g_{ab} \quad . \quad (2.68)$$

Pode-se mostrar que através de tal transformação conforme a ação da supergravidade (2.67) recai na ação inicial (2.1). Desta forma, podemos traduzir tanto a solução da  $p$ -brana extrema quanto a da negra para o quadro de cordas, tendo assim, soluções genuÍnas do setor bosônico da supergravidade.

Para que obtenhamos as soluções tipo  $p$ -branas no quadro de cordas que aparecem no trabalho pioneiro de Horowitz e Strominger [9], transformaremos a métrica da  $p$ -brana extrema (2.43) e da  $p$ -brana negra (2.66) para o quadro de cordas segundo (2.68) e em seguida faremos uma transformação conveniente de coordenadas. Os detalhes dos cálculos seguem abaixo.

Passar a métrica da  $p$ -brana negra para o quadro de cordas consiste basicamente em multiplicar cada componente por  $\mathcal{K}^{A \frac{D-2}{2\Delta}}$ . Além disso, definindo uma nova coordenada radial  $y$  através da relação

$$y^{d-3} = r^{d-3} + k^{d-3} \quad ,$$

assim como as funções

$$\mathcal{K}_+ = 1 - \frac{a^{d-3}}{y^{d-3}}, \quad \mathcal{K}_- = 1 - \frac{b^{d-3}}{y^{d-3}} \quad ,$$

com  $a = k^{d-3} + 2\mu$  e  $k_- = k$  teremos

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_-^{-1}, \quad f = \mathcal{K}_+ \mathcal{K}_-^{-1} \quad .$$

Estas definições nos permitem escrever a  $p$ -brana negra como

$$ds^2 = -\mathcal{K}_+ \mathcal{K}_-^{2\frac{d-3}{\Delta}-1} dt^2 + \mathcal{K}_-^{2\frac{d-3}{\Delta}} (dx_1^2 + \dots + dx_p^2) + \mathcal{K}_+^{-1} \mathcal{K}_-^{-2\frac{p+1}{\Delta}-\frac{d-5}{d-3}} dy^2 + \mathcal{K}_-^{A^2\frac{D-2}{\Delta(d-3)}} y^2 d\Omega_{d-2}^2 . \quad (2.69)$$

No caso  $D = 10$  com  $A = \frac{3-p}{2}$ , obtemos as  $p$ -branas negras descritas por Horowitz e Strominger [9] e que são um dos ingredientes principais da correspondência AdS/CFT e que serão nosso objeto de estudo:

$$ds^2 = -\frac{\mathcal{K}_+}{\mathcal{K}_-^{\frac{1}{2}}} dt^2 + \mathcal{K}_- (dx_1^2 + \dots + dx_p^2) + \frac{\mathcal{K}_-^{-\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}}}{\mathcal{K}_+} dy^2 + y^2 \mathcal{K}_-^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2 , \quad (2.70)$$

## 2.6 Singularidade e horizonte de eventos

Esta seção é dedicada ao estudo da estrutura causal das  $p$ -branas negras dadas por (2.70). Vamos determinar onde a métrica é singular e onde localizam-se os horizontes de eventos. Para tanto, calcularemos o escalar de Kretschmann  $\mathcal{R}_p(y) = R_{abcd}R^{abcd}$ , que é uma quantidade escalar construída usando-se o tensor de curvatura  $R_{abcd}$ , portanto independente do sistema de coordenadas. Os valores de  $y$  onde este objeto divergir, implica necessariamente na existência de uma singularidade espaço-temporal neste ponto. Vamos sempre considerar o caso em que  $a \geq b$ .

O escalar de Kretschmann para a solução (2.70) é dado por

$$\mathcal{R}_p(y) = \frac{P_n(y)}{\left[1 - \left(\frac{k_-}{y}\right)^{7-p}\right]^{\delta_p}}, \quad (2.71)$$

sendo que

$$\delta_p = \begin{cases} \frac{1}{7-p} [(1+p) + 2(5-p)] \\ \text{se } p \text{ for par.} \\ \frac{30p}{40}(p-1)(p-3) - \frac{p}{6}(p-1)(p-5) + \frac{8p}{35}(p-3)(p-5) \\ \text{se } p \text{ for ímpar,} \end{cases} \quad (2.72)$$

e  $P_n(y)$  é um polinômio cujo grau  $n$  é menor que a potência do denominador para qualquer valor de  $p < 7$ . Observando o denominador de  $\mathcal{R}_p(y)$ , vemos que este *diverge* para todo valor de  $p$  no ponto  $y = b$ , indicando uma singularidade genuína neste ponto. Entretanto,  $\mathcal{R}_p(y)$  é uma constante em  $y = a$ , apesar de nesse ponto a componente  $g_{yy}$  da métrica divergir e  $g_{tt}$  ser zero. Disto, concluímos tal divergência é apenas uma patologia do sistema de coordenadas.

Analogamente ao caso dos buracos negros esféricamente simétricos, a divergência da métrica em  $y = a$  dá um indicativo de que esta hipersuperfície é um horizonte de eventos. Além disso, nos casos conhecidos de buracos negros com simetria esférica, o horizonte de eventos coincide com a superfície de *redshift* infinito. Vamos procurar por tais superfícies usando o caso do buraco negro de Schwarzschild como auxiliar.

As superfícies de *redshift* infinito, para uma dada métrica, podem ser encontradas usando a seguinte equação [19]

$$v = v_0 \sqrt{\frac{g_{00}(x_{fonte}^\mu)}{g_{00}(x^\mu)}}, \quad (2.73)$$

que relaciona a frequência medida  $v$  por um observador em repouso afastado da fonte, cuja frequência de emissão, digamos de pulsos luminosos, é  $v_0$ . Para que tenhamos uma superfície de *redshift* infinito, a frequência  $v$  deve ser zero, isto é, que a frequência emitida  $v_0$  foi infinitamente atrasada devido a efeitos gravitacionais. Um exemplo disso é um observador em repouso medindo a frequência emitida por algo que se aproxima do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild, emitindo periodicamente um pulso luminoso de frequência  $v_0$ . Em um dado momento, tal observador levará um tempo infinito para receber o pulso luminoso emitido, ele nunca saberá se o aparato atravessou o horizonte. É fácil perceber, que da equação (2.73), a

igualdade

$$g_{00}(x_{fonte}^\mu) = 0, \quad (2.74)$$

nos diz a localização de superfícies de redshift infinito. Usando a solução de Schwarzschild como exemplo, a superfície de *redshift* infinito aparece como

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0, \quad (2.75)$$

isto é,  $r = 2M$  define uma superfície em que o *redshift* da radiação emitida nesta superfície vai ao infinito. O que significa que um observador no infinito espacial nunca detectará tal radiação. É importante observarmos, que o fato de o *redshift* da radiação ir ao infinito não caracteriza um horizonte de eventos: corpos materiais ainda podem atravessar a superfície de *redshift* infinito a partir de qualquer lado da mesma. No caso de um horizonte de eventos, as geodésicas das partículas físicas só podem seguir uma direção para atravessar tal superfície, sem em nenhuma hipótese, pelo menos classicamente, poder voltar. É o que se chama de membrana de mão única.

Usando a expressão (2.73) na solução da  $p$ -brana negra (2.70), encontramos que a superfície onde  $v \rightarrow 0$  ocorre quando

$$y = a, \forall p, \quad (2.76)$$

o que a caracteriza como uma superfície de *redshift* infinito.

Vamos agora procurar por membranas de mão única, que são hipersuperfícies cujo vetor normal  $\eta_a$  tem norma nula, ou seja, é um vetor nulo. As membranas de mão únicas representam a região crítica onde os papéis de  $t$  como coordenada temporal e  $y$  como coordenada espacial invertem-se.

Seja então uma hipersuperfície dada pela equação  $u(x) = \text{constante}$ . A definição de vetor normal  $\eta_a$  a uma superfície  $u(x^a)$  é

$$\eta_a = \frac{\partial u(x^a)}{\partial x^a},$$

portanto em nosso caso teremos<sup>9</sup>

$$\eta_a = (0, 1, 0, 0),$$

---

<sup>9</sup>Tomamos aqui as coordenadas  $x^i$  da brana e as coordenadas angulares  $\theta_\alpha$  do bulk como constantes.

e da condição de que este vetor normal seja nulo,

$$g^{ab}\eta_a\eta_b = 0,$$

vem que

$$\boxed{g^{yy} = 0 \quad \text{se} \quad y = a} \quad (2.77)$$

A superfície  $y = a$  possui duas características interessantes: é uma superfície de *redshift* infinito e também é uma membrana de mão única e como não há divergências no escalar de Kretschmann esta superfície é um horizonte de eventos. Concluimos que existe uma singularidade real em  $y = b$  e que  $y = a$  é uma membrana de mão única não singular e também uma superfície de *redshift* infinito. A configuração  $p \leq 6$  com  $a > b$  pode ser interpretada como um buraco negro em 10 dimensões.

Dessas considerações, vamos tratar de perturbações escalares na solução (2.70) usando as técnicas comumente utilizadas no caso de buracos negros da Relatividade Geral.

No caso das  $p$ -branas extremas, isto é, quando  $a = b$  vemos que a singularidade física em  $y = b$  e o horizonte de eventos coincidem. Nesse caso temos uma singularidade nua em  $y = a$  [20]. A única exceção é a 3-brana extrema, que continua tendo um horizonte de eventos em  $y = a$ , mas agora a singularidade está em  $y = 0$ .

Quando tomamos o limite próximo do horizonte de eventos da métrica das  $p$ -branas negras, isto é, na região em que  $y \rightarrow a$ , esta métrica reduz-se ao produto  $AdS_{p+2} \times S^{8-p}$  no caso extremo e, para  $a > b$  obtem-se o produto  $AdS_{p+2} \times \mathcal{M}_{8-p}$ , sendo  $\mathcal{M}_{8-p}$  solução das equações de Einstein [21]. Esse limite próximo do horizonte é bastante similar ao que aparece no caso do buraco negro de Reissner-Nordström extremo. Neste caso temos o chamado universo de Bertotti-Robinson, que é o produto  $AdS_2 \times S^2$  [17].

É importante ressaltarmos como é a geometria nas vizinhanças do horizonte de eventos da  $p$ -brana, pois é nesse regime que se dá a correspondência AdS/CFT. A grosso modo, são esses espaços-tempos que realizam o lado gravitacional da correspondência. Todos eles são originários da métrica da  $p$ -brana negra [5]. Este ponto será abordado novamente no capítulo 4.

## Capítulo 3

# Perturbações Lineares em Relatividade Geral e Modos Quasinormais

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão da teoria de perturbações lineares em espaços-tempos curvos, em particular aqueles que descrevem buracos negros. O objetivo principal é o de estudar propriedades clássicas que caracterizam estados na vizinhança do equilíbrio desses espaços-tempos, através da propagação de campos teste nessa geometria.

Além disso, daremos uma introdução aos chamados modos quasinormais e sua relação com a estabilidade de buracos negros, bem como sua interpretação em termos da correspondência AdS/CFT. Definiremos os modos quasinormais usando a técnica de funções de Green aplicadas a equações diferenciais parciais. Este caminho será adotado devido à imediata aplicação desta definição para o caso do estudo de campos testes (escalar, eletromagnético, espinorial) evoluindo em uma geometria de fundo e para flutuações em torno do equilíbrio da própria geometria.

Apesar de estarmos interessados principalmente em aspectos da propagação de campos escalares na geometria das  $p$ -branas negras, é instrutivo gastarmos algum espaço descrevendo as flutuações da própria geometria no regime linear, já que estas obedecem o mesmo tipo de equação que aquelas que obtemos quando estudamos a dinâmica de campos teste.

## 3.1 Relatividade Geral linearizada

A teoria da Relatividade Geral é uma teoria de gravitação que requer que o espaço-tempo onde se desenvolvem os eventos físicos seja definido por uma variedade diferenciável que possua uma métrica lorentiziana. Além disso, é necessário que as equações da relatividade especial sejam válidas em um sistema inercial local.

A dinâmica do espaço-tempo, descrita pela relatividade geral, é vinculada ao seu conteúdo de massa e energia. Matematicamente, esta relação é representada pelas equações de Einstein:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad , \quad (3.1)$$

sendo que  $G_{ab}$  é o tensor de Einstein,  $g_{ab}$  a métrica do espaço-tempo,  $\Lambda$  é a constante cosmológica e  $T_{ab}$  é o tensor energia-momento.

A equação tensorial (3.1) em 4 dimensões é um sistema de 10 equações diferenciais parciais de segunda ordem não-lineares acopladas para as componentes da métrica  $g_{ab}$ . Devido a esta complexidade, encontrar uma solução geral para este sistema é ainda um problema em aberto. Entretanto, para sistemas dotados de uma certa dose de simetria, e outras hipóteses simplificadoras, tais como estacionaridade, é possível resolver as equações de Einstein analiticamente. Podemos citar a solução de Schwarzschild, que é a solução para um corpo massivo esféricamente simétrico, e a solução de Reissner-Nordström no caso do mesmo sistema com carga elétrica.

Em contrapartida, na maior parte dos casos não é possível resolver (3.1) analiticamente. Como na maioria dos ramos da física devemos utilizar técnicas aproximativas, onde destacamos a teoria de perturbações. No caso da Relatividade Geral, isto significa aplicar um pequeno deslocamento do equilíbrio a uma solução exata conhecida, desde que esta não seja substancialmente modificada. Mais precisamente, se  $\hat{g}_{ab}$  é um tensor métrico que é solução exata das equações de Einstein e  $h_{ab}$  uma pequena perturbação, então a solução perturbada será dada por

$$g_{ab} = \hat{g}_{ab} + h_{ab} \quad . \quad (3.2)$$

Por simplicidade, vamos considerar como exemplo a solução de Schwarzschild. Substituindo a decomposição (3.2) nas equações de Einstein (3.1) e desprezando os termos de segunda ordem



nas componentes de  $h_{ab}$ , obtemos as equações que governam as perturbações  $h_{ab}$  na métrica  $\hat{g}_{ab}$ . Estas equações são simplificadas através de uma decomposição em harmônicos esféricos, fornecendo duas classes distintas de soluções: as soluções axiais e as soluções polares<sup>1</sup> [22]. Estas duas classes de soluções levam a equações diferenciais desacopladas, respectivamente:

$$-\frac{\partial^2 \Psi_{ax}}{\partial t^2} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( f(r) \frac{\partial \Psi_{ax}}{\partial r} \right) = V_{ax} \Psi_{ax} \quad , \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial^2 \Psi_{pol}}{\partial t^2} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( f(r) \frac{\partial \Psi_{pol}}{\partial r} \right) = V_{pol} \Psi_{pol} \quad , \quad (3.4)$$

onde os potenciais efetivos são dados por

$$V_{ax}(r) = f(r) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \quad , \quad (3.5)$$

$$V_{pol}(r) = \frac{2f(r)}{r^3} \frac{9M^3 + 3\lambda^2 M r^2 + \lambda^2 r^3 (1 + \lambda) + 9M^2 \lambda}{(3M + \lambda r)^2} \quad , \quad (3.6)$$

sendo  $M$  a massa do buraco negro,  $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$  e  $\lambda = \frac{1}{2} [l(l+1) - 2]$ . O potencial das perturbações gravitacionais axiais  $V_{ax}$  é também conhecido como potencial de Regge-Wheeler, que foi obtido no trabalho pioneiro de Regge e Wheeler [1] que visava estudar a estabilidade do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild contra pequenos deslocamentos do equilíbrio. Este estudo foi completado por Zerilli [3] que estudou as perturbações polares obtendo o potencial gravitacional polar  $V_{pol}$  chamado de potencial de Zerilli.

Consideraremos agora a evolução de um campo de teste escalar se propagando no espaço-tempo dado pela solução de Schwarzschild. Como já mencionamos, o trabalho aqui desenvolvido se dará no âmbito do regime linear possibilitando-nos tratar o campo escalar como uma perturbação evoluindo em um fundo fixo, e a retroação (reação de radiação) deste campo na geometria desprezada.

Associado a este campo, temos o seu tensor energia-momento que está presente nas equações de movimento. Não levar em conta a retroação deste campo significa que podemos desprezar o seu respectivo tensor energia-momento. Logo, a métrica é mantida fixa, e somente as variáveis

<sup>1</sup>Esta nomenclatura deve-se ao modo como as perturbações se transformam por uma inversão espacial na coordenada azimutal  $\phi$ : as axiais se transformam como  $(-1)^{l+1}$  e as polares como  $(-1)^l$ , sendo  $l$  o número multipolar.

de campo possuem uma dinâmica descrita pelas equações de movimento lineares. No caso do campo escalar sem massa basta considerar a equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left( \sqrt{-g} g^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial x^b} \right) = 0 \quad ,$$

que para o buraco negro de Schwarzschild se reduz a

$$-\frac{\partial^2 \Psi_l}{\partial t^2} + f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( f(r) \frac{\partial \Psi_l}{\partial r} \right) = V_{esc} \Psi_l \quad , \quad (3.7)$$

cujo potencial efetivo  $V_{esc}$  é dado por

$$V_{esc}(r) = f(r) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] \quad .$$

Temos então para cada modo  $l$ , uma equação parcial linear hiperbólica para a função  $\Psi_l(r, t)$  que descreve a dinâmica da componente  $l$  do campo escalar  $\Psi(r, t)$ . No decorrer deste trabalho, obteremos a equação que descreve a perturbação escalar na geometria das  $p$ -branas negras introduzidas no capítulo anterior, de maneira análoga ao que foi feito aqui.

## 3.2 Modos quasinormais

Os modos quasinormais (mqn's) são soluções das equações de perturbação, que possuem frequências de oscilação características complexas e satisfazem condições de contorno específicas. Apesar de serem definidos no contexto da teoria de perturbações de buracos negros, os mqn's se aplicam a outros sistemas físicos dissipativos. Podemos exemplificar isto através de um sistema formado por uma corda vibrando acoplada ao meio mecânico que a cerca, transmitindo energia para esse meio. As frequências características dessa corda decaem com o tempo devido à dissipação com o meio.

Em Relatividade Geral, estas oscilações amortecidas foram observadas por Vishveshwara [2] quando estudava a evolução de um pacote de ondas gaussianas na geometria de Schwarzschild. Tal evolução consiste basicamente de três etapas, a primeira é um rápido pulso inicial, precedido por oscilações amortecidas, denominadas modos quasinormais e, por fim, as oscilações amortecidas dão lugar a um decaimento tipo lei de potência, como mostrado na Figura 3.1.

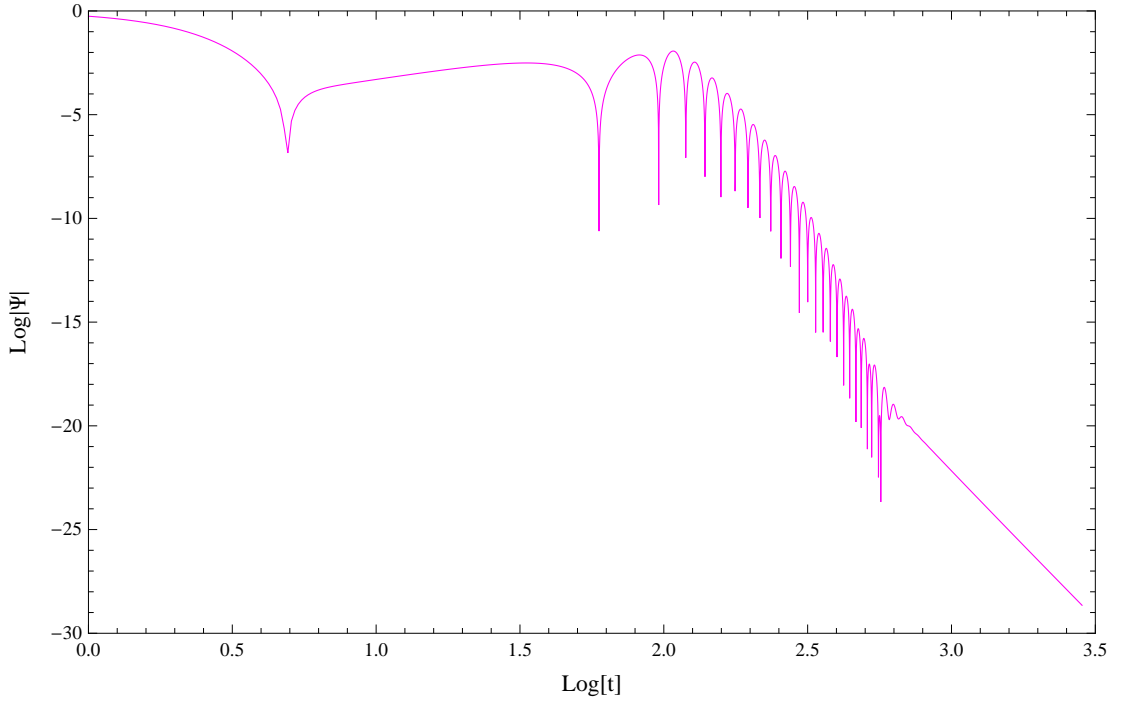


Figura 3.1: Decaimento da perturbação gravitacional axial nas proximidades do buraco negro de Schwarzschild, com  $M = 1$  e  $l = 2$ .

O estágio intermediário, dominado pela oscilação quasinormal, possui frequências que dependem apenas dos parâmetros que caracterizam o buraco negro, sendo totalmente independente da perturbação inicial [23] [24] [25]. Além das condições iniciais, devemos impor condições de contorno adequadas para a obtenção dos mqn's. Para espaços assintoticamente Minkowski como o buraco negro de Schwarzschild ou as  $p$ -branas negras, o potencial  $V(r)$  é positivo e se anula tanto no infinito espacial, quanto no horizonte de eventos. Portanto, a solução nessas regiões será uma combinação de ondas planas

$$\Psi(r_* \rightarrow \pm\infty) \sim e^{\pm i\omega r_*}, \quad (3.8)$$

sendo  $r_*$  a chamada coordenada tartaruga que é uma função da coordenada radial  $r$  e que a mapeia do intervalo  $(2M, \infty)$  em  $(-\infty, +\infty)$ . Disto, temos que os mqn's são soluções das equações de perturbação cujas frequências são complexas e que descrevem ondas apenas entrando no horizonte de eventos e ondas puramente emergindo no infinito. Isto se justifica pelo fato de

estarmos interessados na propagação de campos na região fora do horizonte de eventos, e não desejamos que onda provenientes do infinito continuem a perturbar o buraco negro [24].

A questão da estabilidade das soluções define o sinal da parte imaginária das frequências quasinormais  $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$ . A perturbação inicial deve decair de maneira amortecida, portanto para  $t \rightarrow \infty$ , devemos ter  $e^{-i\omega t} = e^{-i\Re(\omega)t} e^{\Im(\omega)t} \rightarrow 0$ , que somente será possível se  $\Im(\omega) < 0$ .

A motivação inicial para o estudo dos mqn's é astrofísica. Testar a estabilidade das soluções frente pequenas oscilações em torno do equilíbrio e obter seu espectro para assim conhecer os parâmetros fundamentais da solução, tais como massa, carga, momento angular no caso de buracos negros ou raio, massa no caso de estrelas [23]. Entretanto, recentemente tem havido grande interesse nas frequências quasinormais no âmbito da correspondência AdS/CFT. Segundo essa conjectura, a parte imaginária da frequência quasinormal fundamental é o tempo de termalização de uma teoria de campos conforme na fronteira do espaço-tempo AdS, no qual se dá a correspondência. No próximo capítulo estudaremos em mais detalhes este ponto.

Formalmente, os mqn's podem ser definidos como os pólos da função de Green associada as equações de perturbação. Por questão de simplicidade, vamos tratar da propagação de um campo escalar sem massa na geometria de Schwarzschild com  $d = 4$ . Tal campo obedece a equação de Klein-Gordon,

$$\mathcal{D}\Psi(r_*, t) \equiv \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V(r_*) \right] \Psi(r_*, t) = 0 \quad .$$

Seguindo o trabalho de Ching *et al* [26], a evolução temporal do campo  $\Psi(r_*, t)$  descrito pela equação acima pode ser escrita, para  $t > 0$ , como

$$\Psi(r_*, t) = \int dy G(r_*, y; t) \frac{\partial \Psi(y, 0)}{\partial t} + \int dy \frac{\partial G(r_*, y; t)}{\partial t} \Psi(y, 0) \quad , \quad (3.9)$$

sendo  $G(r_*, y; t)$  a função de Green retardada definida por

$$\mathcal{D}G(r_*, y; t) = \delta(t) \delta(r_* - y) \quad ,$$

e pela condição inicial  $G(r_*, y; t) = 0$  para  $t < 0$ . A transformada de Fourier de  $G(r_*, y; t)$  é dada

por

$$\tilde{G}(r_*, t) = \int_0^\infty dt G(r_*, y; t) e^{i\omega t} , \quad (3.10)$$

e satisfaz a equação

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{G} \equiv \left[ -\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V(r_*) \right] \tilde{G} = \delta(r_* - y) .$$

A função de Green  $\tilde{G}$  pode ser expressa em termos de duas soluções linearmente independentes da equação homogênea  $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$ . Sejam tais soluções denotadas por  $f(r_*, \omega)$  e  $g(r_*, \omega)$ , sendo que  $\tilde{\mathcal{D}}f(r_*, \omega) = \tilde{\mathcal{D}}g(r_*, \omega) = 0$ . A função  $f(r_*, \omega)$  é tal que satisfaz a condição de onda entrando (*ingoing*) no horizonte de eventos e  $g(r_*, \omega)$  as condições de ondas saindo (*outgoing*) no infinito.

Sendo assim, a função de Green  $\tilde{G}$  é escrita como

$$\tilde{G}(r_*, \omega) = \begin{cases} \frac{f(r_*, \omega)g(y, \omega)}{\mathcal{W}(\omega)} & \text{para } r_* < y \\ \frac{f(r_*, y)g(r_*, \omega)}{\mathcal{W}(\omega)} & \text{para } r_* > y \end{cases} ,$$

sendo  $\mathcal{W}(\omega) = g \frac{df}{dr_*} - f \frac{dg}{dr_*}$  o wronskiano dessas duas soluções.

O wronskiano presente na equação (3.2) pode conter zeros, o que implica que as soluções  $f(r_*, \omega)$  e  $g(r_*, \omega)$  correspondentes são linearmente dependentes. De fato, pela definição do wronskiano, estas soluções são proporcionais entre si, consequentemente satisfazem ambas as condições de contorno. Estas soluções são, por definição [26], os mqn's cujo espectro de frequências são identificados como os pólos da função de Green.

### 3.3 O método WKB

A aplicação do método WKB (Wentzer, Kramers, Brillouin) ao problema de encontrar as frequências quasinormais foi realizada por Schutz e Will [27] e mais tarde melhorado por Iyer e Will [28]. Mais recentemente Konoplya [29] estendeu a técnica WKB até a sexta ordem da aproximação da função de onda em torno do pico do potencial na região próxima do horizonte de eventos. Neste trabalho usaremos o método WKB de sexta ordem desenvolvido por Konoplya.

A motivação para usar a técnica WKB é a similaridade entre as equações que descrevem as perturbações lineares em buracos negros e a equação de Schrödinger para uma barreira de potencial. Em ambos os casos temos equações do tipo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi = 0 \quad .$$

No caso dos buracos negros,  $\psi$  representa a parte radial do campo perturbativo, sendo que consideramos a dependência temporal do tipo  $e^{i\omega t}$ . A coordenada  $x$  é a coordenada tartaruga  $r_*$  cujo valor no horizonte de eventos é  $-\infty$  e  $+\infty$  no infinito espacial. A função  $Q(x) = \omega^2 + V(x)$  é finita em  $x = \pm\infty$ , mas não necessariamente a mesma, e possui um máximo nas vizinhanças do horizonte de eventos. Na Mecânica Quântica temos  $Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]$ . Desta semelhança, vemos que podemos usar a técnica WKB para calcular as frequências  $\omega$  do problema de perturbações em buracos negros.

Usando a extensão de Konoplya, a fórmula WKB que determina os modos quasinormais é dada por

$$i \frac{\omega^2 - V_0}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Pi_j = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad , \quad (3.11)$$

sendo  $V_0'$  a derivada em relação à  $r_*$  do potencial no pico próximo do horizonte,  $\omega$  a frequência quasinormal,  $n$  o valor de sobreton ( $n = 0$  dá o modo fundamental de oscilação e assim por diante). Os termos  $\Pi_j$  dependem do valor do potencial efetivo e suas derivadas (até a ordem  $2j$ ). Esta fórmula generaliza aquelas obtidas por Schutz e Will ( $\Pi_2$ ) e as de Iyer e Will ( $\Pi_2 + \Pi_3$ ). A forma explícita das correções  $\Pi_j$  é dada no Apêndice A.

Usaremos a fórmula (3.11) em nosso estudo das frequências quasinormais devido à uma perturbação escalar no espaço-tempo descrito pelas  $p$ -branas. Atentaremos para uma região de parâmetros em que o potencial efetivo possua as características necessárias para o uso dessa técnica.

### 3.4 Integração característica

Este método de integração usa o sistema de coordenadas nulas

$$u = t - r_*,$$

$$v = t + r_*,$$

afim de estudar a evolução da perturbação  $\Psi$  que obedece uma equação do tipo

$$-\frac{\partial^2 \Psi_L}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi_L}{\partial r_*^2} + V_L(r_*)\Psi_L = 0. \quad (3.12)$$

Na integração característica, também chamada de problema de condições iniciais características [30], especificam-se as condições iniciais do campo em hipersuperfícies nulas. Um esquema específico é o problema das duplas coordenadas nulas, que consiste em escrever a equação de movimento (3.12) em termos das coordenadas nulas  $u$  e  $v$ . Com isso a equação de movimento fica

$$\frac{\partial^2 \Psi(u, v)}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}V(r(u, v))\Psi(u, v). \quad (3.13)$$

Desta forma, especificamos o campo na fronteira de um ângulo delimitado pelas semi-retas  $u = u_0 (v \geq v_0)$  e  $v = v_0 (u \geq u_0)$ . O próximo passo é discretizar o campo  $\Psi(u, v)$  em termos de pontos no plano  $(u, v)$ . O esquema será o que está ilustrado na figura (3.2).

Vemos nesta figura que o valor do campo  $\Psi$  no ponto  $N$  depende apenas do valor desse nos pontos  $S$ ,  $E$  e  $W$ . Dado um conjunto de condições iniciais nas retas  $u = 0$  e  $v = 0$ , encontra-se o valor de  $\Psi$  dentro de um ângulo formado por estas retas. Mais precisamente, o valor de  $\Psi(N)$  é dado por [30]

$$\Psi(N) = \Psi(E) + \Psi(W) - \Psi(S) - \frac{V(S)\Delta u \Delta v}{8} [\Psi(E) + \Psi(W)] + O(\Delta^4). \quad (3.14)$$

Usando esta discretização, o algoritmo básico consiste em iterar a região de interesse, e a partir de três pontos conhecidos, calcula-se o quarto. Feito isso, tem-se a evolução de  $\Psi$  para tempos arbitrários, de forma que é possível encontrar a região de oscilação quasinormal e fitar a frequência quasinormal fundamental. O código numérico utilizado neste trabalho foi desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa e foi extensivamente discutido na Tese de C. Molina [30] e aplicado em diversos trabalhos [31] [32] [33] [34].

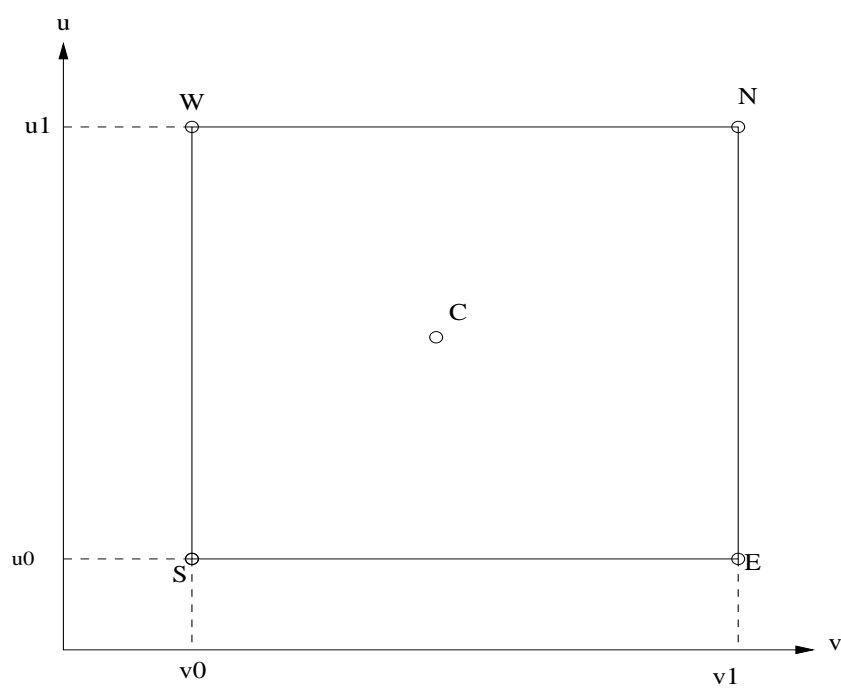


Figura 3.2: Região retangular no plano  $(u, v)$  delimitada pelos pontos  $N$ ,  $S$ ,  $E$ ,  $W$  e  $C$ .



## Capítulo 4

# Interpretação dos MQN's na Correspondência AdS/CFT

Neste capítulo faremos uma breve revisão acerca das origens da correspondência AdS/CFT. Daremos ênfase aos aspectos que consideramos importantes para o presente trabalho. Em especial à interpretação das frequências quasinormais em termos dessa correspondência. Apresentaremos qual o papel desempenhado pelas  $p$ -branas nesse contexto e a prescrição de Son-Starinets para a obtenção das funções de Green, cujos pólos são interpretados como as frequências quasinormais calculadas no *bulk*. Não iremos nos aprofundar nesse tema, apenas inserir o presente trabalho no contexto da correspondência calibre/gravitação. Para mais detalhes, o leitor é convidado a consultar as excelentes revisões de Ahorony *et al* [20] e Klebanov [21].

### 4.1 Origens da correspondência

A primeira realização da correspondência AdS/CFT, ou correspondência calibre/gravitação para usar o termo mais abrangente, é devida ao trabalho pioneiro de Juan Maldacena [5]. Mostrou-se a correspondência entre uma teoria de cordas do tipo IIB no espaço-tempo  $AdS_5 \times S^5$  e a teoria supersimétrica de Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$ .

A idéia principal da correspondência calibre/gravitação é, pelo menos em sua origem, a

descrição da teoria de cordas através de teorias de calibre. A teoria de cordas teve sua origem na década de 1970 como uma tentativa de se compreender a interação nuclear forte. Contudo, devido ao surgimento da cromodinâmica quântica, que é até hoje a descrição padrão da interação forte, a teoria de cordas perdeu apelo nessa área. Com isso, o tema dominante na área de cordas passou a ser a unificação das forças fundamentais da física em uma única descrição, já que a teoria de cordas, contém a Relatividade Geral em seu espectro. Portanto, a teoria de cordas pode ser tomada como uma descrição para a gravidade quântica.

Com o advento da correspondência calibre/gravitação, pode-se dizer que a teoria de cordas ganhou uma nova aplicação além do escopo da unificação das forças, que consiste em compreender fenômenos inerentes à teorias de calibre no regime em que os métodos perturbativos perdem a validade.

Apesar do imenso sucesso da cromodinâmica quântica em detrimento da teoria de cordas na descrição da interação forte, ainda restava a questão de como a ação de Yang-Mills poderia dar uma descrição de cordas no limite em que o acoplamento é forte. A cromodinâmica quântica descreve um méson como o estado ligado formado por um par quark e anti-quark, cuja interação se dá através de glúons. As linhas de campo de tal interação formam um tubo de fluxo, em cujas extremidades se encontram o quark/anti-quark. Este tubo de fluxo pode ser encarado com um objeto fundamental, dando origem a interpretação do méson como sendo uma corda com uma dada tensão. Sendo assim, vemos que deve haver uma relação entre as cordas (tubo de fluxo) e a ação de Yang-Mills.

O trabalho de 't Hooft [35] lançou mais luz sobre esta questão. Nesse trabalho é sugerida uma relação entre teorias de calibre no limite de  $N$  (número de cores) muito grande e a teoria de cordas. Foi mostrado que a expansão perturbativa da teoria de calibre se organiza da mesma forma que na teoria de cordas também no limite perturbativo: soma de diagramas planares que dependem do gênero  $g$ . Esta semelhança entre as duas expansões perturbativas é outro indicativo da relação entre teorias de cordas e pelo menos algumas teorias de calibre.

A correspondência entre teorias de calibre e teorias de cordas ficou mais evidenciada a partir da descoberta das  $D$ -branas por Polchinski [36]. As  $D$ -branas são objetos estendidos,

que generalizam o conceito de corda. Estes objetos aparecem quando impomos condições de contorno de Dirichlet ao movimento das pontas da corda fundamental na folha mundo. Na teoria das  $D$ -branas os campos de calibre estão confinados nestas superfícies enquanto no infinito espacial temos o gráviton [17]. Mais precisamente, temos uma teoria supersimétrica de Yang-Mills definida sobre as  $D$ -branas e cordas fechadas (grávitons) desacopladas sobre o espaço-tempo de Minkowski no infinito espacial, isto é, muito longe das  $D$ -branas.

Por outro lado, existe uma outra classe de objetos estendidos chamados de  $p$ -branas negras, que aparecem como soluções clássicas do setor bosônico de um dos limites da teoria de cordas: a teoria da supergravidade em 10 dimensões, como foi extensivamente discutido no capítulo 2 desta tese. Nessa teoria as  $p$ -branas negras são fontes do campo gravitacional e, para certos valores de  $p$ , que é o número de dimensões espaciais da brana, apresentam horizonte de eventos. Deste modo, é possível tomar as  $p$ -branas como buracos negros em dimensões mais altas. Então, no limite de baixas energia da teoria de cordas considera-se a solução de  $p$ -branas como uma descrição de um conjunto de cordas abertas vivendo em um espaço-tempo AdS próxima do horizonte de eventos e um conjunto de cordas abertas na infinito espacial. Nesse limite de baixas energias vale a descrição em termos da supergravidade.

Vemos que ambas as descrições, em termos de  $D$ -branas ou  $p$ -branas, dão origem a modelos desacoplados. Ambos apresentam cordas fechadas vivendo em um espaço-tempo de Minkowski no infinito espacial. Entretanto temos situações diferentes na região próxima: nas  $D$ -branas temos a teoria de Yang-Mills supersimétrica enquanto que nas  $p$ -branas negras temos cordas fechadas vivendo um espaço AdS. É exatamente neste ponto que Maldacena conjecturou a correspondência entre os modelos na região próxima dos dois objetos: a teoria de Yang-Mills na descrição em termos de  $D$ -branas é equivalente à uma teoria de cordas em AdS [5].

A relevância da correspondência está no mapeamento da teoria de Yang-Mills no regime de acoplamento forte onde os métodos perturbativos perdem a validade, com o limite de baixas energias da supergravidade em 10-dimensões, onde existem técnicas bem estabelecidas e nesse limite puramente clássicas. A correspondência AdS/CFT também pode ser pensada como uma realização do princípio holográfico [37], já que a região onde está definida a teoria de calibre

tem dimensão  $(d - 1)$  enquanto os grávitons estão em um espaço de dimensão  $d$ , comumente chamado de *bulk*. Alternativamente podemos dizer que a informação dos campos que vivem no espaço de  $d$  dimensões está codificada na sua borda, cuja dimensão é  $(d - 1)$ .

## 4.2 Um pouco do dicionário AdS/CFT

Segue abaixo uma breve revisão do exemplo original da correspondência AdS/CFT proposto por Maldacena [5]. As informações contidas nesta seção são baseadas na revisão de Son *et al* [13].

Este exemplo, trata da correspondência entre a teoria de cordas do tipo *IIB* no espaço-tempo  $AdS_5 \times S^5$  e a teoria supersimétrica de Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$ . A teoria de cordas do tipo *IIB* possui um espectro de oscilações que contém um número finito de excitações sem massa, tais como o dÍlaton e o gráviton e, um número infinito de excitações massivas. Essa teoria é caracterizada fundamentalmente por dois parâmetros, que são o comprimento da corda  $l_s$  e a constante de acoplamento  $g_s$ , que mede o quão intensa é a interação entre as cordas.

O espaço-tempo onde está definida a teoria de cordas tem 10 dimensões dado pela métrica da 3-brana extrema no limite próximo do horizonte:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left( -dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i + dz^2 \right) + R^2 d\Omega_5^2 \quad . \quad (4.1)$$

Esta métrica é obtida da solução da  $p$ -brana extrema (2.43) no limte em que  $y \rightarrow a$  e após a mudança de coordenadas  $y = R^2/z$ . Tem-se, portanto, uma solução que representa o produto de uma esfera em cinco dimensões  $S^5$  e o espaço AdS também em cinco dimensões com as coordenadas  $t, z, x^i$ . A coordenada  $z$  mapeia a fronteira AdS ( $y \rightarrow \infty$ ) em  $z = 0$ . Além do comprimento da corda e a constante de acoplamento, o espaço AdS acrescenta um novo parâmetro na descrição: o raio  $R$  do espaço AdS. Desta forma, temos dois parâmetros adimensionais:  $g_s$  e a razão  $R/l_s$ .

Com relação à teoria de calibre, esta também possui dois parâmetros, que são o número de cores  $N$  e o acoplamento  $g$ . Como foi mostrado por 't Hooft [35], quando  $N$  é grande,

a constante de 't Hooft  $\lambda = g^2 N$  torna-se o parâmetro fundamental que controla a teoria no regime perturbativo.

As primeiras duas entradas do dicionário AdS/CFT são referentes ao mapeamento dos parâmetros fundamentais  $g_s$ ,  $l_s$  e  $R$  pelo lado da teoria de cordas com os da teoria de calibre  $g$  e  $N$  [13]

$$\boxed{g^2 = 4\pi g_s, \quad g^2 N = \frac{R^4}{l_s^4}}. \quad (4.2)$$

Desta forma, podemos observar a grande habilidade da correspondência proposta por Maldacena: trabalhar com o limite de acoplamento forte na teoria de calibre utilizando-se o limite de baixas energias da teoria de cordas. A segunda relação de (4.2) estabelece que para  $\lambda = g^2 N$  fixo o raio AdS  $R$  é muito maior que o comprimento da corda  $l_s$ . Neste limite é possível mostrar que a teoria de cordas reduz-se à supergravidade em 10 dimensões. Em outras palavras, no limite de fraco acoplamento das cordas  $g_s \ll 1$  e o raio AdS muito maior que o comprimento da corda  $R \gg l_s$ , a teoria de cordas se reduz à supergravidade clássica [13].

Talvez a mais importante relação que a correspondência AdS/CFT estabelece seja aquela entre operadores da teoria de calibre e campos clássico da supergravidade. Os primeiros trabalhos a realizar matematicamente tal mapeamento formam os de Gubser *et al* [38] e Witten [39]. Seja um operador  $O$  da teoria de calibre e um campo escalar  $\Phi$  da supergravidade. Então a relação GKP-W (*Gubser, Klebanov, Polyakov-Witten*) estabelece

$$Z_{4D}[J] = e^{iS[\Phi_{cl}]}. \quad (4.3)$$

O lado esquerdo desta relação temos a função de partição da teoria de campos, cujo termo de fonte é  $J$ . A ação  $S[\Phi_{cl}]$  é a ação clássica da supergravidade, calculada para o campo  $\Phi_{cl}$  que é solução das equações de movimento como condição de contorno de que este campo assuma o valor  $J$  na fronteira AdS  $z = 0$ . Desta forma, o valor do campo na fronteira AdS é a fonte clássica da função geradora das funções de Green da teoria de campos definida na borda AdS.

Para o cálculo das funções de Green, basta tomarmos derivadas funcionais de  $S[\Phi_{cl}]$  em relação a  $J$  e, por fim, fazer  $J = 0$ . Como exemplo, a função de dois pontos da teoria de campos

pode ser obtida por

$$G(x-y) = -i\langle T O(x) O(y) \rangle = -\frac{\delta^2 S[\Phi_{cl}]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{\Phi_{cl}(z=0)=J}. \quad (4.4)$$

A grosso modo, o mapeamento entre operadores da teoria de calibre e campos clássicos se dá da seguinte maneira [13]: o campo dilatônico  $\Phi$  corresponde ao operador primário  $O$ , o campo de calibre  $A_a$  definido no bulk corresponde à corrente conservada  $J_a$  na teoria de campos e o tensor métrico  $g_{ab}$  corresponde ao tensor energia-momento  $T_{ab}$ , sendo que  $g_{ab}$  satisfaz as equações de Einstein em 5 dimensões e tem comportamento assintótico  $z = 0$  dado pela métrica (4.1).

### 4.3 Receita de Son-Starinets

Apesar do sucesso da fórmula  $GKP - W$ , esta é escrita para um espaço com assinatura euclidiana, isto é, com tempo imaginário. Uma descrição em termos do tempo real era necessária, principalmente se queremos levar em conta buracos negros no *bulk*.

Se consideramos a presença de um buraco negro no *bulk*, a teoria de campos na fronteira passa a ser caracterizada também pela temperatura Hawking desse buraco negro [39]. Para o estudo da resposta de tais teorias de campos a pequenos deslocamentos do equilíbrio térmico, precisamos das funções de correlação escritas em termos do tempo real. Estas funções podem, em princípio, ser obtidas pela continuação analítica das versões euclidianas, que em muitos casos é um problema bastante difícil.

Foi devido ao trabalho de Son e Starinets [40], a elaboração de uma prescrição mikowskiana para o cálculo de funções de dois pontos de teorias de campos térmicas. Apresentamos no que segue os elementos principais dessa técnica.

Consideremos a métrica de um buraco negro assintoticamente AdS, dada formalmente por

$$ds^2 = g_{zz} dz^2 + g_{ab}(z) dx^a dx^b, \quad (4.5)$$

e a ação para um campo escalar  $\Phi(z, x^i)$  de massa  $m$  definido nas vizinhanças desse buraco negro,

$$S = \int dx^4 \int_0^{z_h} dz \sqrt{-g} \left[ g^{zz} (\partial_z \Phi)^2 + g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi + m^2 \Phi \right], \quad (4.6)$$

sendo  $z = z_h$  a localização do horizonte de eventos e  $z = 0$  o horizonte AdS.

A equação de movimento linearizada de  $\Phi$  é a equação de Klein-Gordon  $\square\Phi - m^2\Phi = 0$ , cuja solução pode ser escrita como

$$\Phi(z, x^i) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_i x^i} f_k(z) \Phi_0(k) \quad , \quad (4.7)$$

onde  $\Phi_0(k)$  é a transformada de Fourier do campo na fronteira AdS e  $f_k(z)$  é solução da equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z f_k) - (g^{ab} k_a k_b + m^2) f_k = 0 \quad , \quad (4.8)$$

com a condição de contorno  $f_k(0) = 1$  e de ondas que apenas entram no horizonte de eventos.

Desta forma, levando em conta a equação do campo escalar, a ação (4.6) se reduz aos termos de superfície

$$S = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Phi_0(-k) \mathcal{F}(z, k) \Phi_0(k) \Big|_0^{z_h} \quad , \quad (4.9)$$

onde

$$\mathcal{F}(z, k) = \sqrt{-g} g^{zz} f_{-k}(z) \partial_z f_k(z) \quad . \quad (4.10)$$

O postulado de Son-Starinets estabelece que a função de Green retardada correspondente ao operador  $O$  da teoria de campos é dada por

$$\boxed{G^R(k) = -2 \mathcal{F}(z, k) \Big|_{z=0}} \quad . \quad (4.11)$$

Com esta relação, os autores calcularam as funções de Green retardadas em casos onde tais funções já haviam sido calculadas, como por exemplo, numa teoria de campos conforme bidimensional, e verificaram a validade da relação (4.11).

A interpretação das frequências quasinormais de um buraco negro AdS em termos de uma teoria de campos conforme foi dada por Birmingham *et al* [7]. Mostrou-se que há uma concordância exata entre as frequências quasinormais de perturbações de vários spins do buraco negro BTZ e os pólos da função de Green retardada das correspondentes perturbações na teoria conforme dual em duas dimensões, definida na borda do espaço-tempo. Desta forma, pelo menos em princípio, a receita de Son-Starinets nos permite calcular os pólos das funções de Green retardadas de uma dada teoria de campos e além disso, tais pólos correspondem às

frequências quasinormais do buraco negro AdS definido no *bulk*. Portanto, as ferramentas usualmente empregadas no estudo das frequências quasinormais de buracos negros em Relatividade Geral podem ser utilizadas para o estudo das propriedades de teorias de campos por meio da correspondência AdS/CFT.

Em particular, observamos que os espaços-tempos considerados no lado gravitacional da correspondência no exemplo original de Maldacena e na obtenção da fórmula GKP-W e de Son-Starinets são todos obtidos através do limite próximo do horizonte da solução das  $p$ -branas negras obtidas no Capítulo 2. É, portanto, justificado um estudo da estabilidade dessas soluções. Entretanto, não tomaremos o limite próximo do horizonte, pois nosso objetivo é considerar as soluções mais gerais.



## Capítulo 5

# Perturbação Escalar das $p$ –Branas Negras

Neste capítulo apresentaremos os resultados da estabilidade das  $p$ -branas negras frente a uma perturbação devido a um campo escalar de teste. Vamos escrever a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo da  $p$ -brana negra e realizar uma separação de variáveis entre aquelas do *bulk* e da brana. Em seguida, utilizaremos o método WKB e da integração característica para encontrar as frequências quasinormais. Os resultados deste capítulo foram publicados em [41].

### 5.1 O campo escalar sem massa

Nossa análise neste trabalho se restringe ao setor escalar das perturbações, ou seja, estamos supondo a existência de uma perturbação que, por definição, obedece à equação de Klein-Gordon. Para se obter as perturbações de spin mais alto, deveríamos perturbar diretamente as equações de Einstein e obter o potencial efetivo correspondente.

Em nosso estudo, basta resolver a equação de Klein-Gordon para a métrica (2.70), que foi apresentada e discutida no primeiro capítulo deste trabalho<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Aqui usaremos a seguinte notação para as componentes da métrica:  $A(y) = \frac{\mathcal{K}_+}{\mathcal{K}_-^2}$ ,  $B(y) = \mathcal{K}_-$ ,  $C(y) = \frac{\mathcal{K}_-^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{\mathcal{K}_+}$

A análise que faremos, será computar o efeito causado por uma perturbação linear na métrica da  $p$ -brana negra utilizando um campo escalar sem massa  $\Phi(x^A)$ , onde  $x^A$  são as coordenadas do espaço-tempo. Queremos encontrar as frequências quasinormais que surgem da propagação de  $\Phi(x^A)$  na métrica de fundo (2.70).

Como é sabido, a equação de movimento para um campo escalar sem massa é dada pela equação de Klein-Gordon

$$\Delta_{10}\Phi = 0,$$

sendo  $\Delta_{10}$  um operador diferencial que atua em todas as coordenadas de (2.70). É conveniente escrevermos este operador como a soma de outros dois,

$$\Delta_{10} = \Delta_p(r, \theta_{(p-1)}) + \Delta_{10-p}(t, y, \lambda_{(8-p)}), \quad (5.1)$$

sendo que o primeiro atua na parte de  $\Phi$  que depende das coordenadas do subespaço  $dx^i dx_i = dr^2 + r^2 d\Omega_{p-1}^2$ , e o segundo no restante, que são as coordenadas do bulk  $(t, y, \lambda_{(8-p)})$ .

Nosso objetivo imediato é simplesmente escrever o operador (5.1) no espaço-tempo descrito por (2.70). Para levar isso a cabo, é importante listarmos algumas expressões e definirmos uma notação. As  $(p-1)$  coordenadas angulares que aparecem no subespaço  $dr^2 + r^2 d\Omega_{p-1}^2$  são denotadas por  $\theta_{(p-1)}$  e a combinação de  $\sin\theta$  que advém do elemento de linha  $d\Omega_{p-1}^2$  que aparece no cálculo do determinante do tensor métrico é condensada na função  $h(\theta_i)$ , sendo que

$$\sqrt{h(\theta_i)} = \sin^{p-2} \theta_1 \sin^{p-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{p-2} \quad .$$

De forma análoga para o elemento de linha angular do bulk  $d\Omega_{(8-p)}^2$  denotaremos as  $(8-p)$  coordenadas angulares por  $\lambda_{(8-p)}$  e a combinação, que aparece no determinante, por  $g(\lambda_j)$ , sendo que

$$\sqrt{g(\lambda_j)} = \sin^{7-p} \lambda_1 \sin^{6-p} \lambda_2 \cdots \sin \lambda_{7-p} \quad .$$

Com isso, a raiz do determinante  $g$  do tensor métrico (2.70) é dado por

$$\sqrt{-g} = \sqrt{A(y)B(y)^p C(y)D(y)^{(8-p)} r^{(p-1)} y^{(8-p)}} \sqrt{h(\theta_i)g(\lambda_j)}. \quad (5.2)$$

---


$$\text{e } D(y) = \mathcal{K}_-^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}.$$

Tendo a expressão acima, e os componentes da métrica (2.70) podemos escrever cada um dos termos que formam  $\Delta_{10}$ . Começando com o operador que depende de  $(r, \theta_{(p-1)})$

$$\Delta_p = \frac{1}{r^{(p-1)}} \partial_r \left( r^{(p-1)} g^{rr} \partial_r \right) + \frac{1}{\sqrt{h(\theta_i)}} \sum_i^{p-1} \partial_{\theta_i} \left( \sqrt{h(\theta_i)} g^{\theta_i \theta_i} \partial_{\theta_i} \right),$$

sendo  $g^{rr} = 1/B(y)$ ,  $g^{\theta_i \theta_i} = j(\theta_i)/r^2 B(y)$  e  $j(\theta_i)$  a combinação de  $\sin \theta_i$  que aparecem nas componentes angulares do tensor métrico referente ao subespaço  $dr^2 + r^2 d\Omega_{p-1}^2$ . Logo,

$$\Delta_p = \frac{1}{B(y)} \left[ \frac{1}{r^{(p-1)}} \partial_r \left( r^{(p-1)} \partial_r \right) + \frac{1}{r^2} \Theta(\theta_i) \right], \quad (5.3)$$

sendo

$$\Theta(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{h(\theta_i)}} \sum_i^{p-1} \partial_{\theta_i} \left( \sqrt{h(\theta_i)} j(\theta_i) \partial_{\theta_i} \right),$$

que é a parte angular do operador laplaciano em  $(p-1)$  dimensões.

Para o operador  $\Delta_{10-p}$  teremos

$$\Delta_{10-p} = -\frac{1}{A(y)} \partial_t^2 + X(y) + \frac{1}{y^2 D(y)} \Lambda(\lambda_j), \quad (5.4)$$

sendo

$$X(y) = \frac{1}{\sqrt{A(y)B(y)^p C(y)D(y)^{(8-p)} y^{8-p}}} \partial_y \left( \sqrt{A(y)B(y)^p C(y)^{-1} D^{(8-p)} y^{8-p}} \partial_y \right),$$

$$\Lambda(\lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{g(\lambda_i)}} \sum_j^{8-p} \partial_{\lambda_j} \left( \sqrt{g(\lambda_j)} j(\lambda_j) \partial_{\lambda_j} \right).$$

Esta última expressão é a parte angular do operador laplaciano em  $(8-p)$  dimensões nas coordenadas  $\lambda_j$ .

Substituindo (5.3) e (5.4) em (5.1), obtemos a expressão para o operador de Klein-Gordon em 10 dimensões, que aplicado ao campo escalar sem massa  $\Phi$  dá como resultado

$$\frac{1}{B(y)} \left[ \frac{1}{r^{(p-1)}} \partial_r \left( r^{(p-1)} \partial_r \Phi \right) + \frac{1}{r^2} \Theta(\theta_i) \Phi \right] - \frac{1}{A(y)} \partial_t^2 \Phi + X(y) \Phi + \frac{1}{y^2 D(y)} \Lambda(\lambda_j) \Phi = 0 \quad .$$

Esta equação pode ser separada em duas outras equações diferenciais se tomarmos a seguinte separação de variáveis para  $\Phi$

$$\Phi(x^A) = \sum_{l,m} R_l(r) Y_{lm}(\theta_i) \sum_{L,q} \Psi_L(t,y) Y_{Lq}(\theta_\alpha) \quad , \quad (5.5)$$

onde  $Y_{l,m}$  e  $Y_{L,q}$  são os harmônicos hiper-esféricos em  $(p-1)$  e  $(10-p)$  dimensões respectivamente [42]. A constante de separação é denotada por  $\beta^2$ , e as equações resultantes, para todo  $m$  e  $q$ , são

$$\frac{1}{r^{(p-1)}} \frac{d}{dr} \left( r^{(p-1)} \frac{dR_l}{dr} \right) + \left( \beta^2 - \frac{l(l+p-2)}{r^2} \right) R_l = 0 \quad , \quad (5.6)$$

$$-\frac{B(y)}{A(y)} \partial_t^2 \Psi_L + B(y) X(y) \Psi_L - \left( \beta^2 + \frac{B(y)}{y^2 D(y)} L(L+7-p) \right) \Psi_L = 0 \quad , \quad (5.7)$$

onde usamos

$$\Theta(\theta_i) Y_{lm} = -l(l+p-2) Y_{lm} \quad ,$$

$$\Lambda(\lambda_j) Y_{Lq} = -L(L+7-p) Y_{Lq} \quad .$$

A equação (5.6) determina  $\beta^2$ , mas pelo fato de não termos nenhuma condição de contorno para o subespaço onde esta equação está definida, o autovalor  $\beta^2$  terá espectro contínuo. A solução dessa equação é uma combinação de funções de Bessel,

$$R_l(r) = A_1 r^{1-p/2} J_\gamma(\beta r) + A_2 r^{1-p/2} Y_\gamma(\beta r), \quad (5.8)$$

com  $\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4p + 4 - 4l(l+p-2)}$ ,  $A_1$  e  $A_2$  constantes,  $J_\gamma(\beta r)$  função de Bessel do primeiro tipo e  $Y_\gamma(\beta r)$  função de Bessel do segundo tipo. Por simplicidade, como se trata de uma primeira análise, tomaremos  $\beta = 0$  para a resolução da equação (5.7). O fator  $\beta^2$  pode ser interpretado como uma massa para o campo de Klein-Gordon inicialmente desprovido desta.

Com o propósito de encontrar as frequências quasinormais devido a perturbação escalar, vamos decompor em componente de Fourier a parte temporal do campo  $\Psi_L$ , isto é,

$$\Psi_L(t, y) = e^{i\omega t} Q_L(y) \quad ,$$

onde  $\omega$  representa a frequência quasinormal procurada. Disto, nossa equação adquire a forma

$$h(y) \frac{d^2 Q_L}{dy^2} + g(y) \frac{dQ_L}{dy} + v(y) Q_L = 0 \quad , \quad (5.9)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 h(y) &= \frac{A(y)}{C(y)} , \\
 g(y) &= \frac{(8-p)A(y)}{yC(y)} + \frac{1}{2C(y)} \frac{dA(y)}{dy} + \frac{pA(y)}{2B(y)C(y)} \frac{dB(y)}{dy} - \frac{A(y)}{2C(y)^2} \frac{dC(y)}{dy} \\
 &\quad + \frac{(8-p)}{2} \frac{A(y)}{C(y)D(y)} \frac{dD(y)}{dy} , \\
 v(y) &= \omega^2 - \frac{A(y)}{y^2 D(y)} L(L+7-p) .
 \end{aligned}$$

## 5.2 O potencial efetivo

Usaremos o método semi-analítico WKB de sexta ordem [29] e a integração característica [30, 31] para determinarmos as frequências quasinormais. Para que isto seja feito, precisamos determinar o potencial efetivo  $V(y)$  correspondente à equação (5.9). Tal potencial pode ser determinado pela redefinição da função de onda  $Q_L$  e através de uma mudança de coordenadas que nos permita anular o coeficiente da derivada primeira de  $Q_L$  e tornar o coeficiente da derivada segunda de  $Q_L$  igual à 1

Façamos a redefinição

$$\begin{aligned}
 Q_L(y) &= b(y)Z_L(y) , \\
 y &= y(r_*) .
 \end{aligned}$$

Substituindo em (5.9) temos como resultado<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 &h(y)r_*^2 Z_L'' + \left[ 2h(y) \frac{b(y)'}{b(y)} r_*^2 + h(y)r_* (\dot{r}_*)' + g(y)r_* \right] Z_L' \\
 &+ \left[ \frac{b(y)''}{b(y)} h(y)r_*^2 + \frac{b(y)'}{b(y)} r_* (\dot{r}_*)' h(y) + \frac{b(y)'}{b(y)} g(y)r_* + v(y) \right] Z_L = 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para que o coeficiente de  $Z_L''$  seja 1, devemos ter

$$h(y)r_*^2 = 1 \Rightarrow \frac{dr_*}{dy} = \frac{1}{\sqrt{h(y)}}. \tag{5.11}$$

<sup>2</sup>Aqui usamos a seguinte notação:  $\cdot = \frac{d}{dy}$  e  $' = \frac{d}{dr_*}$

Por outro lado, para que o coeficiente de  $Z'_L$  se anule, precisamos que

$$2b(y)'r_* + b(y)(\dot{r}_*)' + \frac{g(y)}{h(y)}b(y) = 0. \quad (5.12)$$

Usando o resultado (5.11) ficamos com

$$\frac{2}{b(y)} \frac{db(y)}{dy} - \frac{1}{2h(y)} \frac{dh(y)}{dy} + \frac{g(y)}{h(y)} = 0, \quad (5.13)$$

sendo

$$\frac{g(y)}{h(y)} = \frac{(8-p)}{y} + \frac{1}{2A(y)} \frac{dA(y)}{dy} + \frac{p}{2} \frac{1}{B(y)} \frac{dB(y)}{dy} - \frac{1}{2} \frac{1}{C(y)} \frac{dC(y)}{dy} + \frac{(8-p)}{2} \frac{1}{D(y)} \frac{dD(y)}{dy}. \quad (5.14)$$

Substituindo (5.14) em (5.13) ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \ln b(y) &= \frac{1}{4} \frac{d}{dy} \ln h(y) - \frac{(8-p)}{2y} - \frac{1}{4} \frac{d}{dy} \ln A(y) - \frac{p}{4} \frac{d}{dy} \ln B(y) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{d}{dy} \ln C(y) - \frac{(8-p)}{4} \frac{d}{dy} \ln D(y), \end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que a função que anula o coeficiente de  $Z'_L$  é

$$b(y) = \frac{1}{y^{(8-p)/2} B(y)^{p/4} D(y)^{(8-p)/4}}. \quad (5.15)$$

Substituindo este resultado e (5.11) em (5.10) obtemos

$$\frac{d^2}{dr_*^2} Z_L - \left[ \frac{A(y)}{y^2 D(y)} L(L+7-p) - \frac{h(y)}{b(y)} \frac{d^2 b(y)}{dy^2} - \frac{g(y)}{b(y)} \frac{db(y)}{dy} - \omega^2 \right] Z_L = 0.$$

Com isto, podemos definir o potencial devido a perturbação escalar

$$V(y) = \left[ \frac{A(y)}{B(y)} - 1 \right] \beta^2 + \frac{A(y)}{y^2 D(y)} L(L+7-p) - \frac{h(y)}{b(y)} \frac{d^2 b(y)}{dy^2} - \frac{g(y)}{b(y)} \frac{db(y)}{dy}. \quad (5.16)$$

Em síntese a equação para perturbação escalar se reduz a

$$\frac{d^2}{dr_*^2} Z_L + [k^2 - V(y)] Z_L = 0, \quad (5.17)$$

onde, por conveniência, definimos  $k^2 = \omega^2 - \beta^2$ .

Pode-se observar o perfil do potencial efetivo nos gráficos (5.1) e (5.2). Vemos que fora do horizonte de eventos, isto é, para  $y > a$ , o potencial adquire um máximo e em seguida decai suavemente à medida em que  $y$  cresce. No infinito os potenciais decaem a zero. Este tipo de potencial é bem estudado na teoria dos buracos negros [22], como por exemplo no caso de perturbarmos o buraco negro de Schwarzschild ou Reissner-Nordström com um campo escalar sem massa. O perfil do potencial efetivo obtido é muito semelhante ao resultado obtido neste trabalho para as  $p$ -branas. Entretanto, observa-se também, que à medida em que o parâmetro  $\beta$  cresce e o número de dimensões da  $p$ -brana também aumenta, o potencial efetivo torna-se negativo. Tal comportamento pode ser verificado explicitamente nos casos  $\beta = 1$  para a 5-brana e para a 6-brana. Em vista disso, nossa análise será focada nos casos em que os potenciais são positivos definidos no domínio  $a < y < \infty$ .

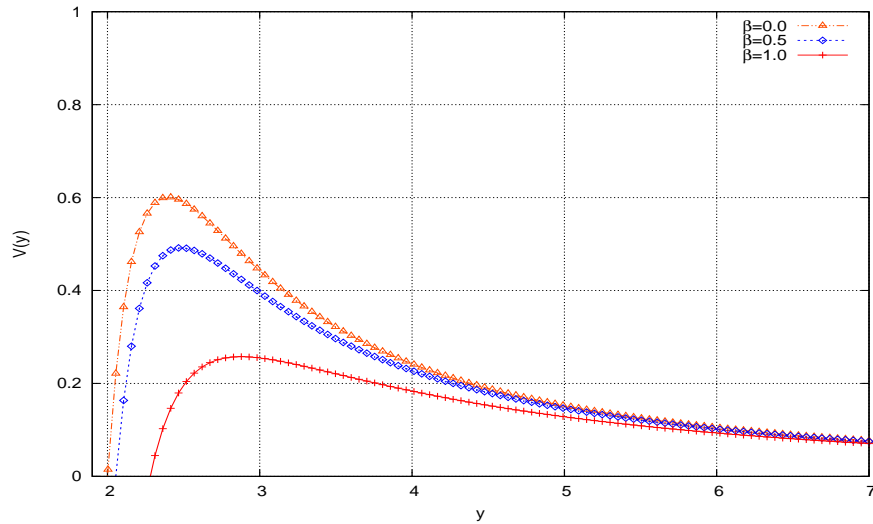


Figura 5.1: Potencial efetivo  $V(y)$  com  $\mathbf{p} = \mathbf{3}$ ,  $L = 0$ ,  $a = 2$  e  $b = 0.5$  para três valores diferentes do parâmetro massivo  $\beta$ .

### 5.3 O caso extremo

O potencial efetivo da perturbação escalar no caso da  $p$ -brana extrema é obtido tomando  $a = b$  no potencial obtido na seção anterior (5.16). Observamos que para  $p < 5$  o perfil do potencial é

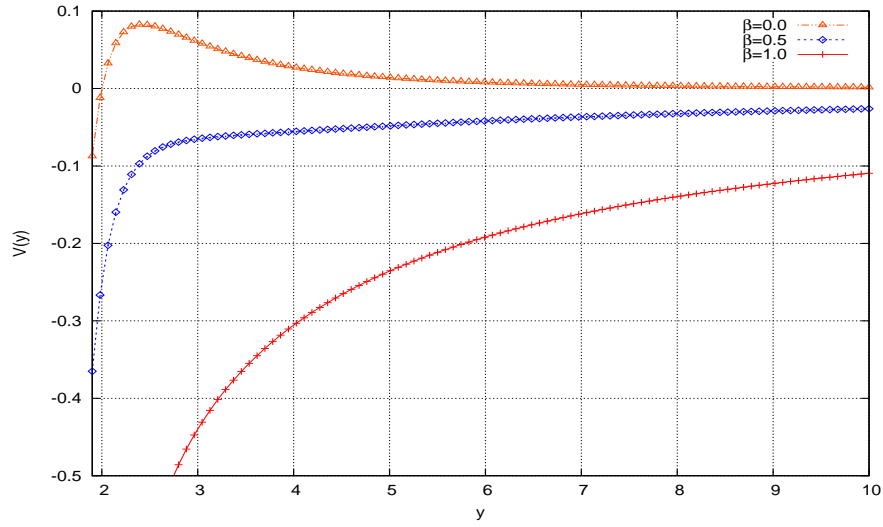


Figura 5.2: Potencial efetivo  $V(y)$  com  $p = 6$ ,  $L = 0$ ,  $a = 2$  e  $b = 0.5$  para três valores diferentes do parâmetro massivo  $\beta$ .

qualitativamente o mesmo que no caso da  $p$ -brana negra, veja o gráfico (5.3). Continuando com a definição da frequência efetiva  $k^2 = \omega^2 - \beta^2$ , constatamos que no caso extremo os potenciais são independentes de  $\beta^2$ , já que o único termo do potencial que dependeria desse parâmetro é zero no caso extremo.

Para  $p = 6$  temos uma singularidade nua tipo tempo em  $y = a$ , o que explica o fato do potencial efetivo divergir na região próxima de  $y = a$  como mostrado no gráfico (5.4). No caso da 5-brana o potencial também diverge em  $y = a$ . Em vista disso, no regime extremo nos restringiremos aos casos em que  $p < 5$ .

## 5.4 Frequências quasinormais: Método WKB

Nesta seção e na subsequente apresentaremos os resultados que obtemos. Vamos primeiramente usar o método WKB de sexta ordem para calcular as frequências quasinormais devido à perturbação escalar, tanto no caso da  $p$ -brana extrema quanto no da  $p$ -brana negra. Usaremos o potencial efetivo dado em (5.16) como *input* do nosso código (veja o Apêndice A).

### Caso não extremo



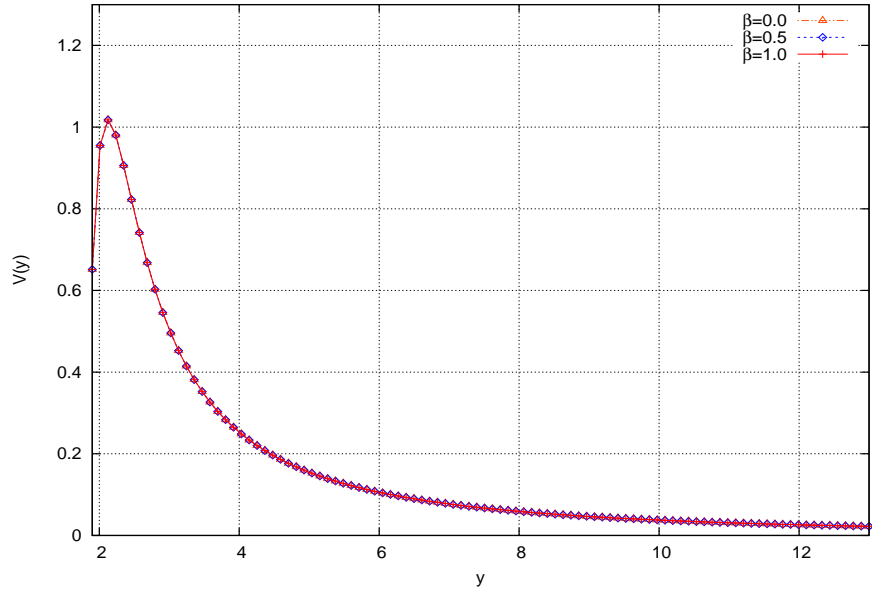


Figura 5.3: Potencial efetivo  $V(y)$  com  $\mathbf{p} = 3$ ,  $L = 0$ ,  $a = b = 2$  para três valores diferentes do parâmetro massivo  $\beta$ .

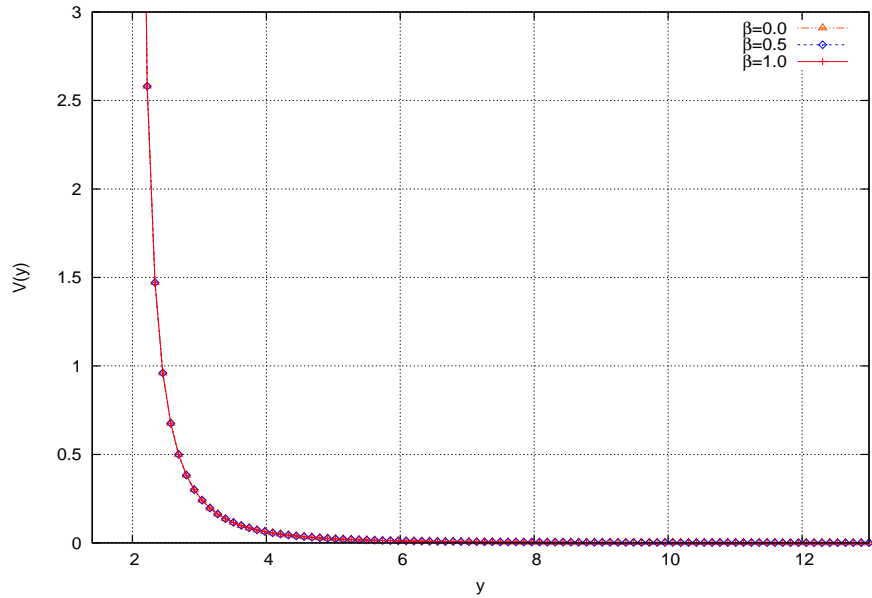


Figura 5.4: Potencial efetivo  $V(y)$  com  $\mathbf{p} = 6$ ,  $L = 0$ ,  $a = b = 2$  para três valores diferentes do parâmetro massivo  $\beta$ .

Nas tabelas (5.1) e (5.1) temos as frequências quasinormais para cada valor  $p$ , variando o número multipolar  $L$  e o sobreton  $n$ . Estes resultados foram obtidos tomando o valor de  $\beta^2 = 0$ ,

isto é, a frequência efetiva  $k^2 = \omega^2$ . No decorrer apresentaremos os resultados para  $\beta > 0$ .

$p = 0$				$p = 1$			
$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0	1.2889	0.5506	0	0	1.0812	0.4670
1	0	1.5047	0.5876	1	0	1.3245	0.4963
1	1	0.9858	1.7991	1	1	0.8928	1.5820
2	0	1.9638	0.48123	2	0	1.7264	0.4300
2	1	1.4709	1.6170	2	1	1.3581	1.3904
2	2	0.4087	2.8063	2	2	0.5388	2.5558

$p = 2$				$p = 3$			
$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0	0.8714	0.3911	0	0	0.6633	0.3202
1	0	1.1311	0.4137	1	0	0.9284	0.3363
1	1	0.7983	1.3408	1	1	0.6930	1.0922
2	0	1.4882	0.3754	2	0	1.2489	0.3161
2	1	1.2223	1.1884	2	1	1.0673	0.9904
2	2	0.6387	2.2091	2	2	0.6904	1.8209

Tabela 5.1: Frequências quasinormais escalares para  $p = 0, 1, 2, 3$  e  $4$  com  $a = 2$  e  $b = 0.5$ .

$p = 4$				$p = 5$				$p = 6$			
$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0	0.4632	0.2514	0	0	0.2824	0.1827	0	0	0.2287	0.1563
1	0	2.3562	0.6854	1	0	0.5179	0.1843	1	0	0.4815	0.1433
1	1	1.7983	1.9035	1	1	0.4399	0.5876	1	1	0.4482	0.4451
2	0	3.1055	0.6587	2	0	0.7690	0.1803	2	0	0.7697	0.1406
2	1	2.6785	1.9772	2	1	0.7109	0.5570	2	1	0.7459	0.4281
2	2	1.5204	3.2295	2	2	0.6098	0.9805	2	2	0.7055	0.7320

Tabela 5.2: Frequências quasinormais escalares para  $p = 4, 5$  e  $6$  com  $a = 2$  e  $b = 0.5$ .

A dependência das frequências quasinormais em relação ao número de dimensões  $p$  da brana pode ser observado nos gráficos (5.5) e (5.6) para cada valor de multipolo  $L$  considerado neste trabalho. Notamos que quanto maior o número de dimensões espaciais da brana, menor se tornam a parte real e imaginária de maneira aproximadamente linear.

Podemos interpretar o parâmetro  $p$  como um fator de escala das frequências, já que o espaçamento entre uma frequência e outra tomadas em dimensões vizinhas é praticamente constante. A única exceção é para a parte real do caso  $L = 2, n = 2$ , onde observamos que a parte real aumenta à medida em que adicionamos mais dimensões na brana. Tal comportamento anômalo, talvez seja em função das limitações do método WKB quando tratamos de altos multipolos onde  $L = n$ . Até o momento não conseguimos encontrar outra explicação para este comportamento.

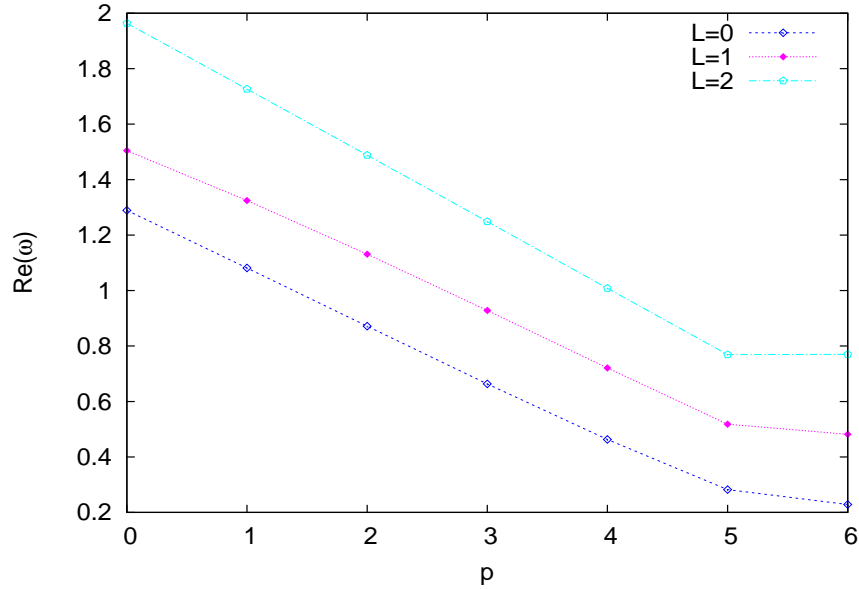


Figura 5.5: Relação entre a parte real das frequências e o número de dimensões  $p$  para  $L = 0, 1, 2$ .

De maneira análoga, podemos medir o efeito do aumento do parâmetro  $a$ , que para um dado  $b$  essencialmente representa a massa da  $p$ -brana. Observamos que à medida em que a brana torna-se mais massiva, tanto a parte real quanto a imaginária das frequências diminui. Este comportamento é bem semelhante ao que observamos quando aumentamos o número de dimensões espaciais da brana. Um exemplo deste comportamento é mostrado nos gráficos (5.7)

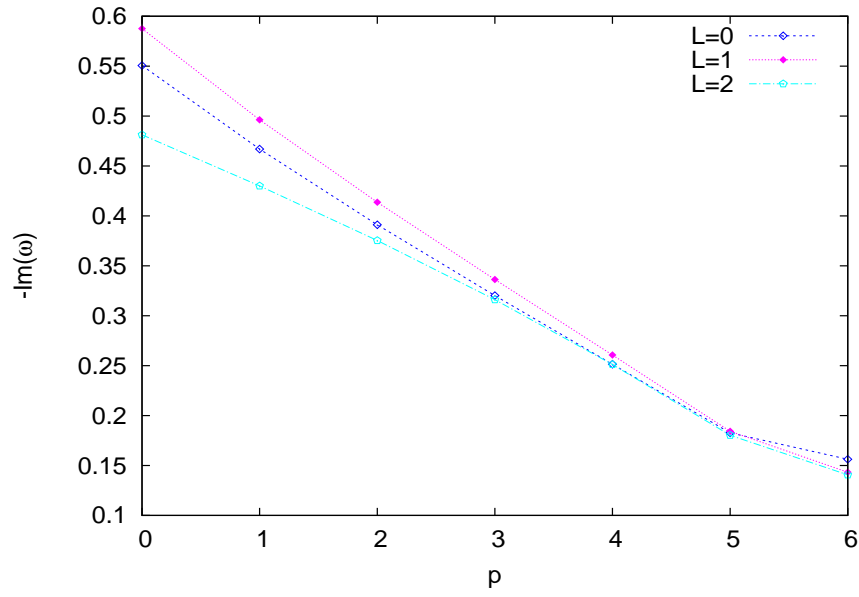


Figura 5.6: Relação entre a parte imaginária das frequências e o número de dimensões  $p$  para  $L = 0, 1, 2$ .

e (5.8) onde tomamos com  $b = 0.5$ .

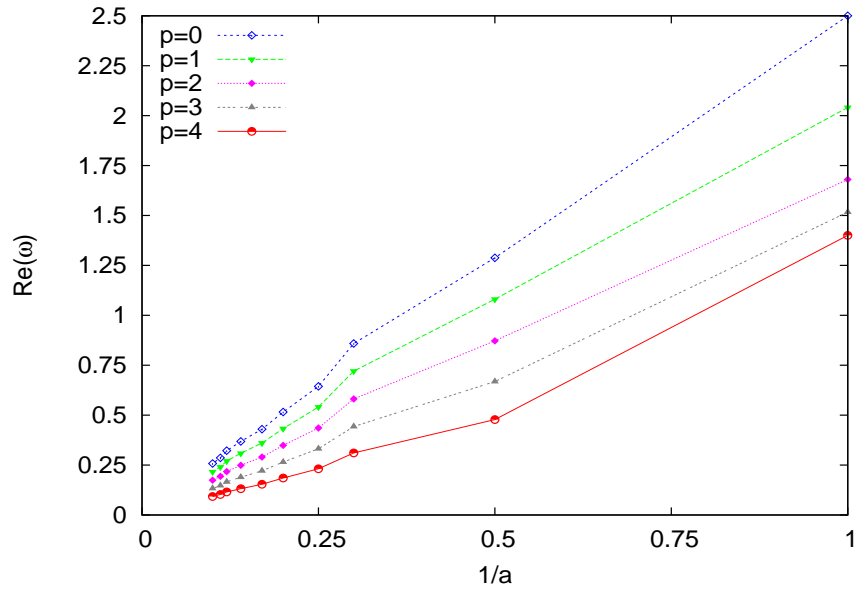


Figura 5.7: Efeito do parâmetro  $a$  na parte real das frequências. Os parâmetros da  $p$ -brana são  $b = 0.5$ ,  $L = 0$  e  $\beta = 0$

Do que foi mostrado até agora vemos que a adição de massa ou de dimensões extras

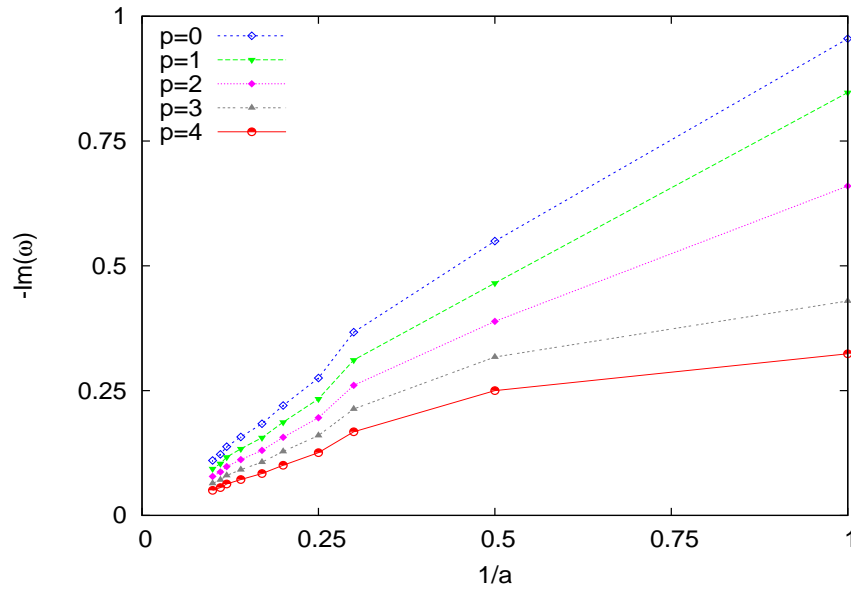


Figura 5.8: Efeito do parâmetro  $a$  na parte imaginária das frequências. Os parâmetros da  $p$ -brana são  $b = 0.5$ ,  $L = 0$  e  $\beta = 0$

não muda de maneira substancial o comportamento das frequências quasinormais. Em geral, o cálculo das frequências quasinormais é uma tarefa típica onde devemos usar métodos numéricos. Apesar disso, com o método WKB é possível encontrarmos uma expressão semi-analítica em um certo regime. Expandindo o potencial efetivo (5.16) em termos de pequenos valores de  $1/L$ , ou seja, para valores multipolares  $L$  grandes e, em seguida, usando o método WKB em primeira ordem, obtemos a seguinte expressão para as frequências quasinormais:

$$\omega^2 = L^2 \Gamma(y_m) - i \left( n + \frac{1}{2} \right) L \Lambda(y_m), \quad (5.18)$$

sendo que

$$\Gamma(y) = \frac{A(y)}{y^2 D(y)}, \quad \Lambda(y) = -\frac{2A(y)}{C(y)} \sqrt{\frac{\Gamma(y)'}{2} \left[ \ln \frac{A(y)}{C(y)} \right]' + \Gamma(y)''}.$$

O máximo do potencial é determinado por  $V(y)' = 0$ , e ocorre em

$$y_m = \left[ \frac{-2c_1}{\left( c_2 + (c_2^2 - 8c_1)^{\frac{1}{2}} \right)} \right]^{\frac{1}{(7-p)}}, \quad (5.19)$$

com  $c_1 = (7 - p)(ab)^{7-p}$  e  $c_2 = -(9 - p)a^{7-p}$ . Esta expressão concorda plenamente com os resultados para  $L$  grande levando em conta as seis ordens do WKB.

### O caso extremo

Como discutido anteriormente, trataremos no caso extremo apenas as branas com  $p < 5$  devido à divergência do potencial efetivo na vizinhança do horizonte de eventos  $y = a$ . Os resultados para estes valores são qualitativamente similares ao caso não extremo. O procedimento para o cálculo das frequências quasinormais é o mesmo utilizado no caso das  $p$ -branas negras. As frequências obtidas para todas as configurações a não ser para a 5-brana e a 6-brana são listadas na tabela (5.4).

$p = 0$				$p = 1$			
$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0	2.4997	0.9551	0	0	2.0407	0.8472
1	0	3.0707	1.0178	1	0	2.6890	0.8636
1	1	2.4132	2.0833	1	1	1.9794	2.1751
2	0	3.8865	0.9316	2	0	3.4758	0.8029
2	1	3.1598	2.7734	2	1	2.8825	2.4061
2	2	0.0876	2.4072	2	2	0.9789	3.5412

$p = 2$				$p = 3$				$p = 4$			
$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$n$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0	1.6804	0.6598	0	0	1.5166	0.4295	0	0	1.4002	0.3238
1	0	2.3562	0.6855	1	0	2.0922	0.5226	1	0	2.0082	0.3409
1	1	1.7983	1.9035	1	1	1.7917	1.4665	1	1	1.8299	0.9917
2	0	3.1055	0.6587	2	0	2.7984	0.5134	2	0	2.6720	0.3517
2	1	2.6785	1.9772	2	1	2.5253	1.5580	2	1	2.5245	1.0509
2	2	1.5204	3.2295	2	2	1.9272	2.5721	2	2	2.1955	1.7328

Tabela 5.3: Frequências quasinormais escalares para  $p = 0, 1, 2, 3, 4$  no caso extremo  $a = b = 1$ .

O efeito da dimensão espacial das branas extremas nas frequências quasinormais é o mesmo que no caso não extremo: tanto a parte real quanto a imaginária decaem à medida em que

aumentamos  $p$ . Da mesma forma que no caso anterior, quanto maior o parâmetro  $a$  menor será a parte imaginária e a parte real das frequências.

## 5.5 Frequências quasinormais: Integração característica

Outra técnica numérica usada no presente trabalho com o fim de calcular as frequências quasinormais é a chamada integração característica. Os resultados obtidos usando este método corroboram aqueles obtidos na seção anterior onde usamos a técnica WKB. Nas tabelas (5.4) e (5.5) temos os resultados das frequências calculadas para o caso da  $p$ -brana negra. O número que aparece entre parêntesis ao lado da parte real e imaginária das frequências é o desvio do resultado obtido usando a integração no domínio temporal em relação aos resultados obtidos com o uso da técnica WKB.

$p = 0$			$p = 1$		
$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	1.250 (3.0)	0.4980 (9.6)	0	1.042 (3.6)	0.4498 (3.7)
1	1.606 (6.7)	0.4867 (17.2)	1	1.604 (21.1)	0.463 (6.7)
2	1.962 (0.092)	0.4805 (0.15)	2	1.725 (0.079)	0.4295 (0.13)
$p = 2$			$p = 3$		
$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0.8346 (4.2)	0.3926 (0.38)	0	0.6376 (3.9)	0.3279 (2.4)
1	1.161 (2.64)	0.3803 (8.1)	1	0.9413 (1.4)	0.3204 (4.7)
2	1.488 (0.013)	0.3749 (0.13)	2	1.249 (0.0056)	0.3157 (0.14)

Tabela 5.4: Frequências quasinormais para  $p = 0, 1, 2, 3$  e  $4$  com  $n = 0$ ,  $a = 2$  e  $b = 0.5$  usando a integração característica.

Usando a integração no domínio temporal é possível obter o perfil de decaimento da perturbação escalar  $Z_L(t, r_*)$ , veja por exemplo (5.9). Podemos observar as três partes principais da evolução dessa perturbação. A primeira parte é chamada de fase transiente e representa a resposta imedi-

$p = 4$			$p = 5$			$p = 6$		
$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$	$L$	$Re(k)$	$-Im(k)$
0	0.4449 (4.0)	0.2555 (1.6)	0	0.2697 (4.5)	0.1990 (8.8)	0	0.1485 (52.6)	0.1290 (116.1)
1	0.7244 (0.46)	0.2438 (6.4)	1	0.5187 (0.16)	0.1828 (0.83)	1	0.3616 (0.22)	0.1150 (0.34)
2	1.008 (0.012)	0.2509 (0.13)	2	0.7691 (0.010)	0.1802 (0.082)	2	0.5889 (0.021)	0.1134 (0.042)

Tabela 5.5: Frequências quasinormais escalares para  $p = 4, 5$  e  $6$  com  $n = 0$ ,  $a = 2$  e  $b = 0.5$  usando a integração característica.

ata do sistema. Essa fase depende das condições iniciais do campo perturbativo. A segunda parte corresponde aos tempos intermediários, quando a perturbação decai de maneira exponencial. As frequências de oscilação e amortecimento são determinados pelos modos quasinormais, que dependem exclusivamente dos parâmetros da  $p$ -brana. A última fase da evolução de  $Z_L(t, r_*)$  ocorre em tempos longos. O campo nessa etapa decai como uma lei de potência [43].

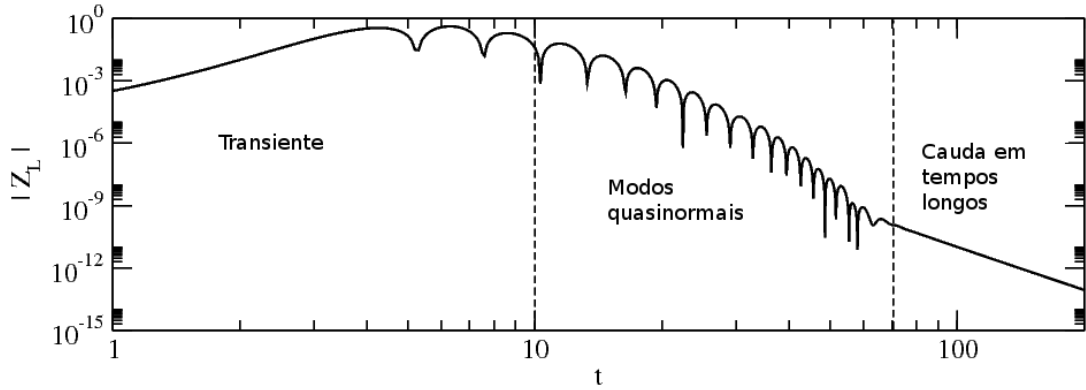


Figura 5.9: Gráfico Log-Log do valor absoluto de  $Z_L(t, r_*)$ . A fase transiente, quasinormal e a cauda estão indicadas. Os parâmetros da  $p$ -brana são  $p = 0$ ,  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 1$  e  $\beta = 0$

Longe do horizonte de eventos da  $p$ -brana o potencial efetivo (com  $\beta = 0$ ), em termos da coordenada tartaruga  $r_*$ , adquire a seguinte forma:



$$V(r_*) = \begin{cases} \left( L + \frac{8-p}{2} \right) \left( L + \frac{6-p}{2} \right) \frac{1}{r_*^2} + O\left(\frac{1}{r_*^{8-p}}\right) \\ \text{se } 0 \leq p < 6 \\ \\ L(L+1) \left[ \frac{1}{r_*^3} + (2a-b) \frac{\ln r_*}{r_*^4} \right] + O\left(\frac{\ln r_*}{r_*^5}\right) \\ \text{se } p = 6 \text{ e } L = 0 \\ \\ L(L+1) \left[ \frac{1}{r_*^2} + (2a-b) \frac{\ln r_*}{r_*^3} \right] + O\left(\frac{\ln r_*}{r_*^4}\right) \\ \text{se } p = 6 \text{ e } L > 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Com este potencial efetivo, foi mostrado por Price [44] e Ching *et al* [26] que a evolução de uma perturbação inicial com suporte compacto, em tempos longos evolui de acordo com

$$Z_L \sim t^{-\alpha(p,L)}. \quad (5.21)$$

O expoente  $\alpha(p,L)$  para os casos  $p = 1, 3, 5, 6$  é dado por

$$\alpha(p,L) = \begin{cases} 2L - p + 8 & \text{com } p = 1, 3, 5 \\ 2L + 3 & \text{com } p = 6 \end{cases} \quad (5.22)$$

Para  $p = 0, 2, 4$ , o resultado numérico sugere uma expressão similar

$$\alpha(p,L) = 2L - p + 10 \text{ com } p = 0, 2, 4 \quad (5.23)$$

O decaimento tipo lei de potência para tempos longos é confirmado pela integração característica sendo ilustrado em (5.10).

## 5.6 O caso massivo $\beta > 0$

Os resultados apresentados até aqui foram obtidos no regime em que  $\beta = 0$ . Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos da dependência das frequências quasinormais  $\omega = \sqrt{k^2 + \beta^2}$

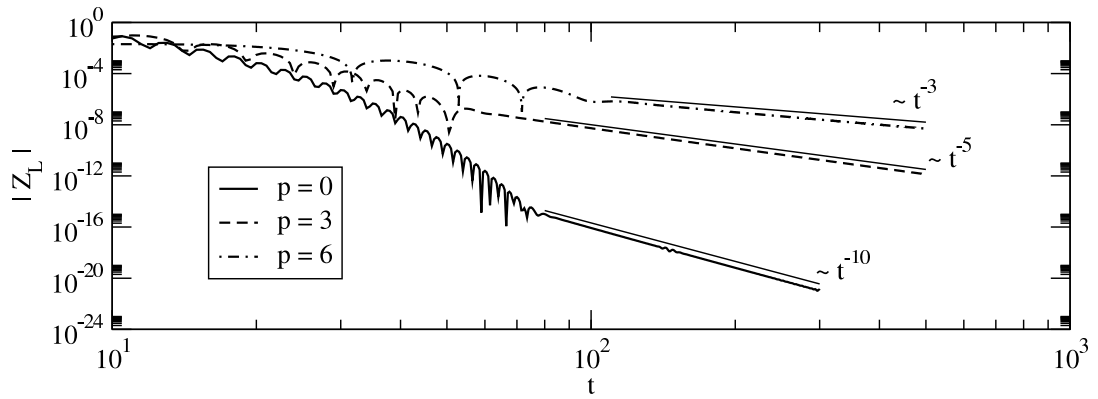


Figura 5.10: Caudas para vários valores de  $p$ . Os parâmetros da  $p$ -brana são  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 0$ ,  $\beta = 0$ . As retas que aparecem logo acima das caudas indicam suas respectivas inclinações.

em  $\beta$ . O perfil de decaimento de  $Z_L(t, r_*)$  apresenta as mesmas três fases que aparecem quando  $\beta = 0$ . A novidade neste caso é o aparecimento de uma cauda massiva, que para uma certa escolha de parâmetros pode sobrepor-se à fase quasinormal, veja (5.11).

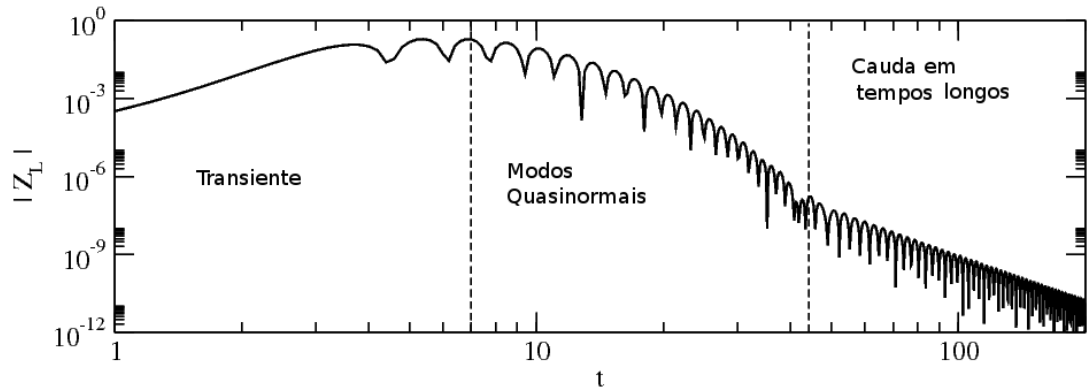


Figura 5.11: Gráfico Log-Log do valor absoluto de  $Z_L(t, r_*)$ . A fase transiente, quasinormal e a cauda massiva estão indicadas. Os parâmetros da  $p$ -brana são  $p = 0$ ,  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 1$  e  $\beta = 1$

Utilizamos a técnica WKB e a integração característica da mesma forma que empregados no caso anterior. Entretanto, a integração característica não é aplicável para valores grandes de  $\beta$ . Isto decorre do fato de que a cauda massiva, que ocorre devido a presença de termos

proporcionais à  $\beta^2$  no potencial, domina sobre os modos quasinormais já em tempos curtos, veja para o caso  $p = 6$  na figura (5.12). Apesar disso, a integração funciona para valores  $\beta$  pequenos. Em geral, o que observamos é que as frequências quasinormais no caso massivo se tornam mais oscilatórias e menos amortecidas.

No caso massivo, o potencial efetivo para  $r_*$  grande é dado por:

$$V(r_*) = \begin{cases} \beta^2 + \left(L + \frac{8-p}{2}\right) \left(L + \frac{6-p}{2}\right) \frac{1}{r_*^2} + O\left(\frac{1}{r_*^{8-p}}\right), & \text{se } 0 \leq p < 5 \\ \beta^2 + [\beta^2 + L^2 + 2L + \frac{3}{4}] \frac{1}{r_*^2} + O\left(\frac{1}{r_*^3}\right), & \text{se } p = 5 \\ \beta^2 \left(1 + \frac{b-a}{r_*}\right) + O\left(\frac{1}{r_*^3}\right), & \text{se } p = 6 \text{ e } L = 0 \\ \beta^2 \left(1 + \frac{b-a}{r_*}\right) + [\beta^2 b(b-a) + L(L+1)] \frac{1}{r_*^2} + O\left(\frac{\ln r_*}{r_*^3}\right), & \text{se } p = 6 \text{ e } L > 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

A forma da cauda massiva em tempos longos é dada por

$$Z_L(t, r_*) \sim \sin(\beta t) t^{-\gamma(p,L)}. \quad (5.25)$$

No caso  $p = 6$ , isto é quando o *bulk* é quadridimensional, podemos usar diretamente os resultados de Koyama *et al* [45], que estimou o perfil de caudas em tempos longos de uma perturbação escalar massiva em buracos negros esfericamente simétricos. No nosso caso temos  $\alpha(p = 6, \alpha) = 5/6$ . Este resultado é ilustrado na figura (5.12).

No caso da 2-brana com  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 0$ , o método WKB e o da integração característica dão resultados discrepantes na região próxima de  $\beta^2$ , veja as figuras (5.13) (5.14). Observamos que para pequenos valores de  $\beta$  os dois métodos empregados coincidem perfeitamente. A parte real das frequências também têm uma boa concordância pelo menos até  $\beta = 2.5$ . A razão desses diferentes resultados encontrados na região  $\beta = 1$  não está clara.

Em relação ao caso extremo, a técnica de integração característica é difícil de ser aplicada, pois com exceção do caso  $p = 3$ , as  $p$ -branas possuem uma singularidade nua [20] e o problema

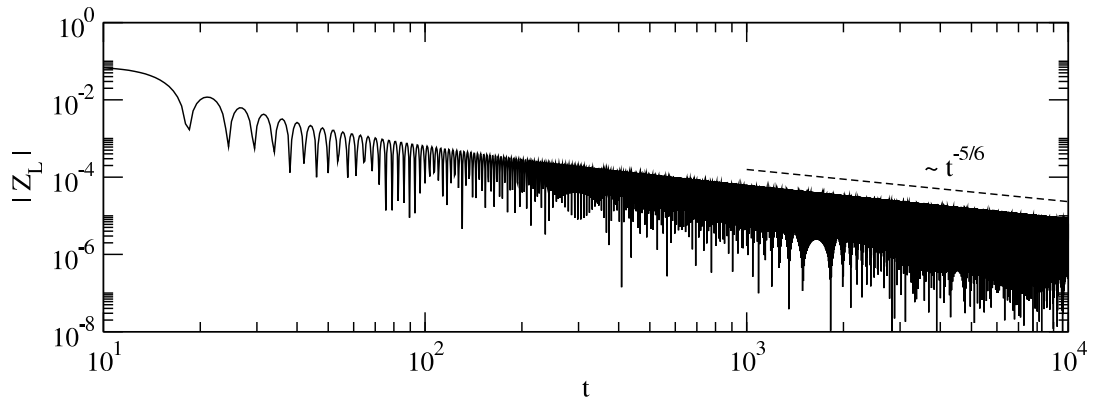


Figura 5.12: Cauda massiva para  $p = 6$ . Os parâmetros da  $p$ -brana são  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 0$  e  $\beta = 1$ .

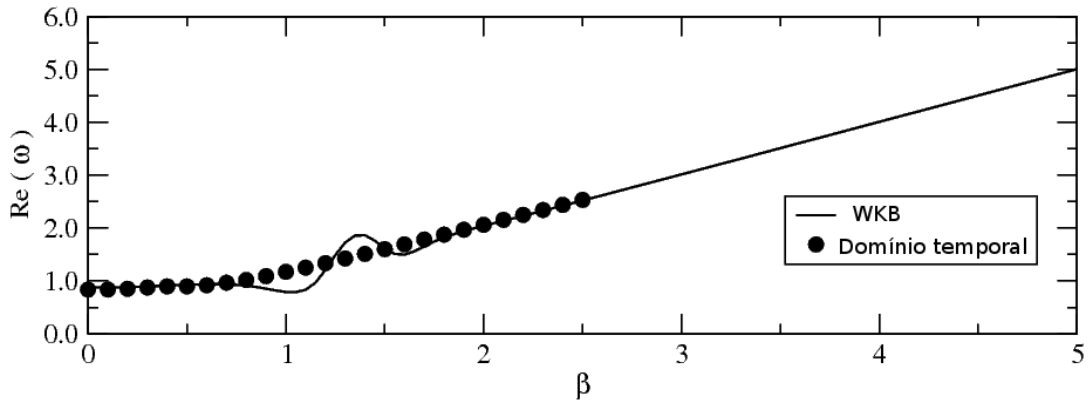


Figura 5.13: Efeito de  $\beta$  no comportamento da parte real de  $\omega$  para  $p = 2$  com  $a = 2$ ,  $b = 1$  e  $L = 0$ . Os dois métodos numéricos foram empregados. Eles são consistentes para  $\beta$  pequeno e suficientemente grande, mas discrepantes próximo de  $\beta = 1$

de como condições iniciais evoluem no espaço-tempo não é bem posto. Portanto, esta classe de soluções não será estudada com este método.

Da extensiva análise das frequências quasinormais devidas à propagação de um campo escalar na geometria das  $p$ -branas negras, podemos dizer que estes espaços tempos são *estáveis* frente a este tipo de deslocamento do equilíbrio. Os dois métodos numéricos empregados dão bom suporte a este resultado e os valores obtidos em ambas abordagens coincidem. Como foi comentado, no caso em que  $\beta$  é grande, a integração característica não apresenta resultados das

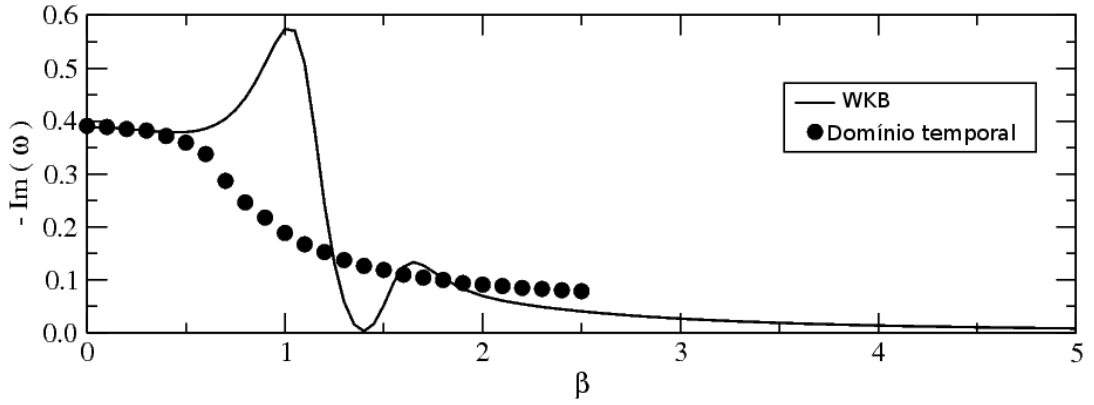


Figura 5.14: Efeito de  $\beta$  no comportamento da parte imaginária de  $\omega$  para  $p = 2$  com  $a = 2$ ,  $b = 1$  e  $L = 0$ . Os dois métodos numéricos foram empregados. Eles são consistentes para  $\beta$  pequeno e suficientemente grande, mas discrepantes próximo de  $\beta = 1$

frequências quasinormais, devido ao domínio da cauda massiva sobre a fase quasinormal da evolução da perturbação inicial.

Dos resultados obtidos, constatamos que as frequências quasinormais, tanto a parte real quanto a imaginária, decrescem quase linearmente com o aumento do parâmetro  $a$ , que para um dado valor de  $b$  representa a massa da brana. Da mesma forma, se aumentarmos o número de dimensões espaciais da brana as perturbações tornam-se menos oscilantes e amortecidas.

## Capítulo 6

# Supercondutores Holográficos na Gravidade de Gauss-Bonnet

Neste capítulo vamos tratar de uma aplicação da correspondência calibre/gravitação em sua versão fenomenológica. Usaremos o espaço-tempo de Gauss-Bonnet AdS para modelar estados supercondutores na teoria de campos definida na borda AdS. Daremos ênfase aos aspectos semianalíticos dos cálculos, que foram nossa principal contribuição ao assunto. Tais aspectos e a análise numérica dos supercondutores holográficos usando o buraco negro de Gauss-Bonnet foram publicados em [46].

Começaremos fazendo uma breve revisão do assunto, seguido de uma descrição do buraco negro de Gauss-Bonnet e por fim os cálculos para o condensado supercondutor da teoria de campos dual usando o dicionário AdS/CFT.

### 6.1 Supercondutores holográficos

Recentemente tem havido grande interesse em aplicações das idéias da correspondência AdS/CFT em sistemas gravitacionais que não são soluções da supergravidade em 10 dimensões como no exemplo original de Maldacena. O que se propõe é uma versão fenomenológica da correspondência AdS/CFT. Seguindo esta linha, Gubser [10, 47] sugeriu que na região próxima

do horizonte de um buraco negro carregado há uma quebra da simetria  $U(1)$  devido a um campo escalar carregado. Então usa-se a correspondência calibre/gravitação para a construção de duais gravitacionais para a transição de um estado normal para um estado supercondutor da teoria de campos na borda AdS [47].

O dual gravitacional de um supercondutor consiste em um sistema formado por um buraco negro e um campo escalar carregado, em que o buraco negro admite um *cabelo* escalar para uma dada temperatura menor que a chamada temperatura crítica, enquanto que para temperaturas maiores que a temperatura crítica não há a formação desse cabelo escalar [48]. Um condensado do campo escalar é então formado devido ao seu acoplamento com o campo de Maxwell de fundo, onde não se levam em conta os efeitos de retroação do campo escalar carregado no espaço-tempo. Seguindo esta linha fenomenológica há uma grande quantidade de investigações em relação à aplicação da correspondência AdS/CFT na física da matéria condensada, veja as revisões [49] [50] e suas referências.

Devemos sempre ressaltar que esses modelos são fenomenológicos. Os campos clássicos e as interações no bulk são escolhidas *ad hoc*. Uma situação mais confortável seria a derivação de modelos a partir de primeiros princípios, veja mais detalhes desta discussão em [51] [52] [53].

Um modelo composto de um campo escalar carregado acoplado ao campo de Maxwell na geometria definida pelo buraco negro de Gauss-Bonnet 5-dimensional foi apresentado e estudado por Gregory *et al* [12]. O objetivo foi o de estudar o efeito da inclusão de correções na geometria, isto é, levando em conta termos proporcionais ao quadrado das componentes do tensor de Riemann na ação, na formação do condensado da teoria de campos dual. A conclusão foi que a adição dessas correções torna mais difícil a formação do condensado. Também nesse trabalho, os autores apresentam um método semianalítico para a determinação da densidade do condensado na teoria de campos definida na borda AdS em termos da temperatura crítica. Em nosso trabalho [46] consideramos uma geometria do buraco negro de Gauss-Bonnet-AdS em  $d$ -dimensões que generaliza o caso estudado por Gregory *et al* [12]. O objetivo é lançar alguma luz sobre os detalhes de como se dá a influência das correções na geometria quando levamos em conta um bulk com dimensão maior que cinco.

## 6.2 O buraco negro de Gauss-Bonnet AdS

A teoria de Gauss-Bonnet  $d$ -dimensional com constante cosmológica negativa  $\Lambda = -(d-1)(d-2)/2L^2$  é dada pela ação

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{(d-1)(d-2)}{L^2} + \tilde{\alpha} \left( R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2 \right) \right] , \quad (6.1)$$

onde  $\tilde{\alpha}$  é a constante de acoplamento de Gauss-Bonnet com dimensão de  $(\text{comprimento})^{-2}$ . A solução das equações de movimento da ação acima para um buraco negro neutro é descrito pelo elemento de linha [54]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\chi^2 + h_{ij}dx^i dx^j) , \quad (6.2)$$

onde

$$f(r) = \frac{r^2}{2\alpha} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{64\pi G\alpha M}{(d-2)\Sigma r^{d-1}} - \frac{4\alpha}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] , \quad (6.3)$$

onde  $\alpha = \tilde{\alpha}(d-3)(d-4)$  e  $M$  é uma constante de integração relacionada com o horizonte de eventos  $r_+$  do buraco negro por  $M = \frac{(d-2)\Sigma r_+^{d-1}}{16\pi GL^2}$ . A constante  $\Sigma$  é o volume do espaço plano  $(d-3)$ -dimensional. Observamos que na região assintótica

$$f(r) \sim \frac{r^2}{2\alpha} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{L^2}} \right] , \quad (6.4)$$

o que nos permite definir a escala efetiva

$$L_{eff}^2 = \frac{2\alpha}{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{L^2}}} , \quad (6.5)$$

que se reduz a  $L^2$  quando  $\alpha$  tende a zero e a  $L^2/2$  quando  $\alpha$  tende a  $L^2/4$ .

A temperatura Hawking do buraco negro, que é interpretada como a temperatura da teoria de campos na borda AdS, é dada por

$$T = \frac{(d-1)}{4\pi L^2} r_+ . \quad (6.6)$$

Dada a descrição da geometria, na próxima seção vamos considerar os campos clássicos definidos ali, que serão úteis para construir o condensado supercondutor na teoria de campos.



## 6.3 Campos clássicos definidos no *bulk*

Na geometria de Gauss-Bonnet AdS  $d$ -dimensional dado pela métrica (6.2) consideraremos o campo de Maxwell  $F_{ab}$  e um campo escalar complexo carregado  $\Psi$  através da ação

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - |\nabla \Psi - iA\Psi|^2 - m^2 |\Psi|^2 \right] , \quad (6.7)$$

sendo  $A_a$  o potencial vetor.

Nesta análise não levaremos em conta a retroação dos campos na geometria, isto é, os campos são fracamente acoplados à gravidade. Usando como *Ansatz*  $\Psi = \Psi(r)$ ,  $A_t = \phi(r)$ , as equações de movimento para esses campos são

$$\phi(r)'' + \frac{(d-2)}{r} \phi(r)' - \frac{2\Psi(r)^2 \phi(r)}{f(r)} = 0 , \quad (6.8)$$

$$\Psi(r)'' + \left[ \frac{f(r)'}{f(r)} + \frac{d-2}{r} \right] \Psi(r)' + \frac{\phi(r)^2 \Psi(r)}{f(r)^2} - \frac{m^2 \Psi(r)}{f(r)} = 0 . \quad (6.9)$$

Na resolução do sistema de equações acima, é possível aplicar um método semianalítico para estudar as propriedades das soluções sem precisar apelar para métodos numéricos. O método consiste em procurar por soluções aproximadas tanto na região próxima do horizonte de eventos quanto na região assintótica próximo do horizonte AdS e *colar* suavemente as soluções em um ponto intermediário. Em particular no trabalho [12], foi obtida uma expressão semianalítica para a temperatura crítica usando tal técnica e o resultado corrobora com os resultados numéricos. Na próxima seção vamos utilizar a mesma técnica para o presente caso.

## 6.4 Soluções semianalíticas

Primeiramente reescrevemos as equações (6.8) e (6.9) em termos da coordenada  $z = r_+/r$ :

$$\Psi'' + \left( \frac{f'}{f} - \frac{(d-4)}{z} \right) \Psi' + \frac{r_+^2}{z^4} \left( \frac{\phi^2}{f^2} - \frac{m^2}{f} \right) \Psi = 0 , \quad (6.10)$$

$$\phi'' - \frac{(d-4)}{z} \phi' - \frac{r_+^2}{z^4} \frac{2\Psi^2}{f} \phi = 0 , \quad (6.11)$$

onde a diferenciação é tomada em relação a  $z$ . Impondo regularidade no horizonte  $z = 1$  obtemos

$$\Psi(1) = -\frac{d-1}{m^2 L^2} \Psi'(1), \quad \Phi(1) = 0 \quad . \quad (6.12)$$

Na região próxima da borda AdS ( $z = 0$ ) temos

$$\Psi = C_- z^{\lambda_-} + C_+ z^{\lambda_+}, \quad \Psi = \mu - \frac{\rho}{r_+^{d-3}} z^{d-3} \quad . \quad (6.13)$$

No que segue, tomaremos  $C_- = 0$  e fixaremos  $\rho$ .

Expandindo as equações (6.10) e (6.11) em torno de  $z = 1$  usando a condição de regularidade no horizonte de eventos (6.12), obtemos a seguinte solução aproximada nas vizinhanças do horizonte de eventos

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \left(1 + \frac{m^2 L^2}{d-1}\right) \Psi(1) - \frac{m^2 L^2}{d-1} \Psi(1) z \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \left[ 2 + \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{2(d-1)\alpha}{L^2} \right] \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{L^4}{(d-1)^2 r_+^2} \phi'(1)^2 \right\} \Psi(1) (1-z)^2 \dots \quad , \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\phi(z) = -\phi'(z)(1-z) + \frac{1}{2} \left[ (d-4) - \frac{2L^2}{d-1} \Psi(1)^2 \right] \phi'(1)(1-z)^2 \dots \quad . \quad (6.15)$$

As soluções próximas da borda AdS são

$$\Psi = C_+ z^{\lambda_+}, \quad \Psi = \mu - \frac{\rho}{r_+^{d-3}} z^{d-3} \quad . \quad (6.16)$$

Colando as soluções (6.14) (6.15) e (6.16) em um ponto intermediário  $z_m$  com  $0 < z_m < 1$  obtemos as equações

$$\begin{aligned} C_+ z_m^{\lambda_+} = & \left(1 + \frac{m^2 L^2}{d-1}\right) a - \frac{m^2 L^2}{d-1} z_m a \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \left[ 2 + \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{2(d-1)\alpha}{L^2} \right] \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{L^4}{(d-1)^2 r_+^2} b^2 \right\} (1-z)^2 a \quad , \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \lambda_+ C_+ z_m^{\lambda_+-1} = & -\frac{m^2 L^2}{d-1} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left[ 2 + \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{2(d-1)\alpha}{L^2} \right] \frac{m^2 L^2}{d-1} - \frac{L^4}{(d-1)^2 r_+^2} b^2 \right\} (1-z) a \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\mu - \frac{\rho}{r_+^{d-3}} z_m^{d-3} = (1 - z_m)b - \frac{1}{2} \left[ (d-4) - \frac{2L^2}{d-1} a^2 \right] (1-z)^2 b, \quad (6.19)$$

$$-(d-3) \frac{\rho}{r_+^{d-3}} z_m^{d-4} = -b + \left[ (d-4) - \frac{2L^2}{d-1} a^2 \right] (1-z_m)b, \quad (6.20)$$

onde definimos  $\Psi(1) \equiv a$  e  $-\phi'(1) \equiv b$  com  $a, b > 0$ , o que faz com que  $\Psi(z)$  e  $\phi(z)$  sejam positivos nas vizinhanças do horizonte de eventos. Usando as equações (6.17) e (6.18), podemos eliminar  $b$  e encontrar

$$C_+ = \frac{2(d-1) + m^2 L^2 (1-z_m)}{(d-1) [2z_m + (1-z_m)\lambda_+]} z_m^{\lambda_+-1} a. \quad (6.21)$$

Substituindo (6.21) em (6.18), obtemos

$$b = 2(d-1) \frac{r_+}{L^2} \times \sqrt{\frac{[2(d-1) + m^2 L^2 (1-z_m)] \lambda_+}{2(d-1)(1-z_m) [2z_m + (1-z_m)\lambda_+]} + \frac{(2-z_m)m^2 L^2}{2(d-1)(1-z_m)} + \left[ \frac{m^2 L^2}{2(d-1)} \right]^2 - \frac{m^2 \alpha}{2}}. \quad (6.22)$$

Da mesma forma, usando as equações (6.19) e (6.20) encontramos

$$a^2 = \frac{(d-1)(d-3)z_m^{d-4}\rho}{2(1-z_m)L^2 r_+^{d-3}b} \left\{ 1 - \frac{[1 + (4-d)(1-z_m)] r_+^{d-3}b}{(d-3)z_m^{d-4}\rho} \right\}. \quad (6.23)$$

Usando a expressão da temperatura Hawking do buraco negro (6.6), podemos reescrever a expressão acima como

$$a^2 = \frac{(d-1)[1 + (4-d)(1-z_m)]}{2(1-z_m)L^2} \left( \frac{T_c}{T} \right)^{d-2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d-2} \right], \quad (6.24)$$

onde a temperatura crítica  $T_c$  é dada por

$$T_c = \frac{d-1}{4\pi L^2} \left\{ \frac{(d-3)z_m^{d-4}L^2\rho}{[1 + (4-d)(1-z_m)]\tilde{b}} \right\}, \quad (6.25)$$

sendo  $b = \tilde{b}r_+/L^2$ .

Seguindo o dicionário AdS/CFT [12], a expressão para o valor esperado  $\langle O \rangle$ , sendo  $O$  um operador da teoria de campos definida na borda AdS, é dada por  $\langle O \rangle \equiv LC_+ r_+^{\lambda_+} L^{-2\lambda_+}$ . Usando (6.19) e (6.24), podemos reescrever esta expressão como

$$\boxed{\frac{\langle O \rangle^{\frac{1}{\lambda_+}}}{T_c} = \Upsilon \frac{T}{T_c} \left\{ \left( \frac{T_c}{T} \right)^{d-2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d-2} \right] \right\}^{\frac{1}{2\lambda_+}}}, \quad (6.26)$$

sendo  $\Upsilon$  uma função que depende essencialmente da dimensão  $d$  e do valor de  $z_m$ .

Uma observação interessante tirada das relações (6.23) e (6.25) é que se tomarmos  $z_{md} = (d-5)/d-4$  a temperatura crítica diverge. Além disso, se usarmos o valor  $z_m = 1/2$  no caso  $d=6$  o método aqui empregado não funciona mais, diferentemente o que foi calculado em [12] para  $d=5$ . Desta forma, concluímos que a escolha de  $z_m$  não é totalmente arbitrária. Para obtermos uma temperatura crítica que não diverge devemos escolher  $z_m$  no intervalo  $z_{md} < z_m < 1$ . Com isso, os resultados da temperatura crítica obtidos através da expressão (6.25) corroboram perfeitamente com os resultados numéricos apresentados em [46] para  $T \approx T_c$ .

Nas figuras (6.1) e (6.2) apresentamos como ilustração a formação do condensado  $\langle O_+ \rangle$  quando  $T < T_c$  para vários valores de massa do campo escalar. As curvas foram obtidas numericamente em [46].

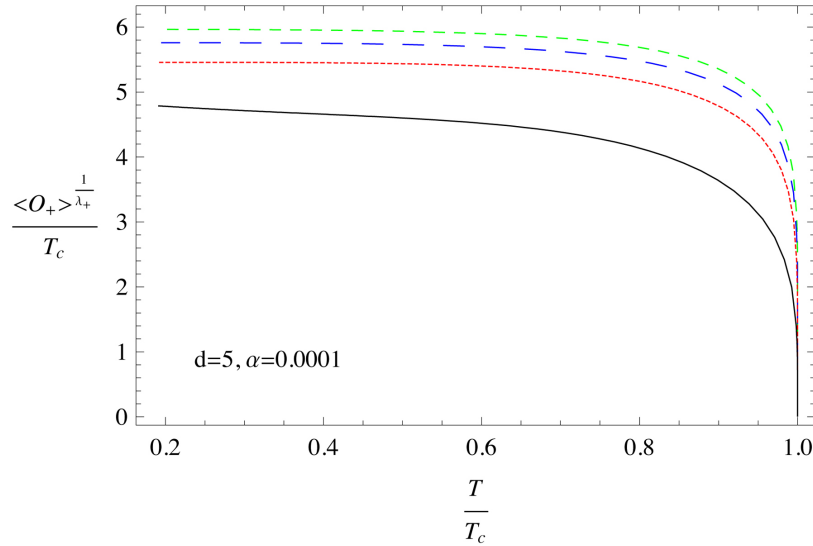


Figura 6.1: Condensado em função da temperatura com  $\alpha = 0.0001$  para vários valores de massa do campo escalar em  $d = 5$ . As quatro linhas de cima para baixo correspondem aos valores de massa  $m^2 L^2 = -4, -3, -2$  e  $-1$  respectivamente.

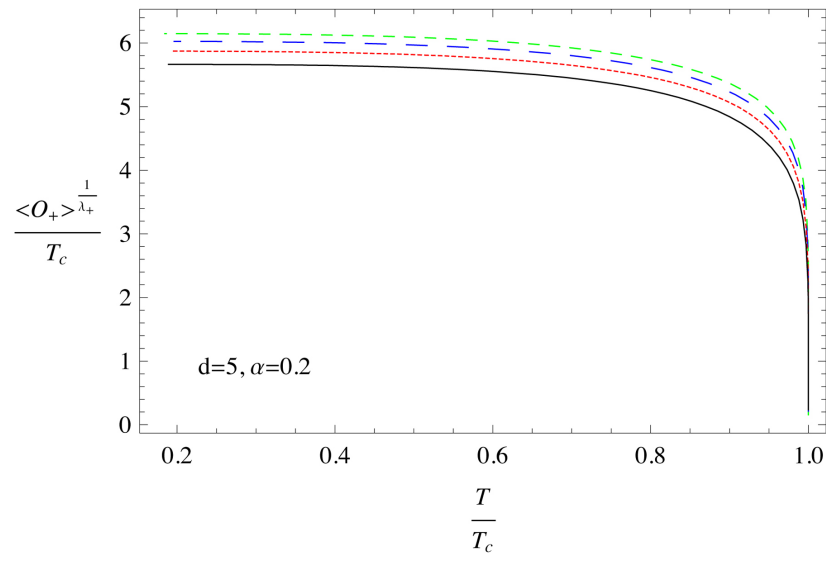


Figura 6.2: Condensado em função da temperatura com  $\alpha = 0.2$  para vários valores de massa do campo escalar em  $d = 5$ . As quatro linhas de cima para baixo correspondem ao valores de massa  $m^2 L^2 = -4, -3, -2$  e  $-1$  respectivamente.

# Capítulo 7

## Comentários Finais

O trabalho desenvolvido nesta tese teve como objetivo principal explorar as aplicações da teoria de perturbações da Relatividade Geral no contexto da correspondência calibre/gravitação. Em particular, abordamos a questão das frequências quasinormais de um campo escalar sem massa na geometria das  $p$ -branas negras e algumas propriedades do sistema formado por um campo escalar carregado nas vizinhanças do buraco negro de Gauss-Bonnet AdS com o objetivo de estudar estados supercondutores da teoria de campos definida na borda AdS.

Descrevemos em detalhes a derivação das soluções tipo  $p$ -brana negra e extrema e obtemos uma expressão para o escalar de Kretschmann para qualquer dimensão  $p$  e, portanto, foi possível localizar as singularidades físicas desses espaços-tempos. Usamos a definição de superfícies de *redshift* infinito que somado ao comportamento da métrica para certos valores da coordenada radial nos possibilitou encontrar os horizontes de eventos das  $p$ -branas. Desta forma, estabelecemos que as  $p$ -branas podem ser tratadas como buracos negros esféricos em 10 dimensões.

Analisamos a evolução de um campo escalar sem massa na geometria das  $p$ -branas. Obtemos explicitamente as equações que regem a dinâmica desse campo e mostramos que este adquire um termo massivo devido à separação entre as variáveis da brana e as do *bulk*. Calculamos as frequências quasinormais utilizando o método semianalítico WKB e a integração característica. No caso da  $p$ -brana negra com o termo massivo do campo escalar zero, os dois métodos concordam muito bem, indicando que os resultados são confiáveis mostrando que não

há instabilidades provocadas pelo campo escalar. Em relação ao caso extremo, não temos mais um horizonte de eventos mas sim uma singularidade nua. Deste modo fica impossibilitada a aplicação da interação no domínio temporal já que o problema de Cauchy nessas circunstâncias não é bem definido. Com isso, aplicamos apenas o método WKB para calcular as frequências quasinormais das  $p$ -branas extremas para  $p < 5$ , já que para  $p = 5$  e  $p = 6$  o potencial efetivo diverge na região próxima do horizonte de eventos. Neste caso, também não encontramos nenhuma instabilidade.

Quando levamos em conta o termo massivo do campo escalar, a cauda massiva da perturbação domina a propagação já na fase quasinormal, impossibilitando o cálculo das frequências através da integração característica. Entretanto para valores pequenos do termo massivo os dois métodos concordam plenamente. A região onde os métodos discordam corresponde a  $\beta \approx 1$ , como pôde ser observado na discussão realizada no capítulo 5.

O outro ponto abordado nessa tese foi o do supercondutor holográfico modelado usando como *bulk* o espaço-tempo definido pelo buraco negro de Gauss-Bonnet AdS  $d$ -dimensional. Apresentamos o cálculo semianalítico para a obtenção da expressão do valor esperado de um operador primário da teoria de campos definida na borda em termos da temperatura Hawking do buraco negro de Gauss-Bonnet AdS e da temperatura crítica. Tal expressão corrobora com os resultados obtidos numericamente para valores de temperatura muito próximos da temperatura crítica [46].

Uma possível extensão do trabalho aqui desenvolvido é a de considerar a evolução de outros campos, tais como o campo eletromagnético e espinorial com o objetivo de testar a estabilidade desses espaços-tempos através desses campos de teste. Além disso, aplicar o formalismo invariante de calibre de Kodama [55] para obter as perturbações gravitacionais das  $p$ -branas negras e, se possível, estudar suas frequências quasinormais hidrodinâmicas.

A questão da obtenção dos modos quasinormais levando-se em conta a retroação devido a correções semiclássicas nas vizinhanças de horizontes de eventos foi também estudada em [56], mas não foi incluída no corpo da tese. Como extensão do trabalho nessa linha, podemos considerar outros espaços-tempos em que se tenha acesso a uma expressão aproximada para o tensor

energia-momento semiclássico e calcular o efeito dessas correções no espectro quasinormal.



# Apêndice A

## Fórmula WKB de sexta ordem

Neste apêndice apresentamos o código escrito para o software MATHEMATICA, que faz uso da fórmula WKB de sexta ordem obtida por Konoplya [29] para calcular as frequências quasinormais.

---

Declaração dos parâmetros

a, b, p, L,  $\beta$

---

$p = p;$

$a = a;$

$b = b;$

$L = L;$

$\beta = 0.0;$

$\alpha_1 = -\frac{1}{2} - \frac{(5-p)}{(7-p)};$

$\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{(5-p)}{(7-p)};$

---

Declaração de algumas funções úteis

---

$A = \frac{\left(1 - \frac{a^{7-p}}{r^{7-p}}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{b^{7-p}}{r^{7-p}}\right)}};$

$B = \sqrt{\left(1 - \frac{b^{7-p}}{r^{7-p}}\right)};$

$$G = \frac{\left(1 - \frac{b^{7-p}}{r^{7-p}}\right)^{\alpha_1}}{\left(1 - \frac{a^{7-p}}{r^{7-p}}\right)};$$

$$H = \left(1 - \frac{b^{7-p}}{r^{7-p}}\right)^{\alpha_2};$$

$$h = \frac{A}{G};$$

$$g = \frac{(8-p)A}{rG} + \frac{1}{2G}D[A, r] + \frac{pA}{2BG}D[B, r] - \frac{A}{2G^2}D[G, r] + \frac{(8-p)A}{2GH}D[H, r];$$

$$v = \frac{1}{r^{\frac{(8-p)}{2}} B^{\frac{p}{4}} H^{\frac{(8-p)}{4}}};$$

$$V = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ \frac{A}{B} \beta - \frac{g}{v} D[v, r] + \frac{AL(L+7-p)}{r^2 H} - \frac{h}{v} D[v, \{r, 2\}] \right], 50 \right];$$

---

Cálculo das derivadas do potencial  $V(r)$

---

$$V1 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V, r] \right], 50 \right];$$

$$V2 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V1, r] \right], 50 \right];$$

$$V3 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V2, r] \right], 50 \right];$$

$$V4 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V3, r] \right], 50 \right];$$

$$V5 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V4, r] \right], 50 \right];$$

$$V6 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V5, r] \right], 50 \right];$$

$$V7 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V6, r] \right], 50 \right];$$

$$V8 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V7, r] \right], 50 \right];$$

$$V9 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V8, r] \right], 50 \right];$$

$$V10 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V9, r] \right], 50 \right];$$

$$V11 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V10, r] \right], 50 \right];$$

$$V12 = \text{SetPrecision} \left[ \text{Simplify} \left[ h^{\frac{1}{2}} D[V11, r] \right], 50 \right];$$

---

Cálculo de  $r_{max}$

---

$$F = \text{SetPrecision}[\mathcal{X}.\text{FindRoot}[V1 == 0, \{x, a + 0.4, a + 1.5\}], 50]$$

---

Fórmula para calcular  $\omega$

---

$$b = 1/2 + v; r = r_{max}$$

$$v = 2;$$

$$N \left[ \text{Sqrt} \left[ V + \frac{1}{8} \times \left( \frac{V^4}{V^2} \right) \times \left( b^2 + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{288} \times (7 + 60 \times b^2) \times \left( \frac{V^3}{V^2} \right)^{\wedge\{2\}} \right. \right.$$

$$\left. - i \times \text{Sqrt}[-2 \times V^2] \times b \right.$$

$$(1 -$$

$$\frac{1}{2 \times V^2} \left( \frac{5}{6912} \times \left( \left( \frac{V^3}{V^2} \right)^{\wedge\{4\}} \right) \times (77 + 188 \times b^2) - \right.$$

$$\frac{1}{384} \times \left( \frac{V^4 \times (V^3)^{\wedge\{2\}}}{(V^2)^{\wedge\{3\}}} \right) \times (51 + 100 \times b^2) +$$

$$\frac{1}{2304} \times \left( \left( \frac{V^4}{V^2} \right)^{\wedge\{2\}} \right) \times (67 + 68 \times b^2) + \frac{1}{288} \times \left( \frac{V^5 \times (V^3)}{(V^2)^{\wedge\{2\}}} \right) \times (19 + 28 \times b^2) -$$

$$\frac{1}{288} \times \left( \frac{V^6}{V^2} \right) \times (5 + 4 \times b^2) \Big) +$$

$$i \times \sqrt{-2 \times V^2} \times$$

$$\left( \frac{1}{597196800 \sqrt{2} (V^2)^7 \sqrt{-V^2}} \right.$$

$$(i (2536975 (V^3)^6 - 9886275 (V^2) (V^3)^4 (V^4) + 5319720 (V^2)^2 (V^3)^3 (V^5) -$$

$$225 V^2 V^3 V^2 (-40261 V^4 + 9688 V^2 V^6) +$$

$$3240 V^2 V^3 V^3 (-1889 V^4 V^5 + 220 V^2 V^7) -$$

$$729 V^2 V^3 (1425 V^4 V^3 - 1400 V^2 V^4 V^6 + 8 V^2 (-123 V^5 + 25 V^2 V^8))) +$$

$$\frac{1}{4976640 \sqrt{2} (V^2)^7 \sqrt{-V^2}}$$

$$(i (348425 V^3 V^6 - 1199925 V^2 V^3 V^4 V^4 + 572760 V^2 V^2 V^3 V^5 -$$

$$45 V^2 V^3 V^2 (-20671 V^4 + 4552 V^2 V^6) + 1080 V^2 V^3 V^3 (-489 V^4 V^5 + 52 V^2 V^7) -$$

$$27 V^2 V^3 (2845 V^4 V^3 - 2360 V^2 V^4 V^6 + 56 V^2 (-31 V^5 + 5 V^2 V^8))) b^2) +$$

$$\frac{1}{2488320 \sqrt{2} (V^2)^7 \sqrt{-V^2}}$$

$$(i (192925 V^3 V^6 - 581625 V^2 V^3 V^4 V^4 + 234360 V^2 V^2 V^3 V^5 -$$

$$45 V^2 V^3 V^2 (-8315 V^4 + 1448 V^2 V^6) + 1080 V^2 V^3 V^3 (-161 V^4 V^5 + 12 V^2 V^7) -$$

$$27 V^2 V^3 (625 V^4 V^3 - 440 V^2 V^4 V^6 + 8 V^2 (-63 V^5 + 5 V^2 V^8))) b^4) -$$

$$i \times \sqrt{-2 V^2} \times$$

$$\left( \frac{1}{7166361600 V^{10}} \right.$$

$$((1 + 2v) (15552 V^{10} V^2 (15 + 16v + 18v^2 + 4v^3 + 2v^4) -$$

$$\begin{aligned}
& 720V^2V^3V^5 (504060 + 1171942v + 1640011v^2 + 936138v^3 + 468069v^4) - \\
& 175V^3^8 (916705 + 2411163v + 3552504v^2 + 2282682v^3 + 1141341v^4) + \\
& 300V^2V^3^6V^4 (2493131 + 6188289v + 8909532v^2 + 5442486v^3 + \\
& 2721243v^4) - 4320V^2^3V^3^3 \\
& (8V^2V^7 (1306 + 2535v + 3270v^2 + 1470v^3 + 735v^4) - \\
& 5V^4V^5 (35282 + 75366v + 102603v^2 + 54474v^3 + 27237v^4)) + \\
& 90V^2^2V^3^4 (8V^2V^6 (194828 + 416530v + 560485v^2 + 287910v^3 + 143955v^4) - \\
& 25V^4^2 (459337 + 1060403v + 1485968v^2 + 851130v^3 + 425565v^4)) - \\
& 27V^2^4 (-80V^2V^4^2V^6 (11220 + 16342v + 19471v^2 + 6258v^3 + 3129v^4) + \\
& 25V^4^4 (30885 + 49927v + 60616v^2 + 21378v^3 + 10689v^4) + \\
& 32V^2^2 (36V^5V^7 (199 + 288v + 354v^2 + 132v^3 + 66v^4) + \\
& V^6^2 (3495 + 4538v + 5324v^2 + 1572v^3 + 786v^4)) + \\
& 576V^2V^4 (15V^2V^8 (15 + 19v + 22v^2 + 6v^3 + 3v^4) - \\
& V^5^2 (2196 + 3647v + 4676v^2 + 2058v^3 + 1029v^4))) - \\
& 432V^2^4V^3 (-240V^2V^4V^7 (366 + 611v + 758v^2 + 294v^3 + 147v^4) + \\
& 25V^4^2V^5 (24692 + 46362v + 60621v^2 + 28518v^3 + 14259v^4) + \\
& 4V^2 (5V^2V^9 (255 + 368v + 434v^2 + 132v^3 + 66v^4) - \\
& V^5V^6 (30107 + 51174v + 64992v^2 + 27636v^3 + 13818v^4))) + \\
& 540V^2^3V^3^2 (-24V^2V^4V^6 (15498 + 29590v + 38515v^2 + 17850v^3 + 8925v^4) + \\
& 25V^4^3 (31015 + 64549v + 87124v^2 + 45150v^3 + 22575v^4) + \\
& 8V^2 (2V^2V^8 (1325 + 2263v + 2794v^2 + 1062v^3 + 531v^4) - \\
& V^5^2 (28643 + 55916v + 74228v^2 + 36624v^3 + 18312v^4)))))) - \\
& i \times \sqrt{-2V^2} \times \\
& (- (i (-171460800V^{12}V^2^9 + 1714608000V^{11}V^2^8V^3 - 10268596800V^{10}V^2^7V^3^2 + \\
& 970010662775V^3^{10} + 3772137600V^{10}V^2^8V^4 - 6262634175525V^2V^3^8V^4 + \\
& 13782983196150V^2^2V^3^6V^4^2 - 11954148125850V^2^3V^3^4V^4^3 + \\
& 3449170577475V^2^4V^3^2V^4^4 - 144528059025V^2^5V^4^5 + \\
& 3352602187200V^2^2V^3^7V^5 - 12300730092000V^2^3V^3^5V^4V^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 11994129604800V^2V^3V^4V^5 - 2624788605600V^2V^3V^4V^5 + \\
& 2580769643760V^2V^3V^4V^5 - 3453909784416V^2V^3V^4V^5 + \\
& 438440697072V^2V^4V^5 + 260524397952V^2V^3V^5 - \\
& 1475306441280V^2V^3V^6 + 4329682610400V^2V^3V^4V^6 - \\
& 2865128172480V^2V^3V^4V^6 + 233443879200V^2V^4V^6 - \\
& 1660199804928V^2V^3V^5V^6 + 1281705296256V^2V^3V^4V^5V^6 - \\
& 87403857408V^2V^5V^6 + 231105873600V^2V^3V^6 - \\
& 68412859200V^2V^4V^6 + 552968700480V^2V^3V^7 - \\
& 1231789749120V^2V^3V^4V^7 + 470726303040V^2V^3V^4V^7 + \\
& 413953400448V^2V^3V^5V^7 - 126242178048V^2V^4V^5V^7 - \\
& 91489305600V^2V^3V^6V^7 + 5619715200V^2V^7 - \\
& 175752294480V^2V^3V^4V^8 + 271759652640V^2V^3V^4V^8 - \\
& 39736040400V^2V^4V^8 - 73378363968V^2V^3V^5V^8 + \\
& 9773265600V^2V^6V^8 + 47107126080V^2V^3V^9 - \\
& 43345290240V^2V^3V^4V^9 + 7400248128V^2V^5V^9)) / \\
& \left( 202263389798400\sqrt{2}(V^2)^{12}\sqrt{-V^2} \right) + \\
& - (i(-4551552V^{12}V^9 + 60279552V^{11}V^8V^3 - 425036160V^{10}V^7V^3 + \\
& 73727194625V^3^{10} + 116743680V^{10}V^8V^4 - 443649208275V^2V^3^8V^4 + \\
& 901144103850V^2V^3^6V^4 - 711096726150V^2V^3^4V^4 + \\
& 182164306725V^2V^3^2V^4 - 6289615575V^2V^4 + \\
& 222467624400V^2V^3^7V^5 - 746418445200V^2V^3^5V^4V^5 + \\
& 653423900400V^2V^3^3V^4V^5 - 124319674800V^2V^3V^4^3V^5 + \\
& 143980943040V^2V^3^4V^5 - 169712521920V^2V^3^2V^4V^5 + \\
& 18188188416V^2V^4V^5 + 11240861184V^2V^3V^5 - \\
& 91198200240V^2V^3V^6 + 241513732080V^2V^3V^4V^6 - \\
& 140030897040V^2V^3V^4V^6 + 9200103120V^2V^4V^6 - \\
& 84218693760V^2V^3V^5V^6 + 55248386688V^2V^3V^4V^5V^6 - \\
& 3173043456V^2V^5V^6 + 10464952896V^2V^3V^6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2403421632V^2V^7V^4V^6 + 31637744640V^2V^4V^3V^5V^7 - \\
& 62649953280V^2V^3V^3V^4V^7 + 20409822720V^2V^3V^4V^2V^7 + \\
& 18860532480V^2V^3V^2V^5V^7 - 4693344768V^2V^4V^5V^7 - \\
& 3625731072V^2V^3V^6V^7 + 188054784V^2V^8V^7 - 9155635200V^2V^3V^4V^8 + \\
& 12238024320V^2V^3V^2V^4V^8 - 1405278720V^2V^4V^2V^8 - \\
& 2866700160V^2V^3V^5V^8 + 303295104V^2V^8V^6V^8 + 2210705280V^2V^3V^3V^9 - \\
& 1685525760V^2V^3V^4V^9 + 235488384V^2V^8V^5V^9) \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \Big/ \\
& \left(687970713600\sqrt{2}(V^2)^{12}\sqrt{-V^2}\right) + \\
& - \left(i \left(-66528V^{12}V^2 + 1245888V^{11}V^2V^3 - 11158560V^{10}V^2V^3V^2 + \right.\right. \\
& 4668804525V^3^{10} + 2116800V^{10}V^2V^8V^4 - 25898331375V^2V^3V^8V^4 + \\
& 47959232650V^2V^3V^6V^4 - 33861927750V^2V^3V^4V^3 + \\
& 7454763225V^2V^4V^3V^4 - 184988475V^2V^5V^4 + 11891917800V^2V^3V^7V^5 - \\
& 36105463800V^2V^3V^5V^4V^5 + 27953667000V^2V^3V^4V^2V^5 - \\
& 4457716200V^2V^3V^4V^3V^5 + 6285855240V^2V^3V^4V^5V^2 - \\
& 6471756144V^2V^3V^2V^4V^5 + 565259688V^2V^4V^2V^5 + \\
& 380939328V^2V^3V^5V^3 - 4375251160V^2V^3V^6V^6 + \\
& 10317018600V^2V^4V^3V^4V^6 - 5113813320V^2V^3V^2V^4V^6 + \\
& 238888440V^2V^4V^3V^6 - 3203871552V^2V^3V^3V^5V^6 + \\
& 1758685824V^2V^3V^4V^5V^6 - 88566912V^2V^5V^2V^6 + \\
& 335466432V^2V^3V^2V^6 - 55073088V^2V^7V^4V^6 + 1351294560V^2V^3V^5V^7 - \\
& 2341442880V^2V^3V^3V^4V^7 + 626542560V^2V^3V^4V^2V^7 + \\
& 619520832V^2V^3V^2V^5V^7 - 123524352V^2V^4V^5V^7 - \\
& 96574464V^2V^3V^6V^7 + 4048704V^2V^8V^7 - 341160120V^2V^3V^4V^8 + \\
& 386210160V^2V^3V^2V^4V^8 - 30837240V^2V^4V^2V^8 - 78073632V^2V^3V^5V^8 + \\
& 5848416V^2V^8V^6V^8 + 70415520V^2V^3V^3V^9 - 43424640V^2V^3V^4V^9 + \\
& 5255712V^2V^8V^5V^9) \left(v + \frac{1}{2}\right)^4 \Big/ \left(20065812480\sqrt{2}(V^2)^{12}\sqrt{-V^2}\right) + \\
& - \left(i \left(-72576V^{12}V^2 + 1886976V^{11}V^2V^3 - 22135680V^{10}V^2V^3V^2 + \right.\right. \\
& 27463538375V^3^{10} + 2903040V^{10}V^2V^8V^4 - 141448688325V^2V^3V^8V^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 240655765350V^2V^3V^4^2 - 152907158250V^2^3V^3^4V^4^3 + \\
& 28724479875V^2^4V^3^2V^4^4 - 413669025V^2^5V^4^5 + 59058073200V^2^2V^3^7V^5 - \\
& 164264209200V^2^3V^3^5V^4V^5 + 113654696400V^2^4V^3^3V^4^2V^5 - \\
& 15166342800V^2^5V^3V^4^3V^5 + 26061194880V^2^4V^3^4V^5^2 - \\
& 23876233920V^2^5V^3^2V^4V^5^2 + 1767189312V^2^6V^4^2V^5^2 + \\
& 1292433408V^2^6V^3V^5^3 - 18902165520V^2^3V^3^6V^6 + \\
& 40256773200V^2^4V^3^4V^4V^6 - 17116974000V^2^5V^3^2V^4^2V^6 + \\
& 483582960V^2^6V^4^3V^6 - 11384150400V^2^5V^3^3V^5V^6 + \\
& 5285056896V^2^6V^3V^4V^5V^6 - 246903552V^2^7V^5^2V^6 + \\
& 992779200V^2^6V^3^2V^6^2 - 101860416V^2^7V^4V^6^2 + 4966859520V^2^4V^3^5V^7 - \\
& 7661606400V^2^5V^3^3V^4V^7 + 1683037440V^2^6V^3V^4^2V^7 + \\
& 1861574400V^2^6V^3^2V^5V^7 - 316141056V^2^7V^4V^5V^7 - \\
& 235146240V^2^7V^3V^6V^7 + 8895744V^2^8V^7^2 - 1042372800V^2^5V^3^4V^8 + \\
& 1016789760V^2^6V^3^2V^4V^8 - 52436160V^2^7V^4^2V^8 - \\
& 189060480V^2^7V^3V^5V^8 + 9217152V^2^8V^6V^8 + 175190400V^2^6V^3^3V^9 - \\
& 87816960V^2^7V^3V^4V^9 + 10378368V^2^8V^5V^9) \left(v + \frac{1}{2}\right)^6 \Big/ \\
& \left(300987187200\sqrt{2}(V^2)^{12}\sqrt{-V^2}\right)\Bigg] \\
& \{0.705511 - 0.732056i\}
\end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] T. Regge, J. A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, **108**:1063–1069 (1957). [14](#), [41](#)
- [2] C. V. Vishveshwara. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole. *Nature*, **227**:936–938 (1970). [14](#), [42](#)
- [3] F. J. Zerilli. Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, **24**:737–738 (1970). [14](#), [41](#)
- [4] W. H. Press. Long Wave Trains of Gravitational Waves from a Vibrating Black Hole. *Astrophys. J.*, **170**:L105–L108 (1971). [14](#)
- [5] J. M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:231–252 (1998). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9711200>. [14](#), [15](#), [38](#), [49](#), [51](#), [52](#)
- [6] G. T. Horowitz, V. E. Hubeny. Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Phys. Rev.*, **D62**:024027 (2000). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9909056>. [14](#)
- [7] D. Birmingham, I. Sachs, S. N. Solodukhin. Conformal field theory interpretation of black hole quasi-normal modes. *Phys. Rev. Lett.*, **88**:151301 (2002). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112055>. [14](#), [55](#)
- [8] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, **69**:1849–1851 (1992). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9204099>. [15](#)



- [9] G. T. Horowitz, A. Strominger. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys.*, **B360**:197–209 (1991). 15, 33, 34, 35
- [10] S. S. Gubser. Phase transitions near black hole horizons. *Class. Quant. Grav.*, **22**:5121–5144 (2005). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0505189>. 15, 78
- [11] C. P. Herzog. Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity. *J. Phys.*, **A42**:343001 (2009). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0904.1975>. 15
- [12] R. Gregory, S. Kanno, J. Soda. Holographic Superconductors with Higher Curvature Corrections. *JHEP*, **10**:010 (2009). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0907.3203>. 15, 79, 81, 83, 84
- [13] D. T. Son, A. O. Starinets. Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57**:95–118 (2007). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0704.0240>. 16, 52, 53, 54
- [14] R. Argurio. *Brane Physics in M-theory*. Tese de Doutorado, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles (1998). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9807171>. 17
- [15] K. S. Stelle. Lectures on supergravity p-branes (1996). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9701088>. 17
- [16] L. I. Beviláqua. *Branas em Supergravidade*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo (2007). URL <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-29032007-211600/>. 17
- [17] C. V. Johnson. *D-Branes*. Cambridge University Press (2003). 33, 38, 51
- [18] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory*, volume II. Cambridge University Press (1987). 33
- [19] R. Adler. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill (1975). 36

- [20] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, *et al.* Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, **323**:183–386 (2000). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9905111>. 38, 49, 75
- [21] I. R. Klebanov. TASI lectures: Introduction to the AdS/CFT correspondence (2000). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0009139>. 38, 49
- [22] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press (1985). 41, 63
- [23] K. D. Kokkotas, B. G. Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Rev. Rel.*, **2**:2 (1999). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9909058>. 43, 44
- [24] H.-P. Nollert. Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Class. Quant. Grav.*, **16**:R159–R216 (1999). 43, 44
- [25] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quant. Grav.*, **26**:163001 (2009). <http://arxiv.org/abs/0905.2975>. 43
- [26] E. S. C. Ching, P. T. Leung, W. M. Suen, K. Young. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. *Phys. Rev.*, **D52**:2118–2132 (1995). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9507035>. 44, 45, 73
- [27] B. F. Schutz, C. M. Will. *Astrophys. J.*, **291**:L33–36 (1985). 45
- [28] S. Iyer, C. M. Will. Black Hole Normal Modes: A WKB Approach. 1. Foundations and Application of a Higher Order WKB Analysis of Potential Barrier Scattering. *Phys. Rev.*, **D35**:3621 (1987). 45
- [29] R. A. Konoplya. Quasinormal behavior of the d-dimensional Schwarzschild black hole and higher order WKB approach. *Phys. Rev.*, **D68**:024018 (2003). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0303052>. 45, 61, 89

- [30] C. M. Mendes. *Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo (2003). 47, 61
- [31] B. Wang, C. Molina, E. Abdalla. Evolving of a massless scalar field in Reissner-Nordstroem Anti-de Sitter spacetimes. *Phys. Rev.*, **D63**:084001 (2001). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0005143>. 47, 61
- [32] C. Molina, D. Giugno, E. Abdalla, A. Saa. Field propagation in the Reissner-Nordstroem-de Sitter black hole. *Phys. Rev.*, **D69**:104013 (2004). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0309079>. 47
- [33] C. Molina. Quasinormal modes of d-dimensional spherical black holes with near extreme cosmological constant. *Phys. Rev.*, **D68**:064007 (2003). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0304053>. 47
- [34] J. Morgan, V. Cardoso, A. S. Miranda, C. Molina, *et al.* Quasinormal modes of black holes in anti-de Sitter space: a numerical study of the eikonal limit. *Phys. Rev.*, **D80**:024024 (2009). <http://arxiv.org/abs/0906.0064>. 47
- [35] G. 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys.*, **B72**:461 (1974). 50, 52
- [36] J. Polchinski. Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:4724–4727 (1995). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9510017>. 50
- [37] L. Susskind, J. Lindsay. *An Introduction to Black Holes, Information and String Theory Revolution*. World Scientific Publishing (2005). 51
- [38] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, **B428**:105–114 (1998). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9802109>. 53
- [39] E. Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:253–291 (1998). <http://arxiv.org/abs/hep-th/9802150>. 53, 54

- [40] D. T. Son, A. O. Starinets. Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications. *JHEP*, **09**:042 (2002). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0205051>. 54
- [41] E. Abdalla, O. P. F. Piedra, J. de Oliveira. Perturbations of black  $p$ -branes. *Phys. Rev.*, **D81**:064001 (2010). <http://arxiv.org/abs/0810.5489>. 57
- [42] E. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions*, volume II. Bateman Manuscript Project, New York (1953). 60
- [43] V. Cardoso. *Quasinormal modes as gravitational radiation in black hole spacetimes*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa (2003). URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0404093>. 72
- [44] R. H. Price. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. 1. Scalar and gravitational perturbations. *Phys. Rev.*, **D5**:2419–2438 (1972). 73
- [45] H. Koyama, A. Tomimatsu. Asymptotic tails of massive scalar fields in Schwarzschild background. *Phys. Rev.*, **D64**:044014 (2001). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0103086>. 75
- [46] Q. Pan, B. Wang, E. Papantonopoulos, J. Oliveira, *et al.* Holographic Superconductors with various condensates in Einstein-Gauss-Bonnet gravity. *Phys. Rev.*, **D81**:106007 (2010). <http://arxiv.org/abs/0912.2475>. 78, 79, 84, 87
- [47] S. S. Gubser. Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon. *Phys. Rev.*, **D78**:065034 (2008). <http://arxiv.org/abs/0801.2977>. 78, 79
- [48] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, G. T. Horowitz. Building a Holographic Superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, **101**:031601 (2008). <http://arxiv.org/abs/0803.3295>. 79
- [49] S. A. Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class. Quant. Grav.*, **26**:224002 (2009). <http://arxiv.org/abs/0903.3246>. 79

- [50] C. P. Herzog. Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity. *J. Phys.*, **A42**:343001 (2009). <http://arxiv.org/abs/0904.1975>. 79
- [51] M. Ammon, J. Erdmenger, M. Kaminski, P. Kerner. Superconductivity from gauge/gravity duality with flavor. *Phys. Lett.*, **B680**:516–520 (2009). <http://arxiv.org/abs/0810.2316>. 79
- [52] S. S. Gubser, C. P. Herzog, S. S. Pufu, T. Tesileanu. Superconductors from Superstrings. *Phys. Rev. Lett.*, **103**:141601 (2009). <http://arxiv.org/abs/0907.3510>. 79
- [53] J. P. Gauntlett, J. Sonner, T. Wiseman. Holographic superconductivity in M-Theory. *Phys. Rev. Lett.*, **103**:151601 (2009). <http://arxiv.org/abs/0907.3796>. 79
- [54] R.-G. Cai. Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces. *Phys. Rev.*, **D65**:084014 (2002). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0109133>. 80
- [55] H. Kodama, A. Ishibashi. A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, **110**:701–722 (2003). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0308128>. 87
- [56] O. P. F. Piedra, J. de Oliveira. Vacuum polarization effects on quasinormal modes in electrically charged black hole spacetimes. *Int. J. Mod. Phys.*, **D19**:63–78 (2010). <http://arxiv.org/abs/0902.1487>. 87