

О СВЯЗИ СПИНА И СТАТИСТИКИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. А. Плетюхов, В. И. Стражев

Брестский педагогический институт им. А. С. Пушкина*

ON THE CONNECTION BETWEEN SPIN AND STATISTICS IN THE FIELD THEORY

BY V. A. PLETYUKHOV AND V. I. STRAZHEV

A. S. Puschkin Pedagogical Institute, Brest

(Received November 18, 1987)

The connection between spin and statistics in the theory of Relativistic Wave Equations (RWE) is investigated. The well-known Pauli theorem appears as a particular case.

PACS numbers: 11.10.Qr

1. Введение

Как было замечено Дираком [1] и Паули [2], однозначная связь между спином и статистикой теряется при использовании индефинитной метрики. В работе [2] показана возможность квантового описания скалярного фермиона и бозона со спином $\frac{1}{2}$ без нарушения причинности. Но при этом возникают физически бессмысленные отрицательные вероятности. Если рассмотреть возможность такого квантования в присутствии изоспиновых степеней свободы, описываемых компактными группами, то последний вывод остается в силе. Положение, однако, радикально изменяется в теориях с некомпактными группами внутренней симметрии. Здесь оказывается возможным не только непротиворечивое с точки зрения причинности квантование целого и полуцелого спинов по „чужой” статистике, но и достижение при этом вероятностной интерпретации теории.

В настоящей работе данная проблема исследована в общем виде в рамках теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Определены условия, при которых может быть осуществлено корректное квантование целого и полуцелого

* Address: Pedagogical Institute, Cosmonavtov Av. 21, Brest, 224665, USSR.

спинов как по статистике Бозе-Эйнштейна, так и по Ферми-Дираку. Известная теорема Паули о связи спина и статистики и упомянутые выше результаты работы [2] содержатся в развитом подходе в качестве частных (предельных) случаев.

2. РВУ с изоспиновыми степенями свободы и набором спиновых состояний

Запишем РВУ первого порядка¹

$$(\gamma_\mu \hat{e}_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

волновая функция $\psi(x)$ которого преобразуется по набору неприводимых представлений τ_{l_1, l_2} собственной группы Лоренца. В базисе Гельфанда-Яглома [3, 4] матрица γ_4 , которая содержит в себе основную физическую информацию, относящуюся к данному уравнению, имеет в общем случае вид прямой суммы

$$\gamma_4 = \oplus \sum C^l \otimes I_{2l+1}, \quad (2)$$

где I_{2l+1} — единичная клетка размерности $(2l+1) \times (2l+1)$, C^l — блок, сопоставляемый спину l ($|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2$) в том смысле, что если C^l имеет ненулевые корни, то частица обладает данным спином. Корни спиновых блоков C^l определяют также спектр массовых состояний частицы.

Мы будем в дальнейшем рассматривать РВУ с одной массой и, вообще говоря, набором спиновых состояний. Блоки C^l , а значит и матрица γ_4 таких РВУ содержат только один (с точностью до знака) ненулевой корень ± 1 , причем знак „+” отвечает положительно-частотным, а „-” — отрицательно-частотным решениям.

В данном формализме наличие у частицы помимо спиновых дополнительных внутренних (изоспиновых) степеней свободы выражается в том, что в характеристическом полиноме, по крайней мере, одного из блоков C^l ненулевой корень является кратным². Этим степеням свободы можно сопоставить некоторый оператор $\hat{P}$, коммутирующий с операторами 4-импульса $\hat{p} = i p_\mu \gamma_\mu$, квадрата спина $\hat{S}^2$ и проекции спина $\hat{S}_3$. Оператор $\hat{P}$ содержится среди генераторов соответствующей группы внутренней симметрии или же является общим элементом алгебры Ли этой группы. В каждом конкретном случае его вид определяется физической интерпретацией полевой системы и присущих ей изоспиновых степеней свободы.

Чтобы не сужать общность рассмотрения вопроса, не будем накладывать каких-либо существенных ограничений на вид оператора $\hat{P}$ за исключением естественного предположения о том, что он, как и операторы $\hat{S}^2$ и $\hat{S}_3$, приводит к диагональному виду и коммутирует с матрицей билинейной формы η . Собственные значения оператора $\hat{P}$, которые будем называть P -четностью, обозначим через λ_i (индекс i нумерует допустимые значения P -четности). Поскольку кратность ненулевого

¹ По повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование.

² В этой связи напомним, что кратность ненулевых корней минимального полинома матрицы γ_4 и ее спиновых блоков не может превышать единицу [5].

корня в различных спиновых блоках может быть разной, это означает, что фиксированное значение P -четности присуще, вообще говоря, не каждому спиновому состоянию, т.е. данному значению спина отвечает свой набор значений P -четности. Можно трактовать такую ситуацию и иначе: считать, что состоянию с фиксированной P -четностью соответствует определенный спектр спиновых состояний.

В дальнейшем мы будем широко использовать метод проективных операторов Федорова [6, 7]. Для возможности его применения к рассматриваемому классу РВУ необходимо помимо проективных операторов $\kappa_{\pm}(\hat{p})$ и β_k , выделяющих состояния с данным импульсом, знаком массы и проекцией спина, ввести в рассмотрение проективные операторы спина (в смысле абсолютной величины) S_l^2 и P -четности π_i , выделяющие соответственно состояния с данным спином и данной P -четностью.

Оператор S_l^2 определяется соотношениями

$$S_l^2 = Q_l(\hat{S}^2)/Q_l[l(l+1)], \quad [\hat{S}^2 - l(l+1)]Q_l(\hat{S}^2) \equiv Q_l(\hat{S}^2) = 0, \quad (3)$$

где l — квантовое число, характеризующее спин частицы, $Q(\hat{S}^2)$ — минимальный полином оператора спина $\hat{S}^2$, $Q_l(\hat{S}^2)$ — урезанный минимальный полином, отвечающий спину l . Аналогично определяется проективный оператор P -четности:

$$\pi_i = P_i(\hat{P})/P_i(\lambda_i), \quad (\hat{P} - \lambda_i)P_i(\hat{P}) \equiv P(\hat{P}) = 0, \quad (4)$$

где $P(\hat{P})$ — минимальный полином матрицы $\hat{P}$, $P_i(\hat{P})$ — урезанный минимальный полином. Проективные операторы S_l^2 и π_i , так же как и β_k , удовлетворяют соотношению

$$\sum_k \beta_k = \sum_l S_l^2 = \sum_i \pi_i = I. \quad (5)$$

(Заметим, что для выполнения условий (5) существенным моментом является приводимость операторов спина, проекции спина и P -четности к диагональному виду).

Проективный оператор, выделяющий единственное состояние с фиксированными значениями импульса, знака массы, P -четности, спина и проекции спина, будет иметь вид:

$$\tau_{ik}^{(\pm)}(\hat{p}) = \kappa_{\pm}(\hat{p})\pi_i S_l^2 \beta_k. \quad (6)$$

Рассуждая аналогично [7], можно показать, что при условии коммутации матриц $\hat{P}$ и η знак плотности энергии в данном состоянии определяется знаком выражения $\text{Sp}(\tau_{ik}^{(\pm)}\eta)$ в системе покоя частицы, а знак плотности заряда совпадает со знаком $\text{Sp}(\gamma_4 \tau_{ik}^{(\pm)}\eta)$. Анализ этих выражений для уравнений с одним значением спина и без P -четности показывает [7], что знаки плотности энергии (заряда), во-первых, не зависят от проекции спина и, во-вторых, указанные знаки в положительно-частотных и отрицательно-частотных состояниях одинаковы в случае целого (полуцелого) и противоположны в случае полуцелого (целого) спина. Иными словами, для целого спина энергия дефинитна, заряд индефинитен, а для полуцелого наоборот — энергия индефинитна, заряд дефинитен.

В случае уравнений с P -четностью и набором спинов знаки энергии и заряда будут зависеть, вообще говоря, от квантовых чисел i и l . Чтобы учесть эту зависимость, введем нормировочную переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значение которой соответствует знаку плотности энергии в состоянии $\psi_{is}^{(\pm)}$, т.е.

$$g_{is}^{(\pm)} = \text{Sign} [\text{Sp} (\tau_{is}^{(\pm)} \eta)]. \quad (7)$$

(Здесь и далее под индексом s для удобства будем понимать объединенный индекс $\{lk\}$, который характеризует спиновое состояние частицы как в смысле абсолютной величины спина, так и его проекции).

Немаловажным является также то обстоятельство, что для рассматриваемого класса РВУ теряется строго определенное соответствие между знаками плотности энергии (и заряда) в положительно- и отрицательно-частотных состояниях, с одной стороны, и целочисленным либо полуцелочисленным характером спина, с другой. Так, в зависимости от типа уравнения и способа задания оператора $\hat{P}$ для плотности энергии в случае целого спина наряду с „обычным” соответствием, когда

$$g_{is}^{(+)} = g_{is}^{(-)}, \quad (8)$$

может выполняться и равенство

$$g_{is}^{(+)} = -g_{is}^{(-)}. \quad (9)$$

Аналогично для полуцелого спина возможно выполнение как условия (9), так и (8). Плотность заряда имеет (для любого спина) противоположные знаки в состояниях $\psi_{is}^{(+)}$ и $\psi_{is}^{(-)}$ в случае (8) и одинаковые в случае (9).

Рассмотрим подробно ситуацию, когда для целого спина выполняется условие (8), а для полуцелого — условие (9). Вводя обозначение $g_{is}^{(+)} = g_{is}$, для наглядности изобразим получающееся при этом соответствие знаков плотности энергии и заряда различным состояниям частицы с помощью таблицы.

Возвращаясь теперь к проективному оператору (6), перепишем его в виде (см. [7])

$$\tau_{is}^{(\pm)}(\hat{p}) = c\psi_{is}^{(\pm)}(p) \cdot \bar{\psi}_{is}^{(\pm)}(p), \quad (10)$$

где $\bar{\psi} = \psi^* \eta$, точка означает прямое (диадное) произведение, т.е. $\psi \cdot \varphi \equiv \psi_\alpha \varphi_\beta$. Пользуясь нормировкой по заряду, в соответствии с таблицей будем иметь

$$\bar{\psi}_{is}^{(\pm)} \gamma_4 \psi_{is}^{(\pm)} = \pm g_{is}, \quad \bar{\psi}_{is}^{(\pm)} \psi_{is}^{(\pm)} = \pm \frac{m}{p_0} g_{is} = \frac{m}{|p_0|} g_{is} \quad (11)$$

ТАБЛИЦА

Состояние	Целый спин		Полуцелый спин	
	энергия	заряд	энергия	заряд
$\psi_{is}^{(+)}$	g_{is}	g_{is}	g_{is}	g_{is}
$\psi_{is}^{(-)}$	g_{is}	$-g_{is}$	$-g_{is}$	g_{is}

для целого спина и

$$\bar{\psi}_{is}^{(\pm)} \gamma_4 \psi_{is}^{(\pm)} = g_{is}, \quad \bar{\psi}_{is}^{(\pm)} \psi_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{p_0} g_{is} = \pm \frac{m}{|p_0|} g_{is} \quad (12)$$

для полуцелого. Отсюда, учитывая, что $\text{Sp } \tau_{is}^{(\pm)} = 1$ и $(g_{is})^2 = 1$, найдем нормировочный множитель c , а значит и выражения для матриц-диад $\psi \cdot \bar{\psi}$ через проективный оператор τ , которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\psi_{is}^{(\pm)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|} g_{is} \tau_{is}^{(\pm)} \quad (\text{целый спин}), \quad (13)$$

$$\psi_{is}^{(\pm)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(\pm)} = \pm \frac{m}{|p_0|} g_{is} \tau_{is}^{(\pm)} \quad (\text{полуцелый спин}). \quad (14)$$

3. Квантование

С учетом квантового числа i , отвечающего Π -четности, разложение операторных волновых функций $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, основанное на использовании операторов рождения и уничтожения вида $a_{is}(p)$, $b_{is}(p)$, $a_{is}(p)$, $b_{is}(p)$, при переходе ко вторично-квантованной теории запишется так:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sum_s^+ \int \{a_{is}(p) \psi_{is}^{(+)}(p) e^{ipx} + b_{is}(p) \psi_{is}^{(-)}(-p) e^{-ipx}\} d^3 p, \quad (15)$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sum_s^+ \int \{a_{is}(p) \bar{\psi}_{is}^{(+)}(p) e^{-ipx} + b_{is}(p) \bar{\psi}_{is}^{(-)}(-p) e^{ipx}\} d^3 p. \quad (16)$$

Подставляя разложения (15), (16) в выражения для заряда

$$Q = \int Q d^3 x = e \int \bar{\psi}(x) \gamma_4 \psi(x) d^3 x \quad (17)$$

и энергии

$$E = \int \omega d^3 x = \int \{(\partial_4 \bar{\psi}) \gamma_4 \psi - \bar{\psi} \gamma_4 \partial_4 \psi\} d^3 x, \quad (18)$$

получим

$$Q = e \left\{ \sum_i \sum_s^+ a_{is} a_{is} (\bar{\psi}_{is}^{(+)} \gamma_4 \psi_{is}^{(+)}) + \sum_i \sum_s^+ b_{is} b_{is} (\bar{\psi}_{is}^{(-)} \gamma_4 \psi_{is}^{(-)}) \right\}, \quad (19)$$

$$E = \sum_i \sum_s^+ a_{is} a_{is} |p_0| (\bar{\psi}_{is}^{(+)} \gamma_4 \psi_{is}^{(+)}) - \sum_i \sum_s^+ b_{is} b_{is} |p_0| (\bar{\psi}_{is}^{(-)} \gamma_4 \psi_{is}^{(-)}). \quad (20)$$

Отсюда, учитывая нормировочные соотношения (11), (12), придем к следующим выражениям для Q и E :

$$Q = e \left\{ \sum_i \sum_s^+ g_{is} a_{is} a_{is} \mp \sum_i \sum_s^+ g_{is} b_{is} b_{is} \right\}, \quad (21)$$

$$E = \sum_i \sum_s^+ g_{is} a_{is} a_{is} |p_0| \pm \sum_i \sum_s^+ g_{is} b_{is} b_{is} |p_0|. \quad (22)$$

В (21), (22) верхние знаки соответствуют целому, а нижние — полуцелому спину.

Рассмотрим сначала квантование по „своей” статистике: целый спин — по Бозе-Эйнштейну, полудельный — по Ферми-Дираку. Постулируем перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$[a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')]_{\mp} = [b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')]_{\mp} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p-p') \quad (23)$$

и все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. В (23) коммутатор отвечает целому, антикоммутатор — полуцелому спину. Операторы числа частиц, соответствующие такому квантованию, определяются следующим образом:

$$n_{is}^{(+)} = g_{is} a_{is} a_{is}, \quad n_{is}^{(-)} = g_{is} b_{is} b_{is}. \quad (24)$$

Выражая из (23) произведение $b_{is} b_{is}$ через $b_{is}^+ b_{is}$ и подставляя с учетом соответствия знаков в (21), (22), приведем величины Q и E к виду (с точностью до бесконечных слагаемых)

$$Q = e \left\{ \sum_i \sum_s^+ g_{is} a_{is} a_{is} - \sum_i \sum_s^+ g_{is} b_{is} b_{is} \right\}, \quad (25)$$

$$E = \sum_i \sum_s^+ g_{is} a_{is} a_{is} |p_0| + \sum_i \sum_s^+ g_{is} b_{is} b_{is} |p_0|, \quad (26)$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов. Отсюда, используя определения (24), получим

$$Q = e \sum_i \sum_s (n_{is}^{(+)} - n_{is}^{(-)}), \quad (27)$$

$$E = \sum_i \sum_s (n_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + n_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)}). \quad (28)$$

(В (28) $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию).

Вычислим выражения $[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp}$ (α, β — индексы компонент ψ), где по-прежнему коммутаторы (антикоммутаторы) отвечают целому (полуцелому) спину:

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} &= (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int \{ [a_{is}, a_{is}]_{\mp} (\psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(+)}) e^{ipx} \\ &\mp [b_{is}, b_{is}]_{\mp} (\psi_{is}^{(-)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(-)}) e^{-ipx} \} d^3 p, \quad (x = x' - x''). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя в (29) при верхнем знаке соотношения (13), а при нижнем — (14) и учитывая условия (23), придем в обоих случаях к правым частям одинакового вида:

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \sum_i \sum_s \int (\tau_{is}^{(+)} e^{ipx} - \tau_{is}^{(-)} e^{-ipx}) \frac{d^3 p}{|p_0|}. \quad (30)$$

Учтем выражение (6) для оператора $\tau_{is}^{(\pm)} \equiv \tau_{ilk}^{(\pm)}$ и то, что в соответствии с тождествами (5) $\sum_i \sum_s \tau_{is}^{(\pm)} = \sum_i \sum_l \sum_k \kappa_{\pm}(\hat{p}) \pi_i S_l^2 \beta_k = \kappa_{\pm}(\hat{p})$. В результате получим

$$[\psi_{\alpha}(x'), \bar{\psi}_{\beta}(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \int \{ \kappa_{+}(\hat{p}) e^{ipx} - \kappa_{-}(\hat{p}) e^{-ipx} \} \frac{d^3 p}{|p_0|}. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств (см. [7])

$$\kappa_{\pm}(\hat{p}) e^{\pm ipx} = \kappa_{\pm}(\pm \hat{V}) e^{\pm ipx}, \quad \kappa_{-}(-\hat{V}) = \kappa_{+}(\hat{V}) \quad (\hat{V} = \gamma_{\mu} \partial_{\mu}). \quad (32)$$

Поэтому $\kappa_{-}(\hat{p}) e^{-ipx} = \kappa_{-}(-\hat{V}) e^{-ipx} = \kappa_{+}(\hat{V}) e^{-ipx}$ и соотношение (31) принимает вид

$$[\psi_{\alpha}(x'), \bar{\psi}_{\beta}(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \kappa_{+}(\hat{V}) \int \frac{d^3 p}{|p_0|} (e^{ipx} - e^{-ipx}) = 2im \kappa_{+}(\hat{V}) \Delta_0(x), \quad (33)$$

где $\Delta_0(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 p}{|p_0|} e^{ipx} \sin |p_0| x_0$ — инвариантная дельта-функция.

Формулы (27), (28) и (33) показывают, что перестановочные соотношения (23) приводят к правильной корпускулярной картине поля и носят причинный характер.

Теперь исследуем возможность квантования рассматриваемого класса РВУ по „чужой” статистике (целый спин — по Ферми-Дираку, полуцелый — по Бозе-Эйнштейну). Для этого постулируем перестановочные соотношения для величин a, b, a и b

$$[a_{is}(p), a_{i's'}^{+}(p')]_{\pm} = -[b_{is}(p), b_{i's'}^{+}(p')]_{\pm} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p-p'), \quad (34)$$

в которых уже антикоммутатор соответствует целому, а коммутатор — полуцелому спину. При таком квантовании операторы числа частиц задаются следующим образом:

$$n_{is}^{(+)} = g_{is} a_{is}^{+} a_{is}, \quad n_{is}^{(-)} = -g_{is} b_{is}^{+} b_{is}. \quad (35)$$

Определяя из (34) $b_{is} b_{is}$ и подставляя в (21), (22), получим одинаковые для обоих типов спина выражения для заряда и энергии

$$Q = e \left\{ \sum_i \sum_s g_{is} a_{is}^{+} a_{is} + \sum_i \sum_s g_{is} b_{is}^{+} b_{is} \right\}, \quad (36)$$

$$E = \sum_i \sum_s g_{is} a_{is}^{+} a_{is} |p_0| - \sum_i \sum_s g_{is} b_{is}^{+} b_{is} |p_0|, \quad (37)$$

которые с учетом (35) приводятся к виду (27), (28) соответственно.

Преобразуя с помощью условий квантования (34) формулу (29), где на этот раз коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, получим:

$$[\psi_{\alpha}(x'), \bar{\psi}_{\beta}(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s g_{is} \{ (\psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(+)} e^{ipx} \pm (\psi_{is}^{(-)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(-)} e^{-ipx}) \} d^3 p. \quad (38)$$

Применим к (38) при верхнем знаке соотношение (14), а при нижнем — (13). В результате придем в обоих случаях к одинаковому выражению, совпадающему с (30).

Таким образом, при квантовании по „чужой” статистике способом (34) получаются правильные выражения для заряда Q и энергии E и перестановочные соотношения для операторных волновых функций имеют причинный характер.

Аналогично проводится анализ и тогда, когда для целого спина выполняется условие (9), а для полуцелого — (8). Корректные (в вышеуказанном смысле) перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения в этом случае имеют вид

$$[a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')]_{\mp} = -[b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')]_{\mp} = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p'), \quad (39)$$

$$[a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')]_{\pm} = [b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')]_{\pm} = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p') \quad (40)$$

при квантовании по „своей” и „чужой” статистикам соответственно.

4. О вероятностной интерпретации теории. Примеры

Квантование с помощью соотношений (23) и (34) приводит к разбиснию гильбертова пространства состояний $\mathcal{H}$ на подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$, в которых квадраты норм векторов состояний являются соответственно положительно и отрицательно определенными (исключение составляет лишь случай, когда в (23) все числа g_{is} имеют одинаковый знак). Если в теории с индефинитной метрикой при включении взаимодействия амплитуда перехода $S_{fh} = \langle h|S|f \rangle$ между состояниями из подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ отлична от нуля, то появляются отрицательные вероятности $P_{fh} = S_{fh}^2 / (||h|| ||f|| (||h||, ||f||))$ — квадраты норм векторов состояний из подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$). Однако такие переходы могут оказаться запрещенными, если в теории наряду со „стандартными” имеются дополнительные законы сохранения, совместно приводящие к необходимым правилам суперотбора (см., напр., [8, 9]).

Для существования дополнительного закона сохранения достаточно, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно фазовых преобразований $\psi \rightarrow e^{i\hat{G}\theta} \psi = \Lambda\psi$, где θ — параметр, $\hat{G}$ — матричный оператор, удовлетворяющий условиям:

$$[\gamma_\mu, \hat{G}]_- = 0, \quad \Lambda^+ \eta \Lambda = \eta, \quad \hat{G} \neq I. \quad (41)$$

Возможность устранения вышеуказанных отрицательных вероятностей предполагает, кроме того, что в структуре матрицы $\hat{G}$ непосредственно учитывается знаконеопределенный характер метрики: во-первых, эта матрица должна быть диагональной в каноническом базисе³; во-вторых, ее собственные значения, отвечающие состояниям $\psi_{is}^{(\pm)}$, должны совпадать со значениями нормировочной переменной g_{is} .

³ Под каноническим понимается базис в пространстве представления волновой функции ψ , образуемый общей полной системой собственных векторов операторов полного набора.

Тогда дополнительный сохраняющийся „заряд” $G \sim \int \bar{\psi}(x) \gamma_4 \hat{G} \psi(x) d^3x$ приводится к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s g_{is} (n_{is}^{(+)} - n_{is}^{(-)}), \quad (42)$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов.

Оставляя пока в стороне вопрос (он будет выяснен на примерах) о принципиальной возможности реализации оператора $\hat{G}$, удовлетворяющего всем сформулированным требованиям, проследим механизм совместного действия законов сохранения зарядов Q (27) и G (42), обеспечивающий исключение отрицательных вероятностей. Для выяснения существа дела достаточно рассмотреть частный случай, когда кратность ненулевого корня в спиновых блоках матрицы γ_4 одинакова и равна двум ($i = 1, 2$). И пусть, например, выполняется условие $g_{1s} = -g_{2s} = 1$. Для „заряда” G (42) получается при этих условиях выражение

$$G \sim \sum_s (n_{1s}^{(+)} - n_{2s}^{(+)} - n_{1s}^{(-)} + n_{2s}^{(-)}). \quad (43)$$

Введем операцию зарядового сопряжения, устанавливающую, как известно, соответствие между состояниями частицы и античастицы. Относительно такой операции должны быть инвариантны перестановочные соотношения для величин a, b, a, b . Применительно к рассматриваемому случаю при квантовании по „своей” статистике перестановочные соотношения (23) инвариантны относительно преобразований $a_{1s} \leftrightarrow b_{1s}, a_{2s} \leftrightarrow b_{2s}, a_{1s} \leftrightarrow b_{1s}, a_{2s} \leftrightarrow b_{2s}$, тогда как при квантовании по „чужой” статистике (перестановочные соотношения (34)) операцию зарядового сопряжения необходимо задавать в виде $a_{1s} \leftrightarrow b_{2s}, a_{2s} \leftrightarrow b_{1s}, a_{1s} \leftrightarrow b_{2s}, a_{2s} \leftrightarrow b_{1s}$, т.е. связывать с ней изменение не только знака электрического заряда, но и значения Π -четности. Отсюда следует, что при первом способе квантования одночастичным состояниям, относящимся к подпространству $\mathcal{H}_+$, будут соответствовать заряды (e, g) и $(-e, -g)$, а состояниям из $\mathcal{H}_-$ — заряды $(e, -g)$ и $(-e, g)$. Очевидно, что для взаимодействий, не нарушающих эту симметрию, совместное выполнение законов сохранения для Q и G приводит к запрету физически бессмысленных переходов между состояниями из $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. При квантовании вторым способом одночастичные состояния в подпространстве $\mathcal{H}_+$ характеризуются значениями зарядов (e, g) и $(-e, g)$, тогда как в $\mathcal{H}_-$ — $(e, -g)$ и $(-e, -g)$. Законы сохранения для Q и G с учетом в необходимых случаях условия сохранения зарядовой четности опять-таки не разрешают переходы, нарушающие вероятностную интерпретацию теории.

Рассмотрим некоторые конкретные типы РВУ, для которых реализуется данная ситуация.

Возьмем сначала случай теории частиц с одним значением спина. Простейший пример — уравнение Дирака с некомпактной группой внутренней симметрии $SU(1, 1)$, описывающее полеую систему со спином $\frac{1}{2}$ и двукратным вырождением

состояний по P -четности. Его волновая функция преобразуется по фундаментальному представлению этой группы. Матрицы γ_μ и η могут быть записаны в виде $\gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu^D$, $\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4^D$, где γ_μ^D — матрицы Дирака ($\gamma_4^D = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$), σ_n — матрицы Паули. В качестве оператора P -четности выберем диагональный оператор $\hat{P} = \sigma_3 \otimes I_4$, коммутирующий с матрицами γ_μ и η . Его собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ($i = 1, 2$). В полный набор наблюдаемых входят операторы 4-импульса, проекции спина и P -четности; оператор квадрата спина по понятным причинам в этот набор не включается. Переменная $g_{is}^{(\pm)}$, вычисленная по формуле (7), принимает значения $g_{1s}^{(+)} = 1$, $g_{1s}^{(-)} = -1$, $g_{2s}^{(+)} = -1$, $g_{2s}^{(-)} = 1$ ($s = k = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$), т.е. имеет место выполнение условия (9). Квантование по „своей” (Ферми-Дирака) статистике осуществляется, следовательно, на основе перестановочных соотношений (23) с антикоммутаторами. В результате, учитывая значения переменной $g_{is} \equiv g_{is}^{(+)}$, получим:

$$\begin{aligned} [a_{1s}(p), a_{1s'}^{+}(p')]_{+} &= [b_{1s}(p), b_{1s'}^{+}(p')]_{+} = \delta_{ss'}\delta(p-p'); \\ [a_{2s}(p), a_{2s'}^{+}(p')]_{+} &= [b_{2s}(p), b_{2s'}^{+}(p')]_{+} = -\delta_{ss'}\delta(p-p'). \end{aligned} \quad (44)$$

При квантовании обсуждаемой полевой системы по „чужой” (Бозе-Эйнштейна) статистике будем согласно (34) иметь:

$$\begin{aligned} [a_{1s}(p), a_{1s'}^{+}(p')]_{-} &= [b_{2s}(p), b_{2s'}^{+}(p')]_{-} = \delta_{ss'}\delta(p-p'), \\ [a_{2s}(p), a_{2s'}^{+}(p')]_{-} &= [b_{1s}(p), b_{1s'}^{+}(p')]_{-} = -\delta_{ss'}\delta(p-p'). \end{aligned} \quad (45)$$

Оператор $\hat{G}$, строящийся из чисел g_{is} вышеуказанным способом, принимает вид $\hat{G} = \sigma_3 \otimes I_4 = \hat{P}$, совпадающий с видом оператора P -четности и поэтому автоматически обеспечивающий выполнение условий (41). Отвечающий оператору $\hat{G}$ дополнительный сохраняющийся „заряд” G описывается выражением (43), поскольку в рассматриваемом случае $g_{1s} = -g_{2s} = 1$. Как следует из проведенного выше анализа, при обоих способах квантования с соответствующим заданием операции зарядового сопряжения совместное действие законов сохранения для Q и G приводит к запрету переходов, нарушающих вероятностную интерпретацию теории.

Аналогичным образом можно показать существование необходимых правил суперотбора для полевых систем с одним значением спина и произвольной некомпактной группой внутренней симметрии. Заметим, что при этом целесообразнее рассматривать закон сохранения, связанный с инвариантностью теории относительно дискретной операции типа $\psi \rightarrow \hat{G}\psi$. Тогда, по-существу, наличие подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ эквивалентно введению в „обычном” (со знакоопределенной метрикой) гильбертовом пространстве строго сохраняющегося мультипликативного квантового числа и двух типов состояний, отвечающих его значениям ± 1 .

Второй пример — уравнение Дирака-Кэлера (см. [10—17]), которое с точки

зрения теории РВУ описывает частицу с набором спиновых состояний 0, 1, дополнительно вырожденных по внутренней четности. Группа внутренней симметрии его лагранжевой формулировки $SU(2, 2)$ [16]. Это уравнение строится на основе набора представлений собственной группы Лоренца $[(0, 0) \oplus (0, 0)' \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \oplus (0, 1) \oplus (1, 0)]$, где $(0, 0)$ и $(0, 0)'$ — скалярное и псевдоскалярное, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ — векторное и псевдовекторное представления соответственно. Спиновые блоки S^0 и S^1 матрицы γ_4 , записанной в форме Гельфанда-Яглома (2), содержат ненулевые корни ± 1 с кратностью два [16]. Матрицы γ_μ приводимы к виду $\gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu^D$, при этом матрица билинейной формы имеет структуру $\eta = \gamma_4^D \otimes \gamma_4^D$. Оператор $\hat{H}$ в системе покоя может быть выбран совпадающим с η , что соответствует релятивистски-инвариантному обобщению этого оператора $\hat{H} = \left(\frac{p_\mu \gamma_\mu}{im} \right) \left(\frac{p_\mu \gamma'_\mu}{im} \right)$, где $\gamma'_\mu = \gamma_\mu^D$

$\otimes I_4$. Расчет чисел $g_{is}^{(\pm)}$ в данном случае дает $g_{1s}^{(+)} = g_{1s}^{(-)} = 1$, $g_{2s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = -1$ ($s = 00, 10, 11, 1-1$), т.е. удовлетворяется условие (8). Квантование по Бозе-Эйнштейну осуществляется способом (23) с коммутаторами, по Ферми-Дираку — посредством соотношений (34) с антикоммутаторами. Отсутствие отрицательных вероятностей при обеих процедурах квантования обеспечивается сохранением (наряду с электрическим зарядом Q (27)) дополнительного „заряда” G вида (43).

Заметим, что при другом возможном выборе оператора $\hat{H} = \gamma_4^D \otimes I_4$ получается $g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1$, $g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1$, и квантование осуществляется по формулам (39), (40). Подробно этот случай, хотя и несколько с иных позиций, исследован в работе [18]⁴.

Возможность непротиворечивого квантования тензорного поля Дирака-Кэлера на основе статистики Ферми-Дирака является физическим обоснованием описания с его помощью дираковских частиц с группой внутренней симметрии $SU(2, 2)$. Некомпактность группы $SU(2, 2)$ позволяет при этом переопределить лоренцевские трансформационные свойства волновой функции ψ таким образом, что последняя может рассматриваться как волновая функция системы четырех дираковских полей (см. [13, 15, 17]).

Выбор матрицы билинейной формы для уравнения Дирака-Кэлера в виде $\eta = I_4 \otimes \gamma_4^D$, приводящий к $SU(4)$ -инвариантному лагранжиану теории, дает для чисел $g_{is} \equiv g_{is}^{(+)}$ значения $g_{1s} = g_{2s} = 1$. Отсюда следует, что дополнительный „заряд” G (42) совпадает в данном случае с зарядом Q , и поэтому запрета на переходы между состояниями из подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ при квантовании по статистике Ферми-Дирака не возникает. Аналогично дираковскому полю с группой $SU(2)$ внутренней симметрии соответствует выбор матрицы η в виде $\eta = I_2 \otimes \gamma_4^D$, что опять дает $g_{1s} = g_{2s} = 1$ и приводит к теории с неустраняемыми отрицательными вероятностями при квантовании по Бозе-Эйнштейну. Иными словами, устранение отрицательных вероятностей при квантовании по „чужой” статистике возможно только в теориях с некомпактными группами внутренней симметрии.

⁴ В связи с этим укажем также, что процедура квантования поля Дирака-Кэлера, рассмотренная в работе [19], соответствует на самом деле квантованию четырех уравнений Дирака.

Легко видеть, наконец, что квантовое описание частиц с одним значением спина и без изоспиновых степеней свободы („стандартная” ситуация) является частным случаем развитого подхода. Операторы $\hat{P}$ и $\hat{G}$ тогда — единичные операторы, числа $g_{is} = 1$, „заряд” G совпадает с электрическим зарядом Q , формула (23) воспроизводит известные перестановочные соотношения и теорему Паули о связи спина и статистики. Результаты Паули [2], о которых шла речь во введении (скалярные фермионы и бозоны со спином $\frac{1}{2}$, неустраняемые отрицательные вероятности), следуют непосредственно из соотношений (34).

5. Заключение

В настоящей работе показано, что в теории РВУ с внутренними (изоспиновыми) степенями свободы допускается физически приемлемое квантование полуцелого спина по статистике Бозе-Эйнштейна и целого — по статистике Ферми-Дирака. Одним из важнейших следствий полученного результата является возможность геометризованного описания частиц с полуцелым спином, обладающих изоспиновыми степенями свободы, посредством набора тензорных полей, квантуемых по статистике Ферми-Дирака. Он вполне может найти применение в супергравитации, а также в теории суперструны, которая непосредственно связана с теорией высших спинов, описывающей набор спиновых состояний (см. [20]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A180**, 1 (1942).
- [2] W. Pauli, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 526 (1950).
- [3] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, *ЖЭТФ* **18**, 703 (1948).
- [4] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва 1958.
- [5] Ф. И. Федоров, *Доклады Академии наук СССР* **79**, 787 (1951).
- [6] Ф. И. Федоров, *ЖЭТФ* **35**, 495 (1958).
- [7] Ф. И. Федоров, *Группа Лоренца*, Наука, Москва 1979, гл. У.
- [8] J. P. Crawford, A. O. Barut, *Phys. Rev.* **D27**, 2493 (1983).
- [9] Y. K. Ha, *Nucl. Phys.* **B256**, 687 (1985).
- [10] E. Kähler, *Rend. Mat.* **21**, 425 (1962).
- [11] P. Becher, H. Joos, *Z. Phys.* **C15**, 343 (1982).
- [12] W. Królikowski, *Acta Phys. Pol.* **B14**, 533 (1983).
- [13] С. И. Круглов, В. И. Стражев, В Сборнике *Теоретико-групповые методы в физике*, Наука, Москва 1983, т. I.
- [14] J. A. Bullinaria, *Ann. Phys. (N.Y.)* **168**, 301 (1986).
- [15] В. И. Стражев, *Известия вузов СССР, Физика* № 9, 69 (1985).
- [16] В. И. Стражев, В. А. Плетьухов, *Acta Phys. Pol.* **B12**, 651 (1981).
- [17] В. И. Стражев, В Сборнике *Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля*, Институт физики высоких энергий, Протвино 1984, т. 2.
- [18] И. А. Сатиков, В. И. Стражев, *Теоретич. математич. физика* **73**, № 1 (1987).
- [19] I. M. Benn, R. W. Tucker, *Comm. Math. Phys.* **89**, 341 (1983).
- [20] М. А. Васильев, Е. С. Фрадкин, *Доклады Академии наук СССР* **291**, 1100 (1986).