

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

DISTRIBUZIONE DI SPIN TRASVERSO NEL PROTONE

Tesi di laurea specialistica di

Manuel Pincetti

Relatore: Chiar.mo Prof. Sigfrido Boffi

Correlatore: Dott. Marco Radici

Correlatore: Dott.ssa Barbara Pasquini

Anno Accademico 2004/2005

There's a long tradition in theoretical physics, which by no means affected everyone but certainly affected me, that said the strong interactions are too complicated for the human mind.

-S. Weinberg

Indice

SOMMARIO	5
1 INTRODUZIONE	6
1.1 Cenni storici	6
1.1.1 La rivoluzione di gauge	8
1.1.2 Cenni di QCD	10
1.2 Il Deep Inelastic Scattering (DIS)	11
1.3 Il Quark Parton Model (QPM)	15
1.4 Improved Quark Parton Model (IQPM)	18
1.5 Il DIS inclusivo polarizzato	21
1.6 Spin crisis	28
2 TRASVERSITÀ E DISTRIBUZIONI PARTONICHE GENERALIZZATE	31
2.1 Operator Product Expansion e definizione operativa di twist .	31
2.2 Quantizzazione Light-cone	34
2.3 Funzioni di distribuzione partoniche (PDF) al twist dominante	37
2.3.1 Trasversità e sue proprietà	40
2.4 Distribuzioni partoniche generalizzate (GPD)	44
3 RAPPRESENTAZIONE A OVERLAP DELLE DISTRIBUZIONI PARTONICHE GENERALIZZATE	47
3.1 Decomposizione degli stati alla Fock	47
3.2 Cinematica	49
3.3 GPD di quark non polarizzata	51
3.3.1 Regione $\xi < \bar{x} < 1$	52
3.3.2 Regione $-1 < \bar{x} < -\xi$	57
3.3.3 Regione $-\xi < \bar{x} < \xi$	57
3.4 GPD di quark longitudinalmente polarizzata	60

4	TRASVERSITÀ NEL MODELLO A QUARK COSTITUEN-	
	TI	62
4.1	GPDs trasversalmente polarizzate	62
4.2	Funzioni d'onda light-cone nel modello relativistico a quark	
	costituenti	72
4.2.1	Limite diagonale delle GPDs	78
5	CONCLUSIONI	80
	APPENDICE A	82
	APPENDICE B	85
	APPENDICE C	87
	Bibliografia	106
	Testi di Riferimento	109

SOMMARIO

In anni recenti la fisica dello spin degli adroni ha rappresentato una delle aree più dinamiche e in evoluzione della fisica delle particelle. Allo stesso tempo diversi interrogativi di natura fondamentale aspettano una risposta, come ad esempio il problema di determinare nell'ambito della teoria delle interazioni forti il contributo di ciascun costituente elementare allo spin del protone, che rappresenta il 98% della materia osservata nell'universo.

Questa tesi si inserisce in modo naturale negli studi riguardanti la fisica adronica con particolare attenzione alla struttura partonica di spin del nucleone. Più esplicitamente si affronta il problema di costruire in un modello la distribuzione partonica di spin trasverso, che contribuisce in modo determinante alla suddetta struttura partonica del nucleone, ma che è tuttora inesplorata. Una determinazione sperimentale delle sue peculiari caratteristiche predette dalla teoria rappresenta un test formidabile della Cromodinamica Quantistica nel cosiddetto regime non perturbativo dove la simmetria chirale è spontaneamente rotta.

Lo strumento di calcolo principale utilizzato nella tesi è rappresentato dalle cosiddette distribuzioni partoniche generalizzate (GPD), che si sono affermate di recente come l'approccio più potente e versatile al problema del legame tra spin degli adroni e polarizzazione dei suoi costituenti elementari.

Nel primo capitolo di questo lavoro vengono presentati, in successione storica a partire dagli anni cinquanta, i principali risultati ottenuti dai fisici nello studio delle interazioni forti descritte nell'ambito della Cromodinamica Quantistica. Dopodiché nel capitolo 2 si descrivono dapprima la distribuzione di spin trasverso, le sue caratteristiche peculiari rispetto alle altre distribuzioni partoniche, e le difficoltà di estrazione da misure di asimmetrie di spin. Poi si introducono le GPD, che estendono la definizione di distribuzione partonica ad un dominio cinematico più ampio.

Nel terzo capitolo viene discussa in dettaglio la rappresentazione a overlap per l'interpretazione probabilistica delle GPD: non polarizzate e polarizzate longitudinalmente. Nel capitolo 4 si estende questa trattazione al caso della polarizzazione trasversa con un contributo del tutto originale.

Infine nel capitolo 5 vengono presentati i risultati ottenuti.

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Cenni storici

Negli anni cinquanta divenne evidente che l'idea di descrivere in modo unificato le quattro interazioni fondamentali mediante una teoria quantistica di campo rinormalizzabile, presentava degli aspetti problematici. In particolare, l'interazione elettromagnetica e quella forte dipendono da costanti d'accoppiamento molto diverse.

Il fatto che α_{em} , la cosiddetta “costante di struttura fine”, sia piccola è cruciale per giustificare lo sviluppo in potenze di α_{em} della teoria. Questo sviluppo, chiamato “teoria delle perturbazioni”, resta tuttora lo strumento principale in teoria quantistica dei campi. La piccolezza di α_{em} garantisce ai fisici che la teoria delle perturbazioni sia un'affidabile approssimazione della QED, calcolabile al livello di precisione desiderato.

In contrasto con la QED, le particelle fortemente interagenti, gli “adroni” (dal greco $\alpha\delta\rho\nu$, cioè “forte”), hanno una costante d'accoppiamento grande, quindi la teoria delle perturbazioni risulta inefficace al fine di predire lo spettro. Di conseguenza il progresso nell'ambito delle interazioni forti si è rivelato molto più lento.

Negli anni quaranta, il primo determinante progresso nello studio delle interazioni forti fu l'idea che la forza che tiene legato il nucleo potesse essere mediata dallo scambio di particelle senza spin (i mesoni) chiamate *pioni*. La previsione teorica, fornita da Yukawa [1], della massa e del range del mesone π , basata su considerazioni riguardanti la scala di energia delle interazioni forti, condusse Lattes, Occhialini e Powell nei loro esperimenti sui raggi cosmici del 1947 alla scoperta del “pione”. Questa scoperta, tuttavia, venne smorza-

ta dal fatto che la costante d'accoppiamento pione-nucleo risulta maggiore di uno. Sebbene, quindi, la mesodinamica pseudoscalare fosse nota come teoria di campo rinormalizzabile, il modello di Yukawa non era calcolabile attraverso la teoria delle perturbazioni.

Inoltre, la situazione sperimentale divenne ben presto confusa a causa delle molte “risonanze” scoperte negli esperimenti agli acceleratori. Questo ad indicare ancora una volta che la costante d'accoppiamento di qualche sconosciuta teoria sottostante era grande, oltre la portata della convenzionale teoria delle perturbazioni. Per questa ragione il progresso nello studio delle interazioni forti fu lento per vari anni.

Diversi approcci alternativi vennero esplorati negli anni cinquanta e sessanta. L'approccio vincente fu la teoria dei “quark”. Gell-Mann, Ne'e-man, and Zweig, ([2]-[5]) cercarono di spiegare lo spettro osservato degli adroni ipotizzando delle strutture elementari sottostanti agli adroni, le quali si combinassero rispettando la simmetria $SU(3)$.

La composizione di tali particelle elementari, i quark, che si realizzano in tre stati diversi (“up”, “down” e “strange”) con cariche frazionarie, poteva infatti spiegare tutti gli adroni noti a quel tempo: tre quark insieme erano necessari per costruire un *barione*, come un protone od un neutrone (o risonanze, del tipo Λ , Ξ , Ω , etc.), mentre una coppia quark-antiquark era necessaria per dare un mesone, come il mesone π o K . Il modello a quark poteva predire con relativa facilità le masse e le proprietà di particelle che non erano ancora state scoperte. La teoria era capace di fornire previsioni qualitative anche al di fuori del suo range di applicabilità. Ma le particelle a carica frazionaria non erano mai state scoperte negli esperimenti di scattering e quindi si pensava fossero solo artifici matematici, che riflettevano una più profonda realtà fisica ancora ignota. Inoltre, dal momento che non esisteva nessuna teoria quantistica dei quark, non era noto quale potesse essere la forza che li tenesse legati. Come conseguenza il modello risultò incapace di spiegare perché certi stati di quark (detti “esotici”) non venissero trovati sperimentalmente.

Verso la fine degli anni sessanta una nuova serie di esperimenti al laboratorio SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) presentò risultati sorprendenti e sollevò un interrogativo. Negli esperimenti di Deep Inelastic Scattering (DIS), un fascio di elettroni ad alta energia veniva fatto incidere su una targhetta di protoni. Ad energie e momenti molto elevati ($|q|^2 \geq 2(\text{GeV}/c)^2$), i fattori di forma del bersaglio perdevano la loro dipendenza da alcuni parametri cinematici. Questo fenomeno venne chiamato *scaling* di Bjorken dal nome dell'autore che l'aveva previsto [6]. L'esperimento di DIS era ideale per poter analizzare la struttura del protone, dal momento che

la sonda elettromagnetica offre un'interazione relativamente “pulita” con gli adroni.

Oltre allo scaling, gli esperimenti di SLAC presentavano anche un'altra caratteristica peculiare: ovvero eventi ad alto angolo di diffusione, similmente all'esperimento di Rutherford sullo scattering di particelle α da atomi. La più semplice spiegazione di questi risultati si ebbe grazie alla formulazione del *modello a partoni* (Quark Parton Model, QPM) da parte di Feynman [7], dove si assume che il protone sia costituito da un insieme di oggetti puntiformi liberi che agiscono da centri diffusori.

Ma com'era possibile conciliare l'idea del protone come costituito da tre quark in una configurazione statica, mentre nel QPM invece lo si ipotizzava composto da oggetti puntiformi addirittura liberi?

1.1.1 La rivoluzione di gauge

Nel 1971 una fondamentale scoperta fu fatta da Gerard 't Hooft [8], ancora studente. Egli studiò una vecchia teoria di Yang e Mills, la quale era una generalizzazione della teoria di Maxwell della luce, basata però su un gruppo di simmetria più grande. Partendo da una serie di lavori di Veltman, Faddeev, Higgs e altri, 't Hooft dimostrò che la teoria di gauge di Yang-Mills, anche quando il suo gruppo di simmetria era “spontaneamente rotto”, risultava rinormalizzabile. Grazie a questo importante risultato, era ora divenuto possibile sia scrivere teorie rinormalizzabili delle interazioni deboli, dove i bosoni mediatori erano rappresentati come campi di gauge, sia tentare l'unificazione tra interazioni elettromagnetiche e deboli.

In poco tempo vennero ripresi in considerazione i pionieristici articoli di Weinberg [9] e Salam [10] sulle interazioni deboli, viste come teorie di gauge basate sul gruppo di simmetria $SU(2) \otimes U(1)$. Il punto essenziale, comunque, fu la rinormalizzabilità delle teorie di gauge. Infatti questo permise di effettuare concrete predizioni numeriche di varie teorie e confrontarle con i numerosi dati sperimentali. In alcuni anni, l'accordo tra il modello elettrodebole di Weinberg e Salam e i dati sperimentali si rivelò schiacciante. I dati erano sufficientemente accurati per escludere ogni altra teoria e verificare la correttezza delle previsioni del modello $SU(2) \otimes U(1)$.

La teoria di Weinberg-Salam raggruppava i *leptoni*, le particelle che interagiscono in modo elettromagnetico e debole, in un modo semplice. Essa

postulava che i leptoni left handed (“sinistrorsi”, cioè in uno specifico stato di elicità) dovessero sistemarsi in accordo a $SU(2)$ in tre differenti famiglie:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

e che le interazioni prodotte da questi leptoni fossero generate dai bosoni vettori intermedi:

$$\gamma, \quad W_\mu^\pm, \quad Z_\mu. \quad (1.2)$$

(Il problema del modello attualmente ancora aperto è quello di trovare riscontro sperimentale all’ipotesi dell’esistenza del bosone di Higgs, il quale sarebbe responsabile della rottura spontanea di simmetria che permetterebbe di fornire le masse ai bosoni vettori intermedi.)

Nell’ambito delle interazioni forti, il progresso fu altrettanto rapido. La rivoluzione di gauge rese possibile la formulazione della “*Cromodinamica Quantistica*” (**QCD**), la quale divenne il principale candidato per una teoria delle interazioni forti. Attraverso l’ipotesi di un nuovo grado di libertà, il “colore”, le cui interazioni rispettassero la simmetria $SU(3)_c$ ¹, la teoria di Yang-Mills prevedeva l’esistenza di una nuova particella, il *gluone* (dall’inglese “glue”, colla), come mediatore dell’interazione tra due quark. In altre parole, i quark posseggono i gradi di libertà di sapore e colore, ma solamente il colore partecipa alla simmetria di gauge locale.

La QCD fornì una spiegazione plausibile alla misteriosa assenza di evidenze sperimentali dei quark. Si poté calcolare che la costante d’accoppiamento effettiva di $SU(3)_c$ diviene enorme a basse energie, “confinando” quindi permanentemente i quark all’interno degli adroni. In questa rappresentazione, se si tentasse di separare i quark, i gluoni condensati si opporrebbero alla loro separazione. Incrementando l’energia la stringa gluonica, che idealmente tiene confinati i quark, si rompe producendo una coppia quark-antiquark, così che un singolo quark non può essere isolato (in analogia al caso di un magnete, che quando viene rotto, si separa semplicemente in due magneti più piccoli, e non nei singoli monopoli).

Nel 1973 venne dimostrato che nelle teorie di gauge quantistiche non abeliane rinormalizzabili, di cui la QCD è l’unico esempio quadridimensionale, la costante d’accoppiamento dipende dall’energia, o meglio, diviene piccola ad energie elevate. Questa proprietà, denominata “libertà asintotica” e dimostrata da Gross, Wilczek [11] e Politzer [12], permise di spiegare perché alle alte energie (come per gli esperimenti di DIS) i quark si comportassero come particelle libere. Inoltre la teoria forniva una possibile giustificazione

¹Questa nuova simmetria $SU(3)_c$ non va in alcun modo confusa con la vecchia simmetria $SU(3)$ di Gell-Mann, Ne’eman e Zweig, che viene chiamata simmetria di “sapore” (flavor).

al fatto che il modello statico a quark di Gell-Mann fosse così efficace nel ricostruire lo spettro dei barioni. Nel limite di masse dei quark uguali, l'azione della QCD possiede una simmetria globale, $SU(N)$ per N gradi di libertà di sapore. In prima approssimazione lo spettro degli adroni mostra una simmetria $SU(2)$, che corrisponde a considerare solo i sapori “up” e “down” nella lagrangiana di QCD. Poiché per il sapore “strange” la massa del quark è vicina a quella dei sapori “up” e “down”, rispetto al valore molto più grande della massa dei barioni, anche la simmetria $SU(3)$ di sapore viene generalmente rispettata nello spettro dei barioni.

1.1.2 Cenni di QCD

Per ottenere la lagrangiana di QCD occorre partire dalla lagrangiana di QED

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

dove $\psi(x)$ è il campo di Dirac,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.4)$$

è la derivata covariante che ingloba l'interazione tra campo di Dirac e campo vettoriale del bosone mediatore attraverso la costante d'accoppiamento e (accoppiamento minimale), mentre

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

è il tensore del campo elettromagnetico, che risulta invariante per trasformazioni di gauge locali. L'invarianza per trasformazione di fase locale si generalizza a invarianza per gruppo di simmetria continuo $SU(3)_c$ (in Appendice A è riportato un esempio di generalizzazione a $SU(2)$). Il gruppo $SU(3)_c$ implica otto generatori indipendenti t^a con $a=1-8$ e di conseguenza otto campi vettoriali A_μ^a (gluoni). Il campo di Dirac diventa un tripletto di colore di campi di Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

e la trasformazione di gauge locale diviene

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha^a(x)t^a} \psi(x) \equiv V(x)\psi(x). \quad (1.7)$$

I generatori appartengono ad un'algebra non commutativa, definita da

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (1.8)$$

dove f^{abc} sono le cosiddette costanti di struttura; di conseguenza la teoria di gauge generata si dice non abeliana. La derivata covariante è definita come

$$\Rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu^a t^a, \quad (1.9)$$

dove g è la costante d'accoppiamento. La trasformazione dei campi di gauge è data da

$$A_\mu^a(x)t^a \longrightarrow V(x) \left(A_\mu^a(x)t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \quad (1.10)$$

e la nuova quantità invariante risulta essere

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.11)$$

Quindi la lagrangiana di QCD è descritta dalla seguente espressione

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (1.12)$$

La caratteristica del gruppo di simmetria di gauge locale di non essere abeliano comporta notevoli differenze tra la QCD e la QED. Infatti nel primo caso i campi di gauge possono interagire con se stessi, generando quindi vertici trilineari e quadrilineari. Di conseguenza l'effetto di "screening" della carica che si ha per la QED nei diagrammi a loops fermioniche, viene annullato dall'effetto di "antiscreening" dovuto alle loops gluoniche, che rinforza il campo di forze di colore man mano che i due quark si allontanano, fornendo una spiegazione al misterioso fenomeno del confinamento, ovvero che tutti gli adroni osservati in natura hanno carica neutra di colore.

1.2 Il Deep Inelastic Scattering (DIS)

Sia k il momento dell'elettrone entrante nel processo di DIS elettrone-protone, e k' quello dell'elettrone uscente. Si introducono le seguenti quantità:

$$q = k - k' \quad (1.13)$$

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M} \quad (1.14)$$

$$x_B = -\frac{q^2}{2M\nu}. \quad (1.15)$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui il protone è a riposo, si hanno i seguenti quadrivettori:

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0); \quad (1.16)$$

$$k_\mu = (E, \mathbf{k}); \quad (1.17)$$

$$k'_\mu = (E', \mathbf{k}'). \quad (1.18)$$

Quindi, trascurando la massa dell'elettrone, si ha:

$$\begin{aligned} \nu &= E - E', \\ q^2 &= -4EE' \sin^2(\theta/2) \leq 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

che definiscono l'energia e il momento trasferiti al bersaglio, dove θ è l'angolo di scattering. Dalla (1.19) si deduce che il quadrivettore momento trasferito sia di tipo space-like.

Nella regione di regime di scattering profondamente inelastico, definita da:

$$\text{Regione di DIS} = \left\{ \begin{array}{l} \nu \rightarrow \infty \\ |q^2| \rightarrow \infty \\ x_B \text{ cost.} \end{array} \right\}, \quad (1.20)$$

risulta $0 \leq x_B \leq 1$. Cioè l'invariante x_B rappresenta il grado di elasticità della reazione, con il limite elastico rappresentato da $x_B = 1$.

Usando le regole di Feynman è possibile costruire l'ampiezza di scattering di un elettrone che collide con un protone di momento p e polarizzazione S , emettendo uno stato incognito $|n\rangle$:

$$M_n = [e^2 \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s)] \left(\frac{1}{q^2} \right) [\langle n | J_\mu(0) | p, S \rangle], \quad (1.21)$$

dove J_μ è la corrente elettromagnetica e u rappresenta lo spinore dell'elettrone di spin s .

Calcolando la sezione d'urto differenziale con i metodi usuali di teoria di campo si ottiene

$$\begin{aligned} d\sigma_n &= \frac{d^3\mathbf{k}'}{2M2E(2\pi)^3 2k'_0 |\nu|} \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{S, s, s'} |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p_n), \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove $p_n = \sum_i p_i$ rappresenta la somma delle particelle stato finale adronico.

Ora, sommando su tutti i possibili stati finali adronici n , si ricava la sezione d'urto inclusiva:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

con $\alpha = e^2/4\pi$ la costante di struttura fine e dove il tensore leptonico è dato da

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma_\alpha k'^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta k^\beta \gamma_\nu) = 2 \left(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right), \quad (1.24)$$

mentre il tensore adronico risulta

$$\begin{aligned} 2MW^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \sum_S \sum_n \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_n - p - q) \\ &\quad \times \langle p, S | J_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | p, S \rangle \\ &= \frac{1}{4M} \sum_S \int \frac{d^4x}{2\pi} e^{iq \cdot x} \langle p, S | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p, S \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Nell'ultimo passaggio si è riscritto il prodotto delle due correnti come commutatore, sfruttando il fatto che il termine $J_\nu(0)J_\mu(x)$ sia nullo, perchè violerebbe la legge di conservazione del momento.

Dall'equazione di conservazione della corrente è noto che $\partial_\mu J^\mu = 0$, cioè

$$q^\mu W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} q^\nu = 0. \quad (1.26)$$

Quindi, sviluppando $W_{\mu\nu}$ sulla base di tutte le strutture tensoriali indipendenti che possono essere costruite con i vettori indipendenti p e q , e imponendo l'invarianza per parità e time-reversal, si ottiene la seguente espressione:

$$W_{\mu\nu} = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) \frac{W_2}{M^2}, \quad (1.27)$$

dove W_1 e W_2 sono funzioni di struttura che dipendono dagli invarianti che si possono costruire con p e q , cioè q^2 e $p \cdot q \propto \nu$.

Inserendo la relazione appena ottenuta nell'equazione per la sezione d'urto differenziale, si trova:

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left[W_2 \cos^2(\theta/2) + 2W_1 \sin^2(\theta/2) \right]. \quad (1.28)$$

Sperimentalmente, fu scoperto che nella regione di DIS la dipendenza da q^2 e ν veniva rimpiazzata da quella in $x_B = -q^2/2M\nu$. Nelle funzioni di struttura ciò si esplicita come

$$\begin{aligned} MW_1(q^2, \nu) &\rightarrow F_1(x_B), \\ \nu W_2(q^2, \nu) &\rightarrow F_2(x_B). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Questa relazione venne chiamata scaling di Bjorken. L'osservazione sperimentale dello scaling è equivalente al segnale che nella cinematica DIS (cioè $|q^2|$, $\nu \rightarrow \infty$, x_B fissato) lo scattering si possa rappresentare come somma incoerente di scattering elastici da costituenti puntiformi del bersaglio; da qui ebbe origine il concetto di "partone".

Prendendo in considerazione reazioni inclusive neutrino-nucleone:

$$\nu + N \rightarrow e^- + X, \quad (1.30)$$

le quali coinvolgono interazioni deboli, ci si accorse che la struttura del tensore adronico poteva essere più ricca:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & -W_1 g_{\mu\nu} + W_2 p_\mu p_\nu / M^2 - iW_3 \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\lambda q^\rho / M^2 + W_4 q_\mu q_\nu / M^2 \\ & + W_5 (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) / M^2 + iW_6 (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) / M^2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

perché il tensore adronico poteva avere anche un contributo tensoriale antisimmetrico. La sezione d'urto per lo scattering da neutrini coinvolge una nuova funzione di struttura

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{d\Omega dE'} = \frac{G_F^2 E'^2}{2\pi^2} \left[2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) W_1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) W_2 \mp \frac{(E + E')}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) W_3 \right], \quad (1.32)$$

dove il segno - (+) corrisponde allo scattering di (anti)neutrino e G_F è la costante di Fermi. Nel limite dello scaling di Bjorken, si trova:

$$\nu W_3(q^2, \nu) \rightarrow F_3(x_B). \quad (1.33)$$

Abbiamo già sottolineato come nel regime di scaling di Bjorken per i processi di scattering *leptone-adrone*, il bersaglio adronico di momento p possa essere rappresentato come un ensemble di n partoni virtuali quasi liberi con momento $x_i p$, $0 \leq x_i \leq 1$, ($i = 1, \dots, n$). Ogni stato virtuale ha vita media $\tau_i > 0$ nel sistema di riferimento dell'adrone, mentre nel sistema del centro di massa si ha la dilatazione dei tempi; quindi la sonda leptonica attraversa il bersaglio

in un tempo $t \rightarrow 0$, al crescere di q^2 , vedendo una configurazione di partoni “congelata”.

Per il principio d’indeterminazione lo scambio di un fotone γ^* (in approssimazione di Born) tra leptone e partone avviene solo se il parametro d’impatto, ovvero la separazione trasversa delle due traiettorie, risulta essere minore di $1/Q$ con $Q^2 = -q^2$. Quindi la probabilità di trovare un altro partone vicino, è data da

$$\frac{\text{Area dello scattering hard leptone – partone}}{\text{Superficie d’impatto del bersaglio}} \sim \frac{1/Q^2}{\pi R_{adron}^2} \quad (1.34)$$

e svanisce al crescere di Q^2 .

Il leptone viene rivelato nello stato finale, mentre i residui del bersaglio adronico si ricombinano in adroni non osservati (somma inclusiva sugli stati finali). Il processo di adronizzazione avviene su scala temporale più lunga rispetto allo scattering elementare leptone-partone, quindi è possibile concludere che si ha una **“fattorizzazione”** tra processo di scattering hard leptone-partone e processi soft tra partoni, che portano alla ricombinazione degli stessi fino a formare adroni senza colore.

Questo risultato è una delle ipotesi fondamentali del Quark Parton Model. La descrizione dei processi hard che coinvolgono adroni nello stato finale o iniziale è separata nel processo elementare partonico, che prende vita a corte distanze e brevi intervalli temporali, e nei processi soft adronici a più lunghe distanze ed intervalli di tempo. Quindi i due fenomeni, in buona approssimazione, si disaccoppiano. I primi sono calcolabili tramite la QCD perturbativa (pQCD), in linea di principio con accuratezza arbitraria; i secondi, invece, vengono parametrizzati in forma di funzioni fenomenologiche *a priori* sconosciute, e.g. funzioni di distribuzioni partoniche (Parton Distribution Functions) o ampiezze di distribuzione (Distribution Amplitudes). Esse possono quindi essere estratte dal confronto con i dati sperimentali di una certa misura, ed essere reinserite nel calcolo della sezione d’urto di un altro processo hard per poter fare delle previsioni: in questo modo si mettono alla prova le stesse ipotesi di fattorizzazione e universalità.

1.3 Il Quark Parton Model (QPM)

Come anticipato nella sezione precedente le ipotesi del Quark Parton Model sono:

- Per $|q^2| \rightarrow \infty$ in regime DIS, lo scattering hard leptone-adrone viene descritto in approssimazione di Born.
- I partoni sono quasi on-shell e in uno stato virtuale congelato.
- Sussiste fattorizzazione tra scattering hard e processi soft tra partoni.

\Downarrow

Perciò la sezione d'urto differenziale risulta essere data dalla convoluzione tra il processo elementare (scattering hard) e la distribuzione di probabilità dei partoni con flavor f nell'adrone h ,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}(p, q) = \sum_{f, \bar{f}} \int_0^1 dx \frac{d^2\sigma^{el}}{d\Omega dE'}(xp, q) q_f(x), \quad (1.35)$$

dove $d^2\sigma^{el}$ è la sezione d'urto elementare del processo di scattering elastico del leptone su un partone di momento xp , e $q_f(x)$ la probabilità incognita di trovare un partone f con frazione x del momento dell'adrone genitore. Potendo calcolare $d^2\sigma^{el}$, si ricavano informazioni su $q_f(x)$ dal confronto con i dati sperimentali.

La sezione d'urto elementare di scattering elastico può essere ricavata immaginando il partone come una particella di Dirac massiva. Il tensore adronico per una particella di momento p diventa quindi

$$2mW^{el\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3p'}{16\pi^3 2p'_0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - p') H^{el\mu\nu}, \quad (1.36)$$

$$H^{el\mu\nu} = e_f^2 2[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + g^{\mu\nu}(m^2 - p' \cdot p)], \quad (1.37)$$

mentre il tensore leptonic è dato dalla (1.24). La sezione d'urto elementare per un partone di momento xp risulta infine

$$\frac{d^2\sigma^{el}}{d\Omega dE'} = \sigma_{Mott} \left[e_f^2 \frac{x}{\nu} + e_f^2 \frac{x_B}{m} \tan^2(\theta/2) \right] \delta(x - x_B), \quad (1.38)$$

dove

$$\sigma_{Mott} = \frac{4\alpha^2}{q^4} E'^2 \cos^2(\theta/2) \quad (1.39)$$

rappresenta lo scattering di Coulomb elastico da particella puntiforme.

Quindi sostituendo il risultato di equazione (1.38) in eq. (1.35) si ottiene:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}(p, q) = \sum_{f, \bar{f}} \int_0^1 dx \frac{d^2\sigma^{el}}{d\Omega dE'}(xp, q) q_f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{Mott} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \int_0^1 dx \delta(x - x_B) \phi_f(x) \left[\frac{x}{\nu} + \frac{x_B}{m} \tan^2(\theta/2) \right] \\
&= \sigma_{Mott} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \left[\frac{x_B}{\nu} \phi_f(x_B) + \frac{1}{M} \tan^2(\theta/2) \phi_f(x_B) \right] \\
&= \sigma_{Mott} \left[\frac{1}{\nu} F_2(x_B) + \frac{2}{M} F_1(x_B) \tan^2(\theta/2) \right], \tag{1.40}
\end{aligned}$$

dove, dal confronto con la (1.28) in regime DIS, si deduce

$$F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \phi_f(x_B) \quad \text{e} \quad F_2(x_B) = x_B \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \phi_f(x_B). \tag{1.41}$$

Le funzioni di struttura, che parametrizzano lo scattering elastico, permettono quindi di accedere alle distribuzioni partoniche negli adroni. Dalla (1.41) si ricava inoltre, la relazione di Callan-Gross [13]

$$2x_B F_1(x_B) = F_2(x_B). \tag{1.42}$$

Nonostante le approssimazioni del QPM, questo risultato venne successivamente confermato dai dati sperimentali e, grazie a considerazioni riguardanti il tensore adronico nella sua componente longitudinale e trasversa, divenne possibile concludere che la validità di questa relazione sussiste solo se i partoni sono particelle a spin 1/2.

Il QPM ha ricavato numerose altre conferme sperimentali, in particolar modo da misure di $F_2(x_B)$ per DIS di elettroni su bersagli di protoni e neutroni. L'elaborazione continua del modello e il confronto con i dati sperimentali hanno introdotto nuovi concetti come la distribuzione di quark di valenza

$$q_f^v(x) \equiv q_f(x) - \bar{q}_f(x) \tag{1.43}$$

(che rappresenta ciò che rimane dopo aver rimosso i quark e gli antiquark virtuali associati alla polarizzazione del vuoto) e del “mare” di Dirac, $\bar{q}_f^{sea}(x)$, che insieme alla distribuzione di valenza fornisce il contributo completo del sapore f alla distribuzione $q_f(x)$:

$$q_f(x) \equiv q_f^v(x) + \bar{q}_f^{sea}(x). \tag{1.44}$$

Il quadro intuitivo che emerge è semplice e allo stesso tempo efficace. Il nucleone si può pensare, in prima approssimazione, come rappresentato da tre quark di valenza le cui masse e cariche frazionarie determinano la massa e la carica del nucleone stesso. I quark di valenza trasportano in media 1/3 del momento totale. Le loro distribuzioni in x hanno quindi un picco per

$x \sim 1/3$ e sono l'unico contributo dominante per un certo sapore f quando $x \rightarrow 1$. A piccoli x , invece, il momento del nucleone può essere suddiviso tra tanti partoni: di valenza, del “mare” e gli antipartoni; per $x \rightarrow 0$ questi ultimi contributi divengono dominanti.

I limiti della descrizione basata sul QPM cominciarono ad emergere dall'analisi sperimentale delle cosiddette regole di somma, che legano relazioni integrali sulle funzioni di struttura a costanti note, come quelle di Gottfried o Gross-Llewellyn-Smith [14] per lo scattering di (anti)neutrini. Il risultato più interessante è forse rappresentato dalla regola di somma di momento,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \left[\frac{9}{2} (F_2^{e^-p}(x) + F_2^{e^-n}(x)) - \frac{3}{4} (F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x)) \right] \\ \sim \int_0^1 dx x (u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}) \doteq 1 - \epsilon, \end{aligned} \quad (1.45)$$

con u, d, s distribuzione di momento del quark per il relativo sapore; dove i dati sperimentali indicano per ϵ valori compresi tra $0.54 \div 0.56$. Quindi circa metà del momento del nucleone è portato da partoni senza carica, che non sono previsti dal QPM: i gluoni.

1.4 Improved Quark Parton Model (IQPM)

Vedremo più avanti che anche nel caso di reazioni polarizzate il QPM mostra tutti i suoi limiti nella descrizione della struttura di spin del nucleone. In questo paragrafo accenniamo brevemente alle correzioni al QPM (Improved QPM, IQPM) che trovano la loro giustificazione teorica nella teoria di campo non abeliana per le interazioni forti, la QCD.

Per poter inglobare il QPM nella QCD occorre affrontare due fondamentali problemi: la rinormalizzazione della teoria, ovvero la cancellazione delle divergenze ultraviolette; e giustificare la *fattorizzazione* tra la sezione d'urto elementare (processo hard) e la descrizione dei partoni (processo soft), cioè inglobare le divergenze infrarosse dovute alla dinamica “soft” in funzioni incognite che generalizzino le distribuzioni partoniche.

La cancellazione delle divergenze ultraviolette (UV) avviene schematicamente in questo modo. Ad una certa scala μ_R si ridefiniscono le quantità fisiche quali massa, coupling e intensità dei campi attraverso la procedura di rinormalizzazione, inserendo controtermini nella lagrangiana (dipendenti da μ_R) in modo tale da cancellare le divergenze della teoria. Dall'invarianza della fisica dalla scala di rinormalizzazione si ottengono le relazioni di

Callan[21]-Symanzik[22]

$$\mu_R \frac{d}{d\mu_R} G = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] G = 0, \quad (1.46)$$

dove G è la funzione di Green ad n punti, γ la dimensione anomala dei campi e la funzione β è data da:

$$\frac{d}{d \log(q^2)} \alpha_s(q^2) = \beta(\alpha_s). \quad (1.47)$$

Essa determina cioè l'andamento della costante d'accoppiamento α_s al variare della scala q^2 .

Per quanto riguarda, invece, il problema della fattorizzazione occorre distinguere processo da processo.

Ad esempio per i processi di **DIS inclusivo** Collins, Soper e Sterman hanno fornito il seguente teorema:

$$F_{1/2/3}(x_B, q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_0^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left(\frac{x_B}{x}, \frac{q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R), \quad (1.48)$$

dove $\phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$ sono una generalizzazione delle distribuzioni partoniche in QPM, indipendenti da q^2 e α_s , e quindi indipendenti dal tipo di processo. I coefficienti $C_{1/2/3}$, detti coefficienti di Wilson, rappresentano una generalizzazione delle funzioni di struttura $F_{1/2}^{el}$ di scattering elastico nel QPM.

Il termine μ_F rappresenta la scala di fattorizzazione a cui si distingue ciò che accade a brevi distanze (alte energie) e viene inglobato nei coefficienti di Wilson C , da ciò che è a lunghe distanze (basse energie) e viene assorbito nella definizione dell'incognita ϕ .

Nel calcolo di C le correzioni da QCD sono dovute al fatto che un quark di momento y può irraggiare un gluone con momento $(1-z)y$ e riscalarlo il suo momento ad $x = zy$; tale processo viene detto “vertice di Altarelli-Parisi[23]”. Nel caso in cui $z \rightarrow 1$ il calcolo presenta termini divergenti (detti divergenze *collineari*) che possono essere riassorbiti in ϕ perchè connessi alla dinamica del singolo quark, indipendentemente dall'interazione con la sonda esterna. Questo determina l'evoluzione in q^2 di ϕ , ovvero il suo contributo partonico al variare, appunto, della scala della sonda. Termini divergenti possono comparire anche dai contributi di gluoni virtuali “soffici”, cioè per $x_B \rightarrow 1$; tali divergenze non sono riassorbibili né in ϕ , perché riguardano il gluone nello stato finale, né in C , perché romperebbero la fattorizzazione; però si cancellano sistematicamente con le divergenze generate dai gluoni reali in approssimazione collineare (**Fattorizzazione Collineare**).

Il vertice di Altarelli-Parisi è descritto dalla cosiddetta funzione di splitting, che determina il contributo partonico della distribuzione ϕ , discrimina cioè ciò che va inglobato in ϕ (off-shell $< \mu_F$) da ciò che va inglobato in C (off-shell $> \mu_F$). Scegliendo per comodità $|q^2| = \mu_F$, al variare di μ_F l'evoluzione in q^2 viene determinata da equazioni note come equazioni DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi)[23]. La scala di partenza (e.g. q_0^2), cioè la condizione al contorno delle equazioni differenziali accoppiate DGLAP è però arbitraria; si ha perciò la necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente. Diverse scelte sono possibili, le più popolari sono:

- schema DIS (Altarelli, Ellis, Martinelli '79), che si basa sull'assunzione che il QPM sia esatto a q_0^2 ;
- schema MS (Bardeen *et al.*, '78; Furmansky e Petronzio, '82; Collins e Soper, '82), dove le distribuzioni partoniche sono definite come elementi di matrice di operatori numero su stati adronici.

Le equazioni DGLAP sono d'importanza fondamentale perché, noto il risultato alla scala q_0^2 , forniscono il risultato a $q^2 \neq q_0^2$. Inoltre in combinazione col teorema di fattorizzazione permettono, una volta ricavata l'informazione quantitativa da un certo esperimento, di fare predizioni per altre misure a diverse scale energetiche (pur nello stesso schema di fattorizzazione). Il potere predittivo viene pertanto notevolmente ampliato.

Per i processi di **DIS semi-inclusivo** vale un teorema di fattorizzazione analogo al **DIS inclusivo** purché il processo sia collineare, cioè i momenti trasversi dei partoni siano integrati.

Nel caso e^+e^- **inclusivo** si ha il seguente teorema dovuto a Sterman ('76)

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \alpha_s^n(q^2), \quad \text{con} \quad s_0 = 1, \quad (1.49)$$

con N_c numero di colori; nel quale il primo termine fino alla sommatoria sui sapori è interamente dovuto al QPM, e la seconda sommatoria rappresenta il contributo fattorizzato dalle correzioni di QCD perturbative.

Per il processo alla Drell-Yan, cioè $p + p \rightarrow l^+l^- + X$, abbiamo (per una

rassegna si veda [24], pag.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dq^2 dy d\Omega} &= \sum_{f_1, f_2} \int_{\xi_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dq^2 dy d\Omega} \left(\frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \frac{q^2}{\mu_F^2}, \Omega, \alpha_s(\mu_F) \right) \\ &\times \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) \pm O\left(\frac{1}{q^2}\right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.5 Il DIS inclusivo polarizzato

Prendendo in considerazione reazioni inclusive di scattering profondamente inelastico su bersagli adronici polarizzati,

$$e^- + \vec{h} \rightarrow e^- + X, \quad (1.51)$$

la struttura del tensore adronico si arricchisce di una parte antisimmetrica. Per spin 1/2 il tensore $W_{\mu\nu}$ può essere al più lineare nel quadri-pseudovettore (di spin) S^μ . Quindi è possibile espanderlo sulla base delle matrici σ di Pauli

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\alpha'} W_{\mu\nu}^{\alpha\alpha'} \rho_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'} W_{\mu\nu}^{\alpha\alpha'} (1 + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\alpha\alpha'}, \quad (1.52)$$

dove $\rho_{\alpha\alpha'}$ è la matrice densità di spin del bersaglio e P_i il vettore di polarizzazione definito da

$$P_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i) = \langle \sigma_i \rangle. \quad (1.53)$$

Il tensore adronico perciò diviene

$$W^{\mu\nu} = W_S^{\mu\nu} + W_A^{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

dove $W_S^{\mu\nu}$ è dato dalla (1.27) e

$$W_A^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho [A_1 S_\sigma + A_2 p_\sigma], \quad (1.55)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= MG_1 + \frac{p \cdot q}{M} G_2 \\ A_2 &= \frac{S \cdot q}{M} G_2, \end{aligned} \quad (1.56)$$

cioè il contributo scalare A_1 si accoppia con lo pseudovettore S e il contributo pseudoscalare A_2 con il vettore p . Le funzioni G_1 e G_2 rappresentano le nuove funzioni di struttura collegate al nuovo grado di libertà di polarizzazione. La parte antisimmetrica del tensore adronico può essere riscritta come

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho S_\sigma [MG_1(\nu, q^2) + \frac{p \cdot q}{M} G_2(\nu, q^2)] - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho p_\sigma \frac{S \cdot q}{M} G_2(\nu, q^2) \\ &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho p_\sigma \lambda G_1(\nu, q^2) + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho S_{\perp\sigma} \left(MG_1(\nu, q^2) + \frac{p \cdot q}{M} G_2(\nu, q^2) \right), \end{aligned} \quad (1.57)$$

dove $\lambda \doteq M(S \cdot q)/(p \cdot q)$, rappresenta nel sistema di riferimento del bersaglio (target rest frame, TRF) la proiezione dello spin lungo il momento trasferito, ovvero l'*elicità*; mentre $S_\perp^\mu = (0, \vec{S}_\perp)$ è lo spin trasverso.

Se nel processo DIS anche il leptone è polarizzato con elicità $h = \pm$, anche il tensore leptonico analogamente a quello adronico acquista una componente antisimmetrica

$$L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^S + L_{\mu\nu}^A, \quad (1.58)$$

dove $L_{\mu\nu}^S$ è dato dalla (1.24) e

$$L_{\mu\nu}^A = 2i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma. \quad (1.59)$$

La sezione d'urto si scompone anch'essa in due parti: una non polarizzata e una polarizzata. La parte non polarizzata è dovuta alla contrazione delle parti simmetriche dei tensori; l'altra, di conseguenza, alla contrazione delle parti antisimmetriche:

$$L_{\mu\nu}^S W_S^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{d\sigma^0}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{q^4} E'^2 \left(2\sin^2(\theta/2) W_1 + \cos^2(\theta/2) W_2 \right), \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^A W_A^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{d\Delta\sigma^h}{dE' d\Omega} &= -h \frac{2\alpha^2}{q^2} \frac{E'}{E} \left\{ \cos \alpha \left[(E + E' \cos \theta) MG_1 - q^2 G_2 \right] \right. \\ &\quad \left. + E' \sin \theta \sin \alpha (MG_1 + 2EG_2) \right\}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

L'angolo α indica la direzione della polarizzazione del bersaglio rispetto al fascio incidente; cioè $\alpha = 0$ quando $S \parallel k$, $\alpha = \pi/2$ quando $S \perp k$.

Dalle espressioni (1.60) e (1.61) è possibile dedurre che le funzioni di struttura indipendenti siano quattro: W_1 , W_2 , G_1 e G_2 .

Ciò è dovuto alla seguente considerazione.

La sezione d'urto per assorbimento di un fotone virtuale (γ^*) con un nucleone

bersaglio (N), indicata con $\sigma_{tot}(\gamma^*N)$, per il *teorema ottico* risulta essere proporzionale alla parte immaginaria dell'ampiezza di scattering Compton in avanti:

$$\sigma_{tot}(\gamma^*N) \propto \mathcal{I}m[f(\theta = 0)]. \quad (1.62)$$

Per via dei tre stati di polarizzazione $\pm 1, 0$ del γ^* e $\pm 1/2$ di N , abbiamo

	γ^* Iniziale	N Iniziale	Stato Intermedio	γ^* Finale	N Finale
1	+1	+1/2	+3/2	+1	+1/2
2	+1	-1/2	+1/2	+1	-1/2
3	+1	-1/2	+1/2	0	+1/2
4	0	+1/2	+1/2	+1	-1/2
5	0	+1/2	+1/2	0	+1/2

Nonostante i casi possibili siano cinque le funzioni di struttura indipendenti sono in realtà quattro perchè i casi 3 e 4 sono legati da una trasformazione di “inversione temporale”².

Riarrangiando le quattro combinazioni indipendenti è possibile costruire delle nuove quantità grazie alle quali poi definire le *asimmetrie di elicità*, utilissime per il confronto sperimentale. Infatti si hanno

$$\begin{aligned}
\left[(1, 1/2) \rightarrow (1, 1/2) \right] + \left[(1, -1/2) \rightarrow (1, -1/2) \right] &\doteq W_T = \\
&= W_1 = \sigma_{3/2}^T + \sigma_{1/2}^T; \\
(0, 1/2) \rightarrow (0, 1/2) &\doteq W_L = \\
= (1 + \nu^2/q^2)W_2 - W_1 &= \sigma_{1/2}^L; \\
\left[(1, 1/2) \rightarrow (1, 1/2) \right] - \left[(1, -1/2) \rightarrow (1, -1/2) \right] &\doteq W_{TT} = \\
= -\nu MG_1 + q^2 G_2 &= \sigma_{3/2}^T - \sigma_{1/2}^T; \\
(1, -1/2) \rightarrow (0, 1/2) &\doteq W_{LT} = \\
= q(MG_1 + \nu G_2) &= \sigma_{1/2}^{LT};
\end{aligned} \quad (1.63)$$

dove con gli indici L , T si sono indicate le polarizzazioni longitudinale e trasversa del fotone e con TT e LT le possibili interferenze; mentre $1/2$ e $3/2$ indicano la componente (J_z) dello stato di spin intermedio.

Le asimmetrie di elicità sono definite come

$$A_1 = \frac{\sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T}{\sigma_{1/2}^T + \sigma_{3/2}^T} = -\frac{W_{TT}}{W_T} = \frac{\nu MG_1 - q^2 G_2}{W_1},$$

²È semplice notare come lo stato iniziale del caso 3 corrisponda allo stato finale del 4 e *viceversa*.

$$A_2 = \frac{\sigma_{1/2}^{LT}}{\sigma_{3/2}^T + \sigma_{1/2}^T} = \frac{W_{LT}}{W_T} = \frac{q(MG_1 + \nu G_2)}{W_1}. \quad (1.64)$$

Il vantaggio della definizione è più che altro sperimentale perché rapporti fra sezioni d'urto permettono di eliminare l'errore sistematico. Inoltre nel rapporto tra differenze e somme di sezioni d'urto si enfatizzano i contributi differenti nei vari canali, quindi in particolar modo le interferenze.

Le quantità accessibili sperimentalmente sono combinazioni lineari delle asimmetrie d'elicità sopra definite:

- Per $\vec{S} \parallel \vec{k} \rightarrow \alpha = 0$

$$A_{\parallel} = \frac{d\sigma^{\uparrow\downarrow} - d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\sigma^{\uparrow\downarrow} + d\sigma^{\uparrow\uparrow}} = \frac{E - E'\epsilon}{E(1 + \epsilon R)} A_1 + \frac{\epsilon q}{E(1 + \epsilon R)} A_2, \quad (1.65)$$

dove $\sigma^{\uparrow\uparrow}$ indica scattering tra elettroni e protoni longitudinalmente polarizzati e con spin paralleli, mentre $\sigma^{\uparrow\downarrow}$ si riferisce al caso di spin antiparalleli;

- per $\vec{S} \perp \vec{k} \rightarrow \alpha = \pi/2$

$$\begin{aligned} A_{\perp} &= \frac{d\sigma^{\uparrow\leftarrow} - d\sigma^{\uparrow\rightarrow}}{d\sigma^{\uparrow\leftarrow} + d\sigma^{\uparrow\rightarrow}} = \frac{E - E'\epsilon}{E(1 + \epsilon R)} \sqrt{2\epsilon(1 + \epsilon)} A_2 \\ &\quad + \frac{\epsilon q}{E(1 + \epsilon R)} \sqrt{\frac{(1 + \epsilon)^3}{2\epsilon}} A_1, \end{aligned} \quad (1.66)$$

dove $\sigma^{\uparrow\rightarrow}$ e $\sigma^{\uparrow\leftarrow}$ indicano i due stati di polarizzazione trasversa del protone rispetto a quella longitudinale dell'elettrone; inoltre

$$\epsilon = \left[1 + 2 \frac{\mathbf{q}^2}{q^2} \tan^2(\theta/2) \right]^{-1} \quad (1.67)$$

è la polarizzazione lineare trasversa di γ^* ed infine

$$R = \frac{W_L}{W_T} = \left(1 + \frac{\nu^2}{q^2} \right) \frac{W_2}{W_1} - 1. \quad (1.68)$$

Dalla misura di q^2 , ϵ , R , A_{\parallel} e A_{\perp} è possibile ricavare A_1 e A_2 .

Nel limite di DIS, cioè per ν , $Q^2 \rightarrow \infty$ con x_B fisso, si ha il seguente scaling:

$$\begin{aligned} MW_1(\nu, q^2) &\rightarrow F_1(x_B) & \nu W_2(\nu, q^2) &\rightarrow F_2(x_B) \\ M^2 \nu G_1(\nu, q^2) &\rightarrow \tilde{G}_1(x_B) & M \nu^2 G_2(\nu, q^2) &\rightarrow \tilde{G}_2(x_B). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Quindi per le asimmetrie di elicit  si ha

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\nu M G_1(\nu, q^2) - q^2 G_2(\nu, q^2)}{W_1(\nu, q^2)} \rightarrow \frac{\tilde{G}_1(x_B)}{F_1(x_B)} - \frac{2Mx_B}{\nu} \frac{\tilde{G}_2(x_B)}{F_1(x_B)} \rightarrow \frac{\tilde{G}_1(x_B)}{F_1(x_B)}, \\ A_2 &= q \frac{M G_1(\nu, q^2) + \nu G_2(\nu, q^2)}{W_1(\nu, q^2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2Mx_B}{\nu}} \frac{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}{F_1(x_B)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

In sostanza dalla conoscenza delle asimmetrie teoriche in regime DIS posso ricavare le funzioni di struttura polarizzate.

Nel QPM il collegamento tra funzioni di struttura \tilde{G}_1 e \tilde{G}_2 e densit  partoniche avviene nello stesso modo del caso non polarizzato. Dal prodotto tensoriale $L_{A\mu\nu} W_A^{\mu\nu}$ si costruisce il contributo polarizzato alla sezione d'urto, e lo si confronta con l'equazione (1.35), ovvero la convoluzione di un processo elementare polarizzato $e + \vec{q} \rightarrow e' + \vec{q}$ con le distribuzioni partoniche.

Alternativamente si possono riscrivere $\sigma_{3/2}^T$, $\sigma_{1/2}^T$, $\sigma_{1/2}^{LT}$ e $\sigma_{1/2}^L$ in funzione delle distribuzioni partoniche di quark polarizzati longitudinalmente nei due stati possibili q^\uparrow ($+\frac{1}{2}$) e q^\downarrow ($-\frac{1}{2}$). Per conservazione del momento angolare, $\gamma^{*\uparrow}$ interagisce solamente con q^\downarrow e *viceversa* (per quark collineari al fotone). Infatti consideriamo dapprima gli stati polarizzati del quark,

$$\begin{aligned} |q^\uparrow\rangle &\propto \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \frac{p_z}{E+m} \chi^\uparrow \end{pmatrix}, \\ |q^\downarrow\rangle &\propto \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ \frac{p_z}{E+m} \chi^\downarrow \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

con

$$\chi^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Definiamo

$$\gamma^{*\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+ \\ -\sigma_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{*\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_- \\ -\sigma_- & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.73)$$

dove

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad (1.74)$$

  l'operatore di innalzamento/abbassamento di spin.

L'azione di σ_{\pm} sugli spinori χ_{\pm} è

$$\begin{aligned}\sigma_+\chi^\uparrow &= 0, & \sigma_-\chi^\uparrow &= \chi^\downarrow, \\ \sigma_+\chi^\downarrow &= \chi^\uparrow, & \sigma_-\chi^\downarrow &= 0.\end{aligned}\tag{1.75}$$

Ciò implica

$$\begin{aligned}\gamma^{*\uparrow}|q^\downarrow\rangle &\propto \begin{bmatrix} 0 & \sigma_+ \\ -\sigma_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ \frac{p_z}{E+m}\chi^\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m}\chi^\uparrow \\ -\chi^\uparrow \end{pmatrix} \equiv |q^\uparrow\rangle, \\ \gamma^{*\uparrow}|q^\uparrow\rangle &\propto \begin{bmatrix} 0 & \sigma_+ \\ -\sigma_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \frac{p_z}{E+m}\chi^\uparrow \end{pmatrix} = |0\rangle, \\ \gamma^{*\downarrow}|q^\uparrow\rangle &\propto \begin{bmatrix} 0 & \sigma_- \\ -\sigma_- & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \frac{p_z}{E+m}\chi^\uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m}\chi^\downarrow \\ -\chi^\downarrow \end{pmatrix} \equiv |q^\downarrow\rangle, \\ \gamma^{*\downarrow}|q^\downarrow\rangle &\propto \begin{bmatrix} 0 & \sigma_- \\ -\sigma_- & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\downarrow \\ \frac{p_z}{E+m}\chi^\downarrow \end{pmatrix} = |0\rangle.\end{aligned}\tag{1.76}$$

Quindi, dal momento che per un bersaglio di protone polarizzato nello stato p^\uparrow si ha che

$$\begin{aligned}\sigma_{3/2}^T &\leftrightarrow \gamma^{*\uparrow}p^\uparrow \propto \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 q_f^\downarrow, \\ \sigma_{1/2}^T &\leftrightarrow \gamma^{*\downarrow}p^\uparrow \propto \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 q_f^\uparrow,\end{aligned}\tag{1.77}$$

l'asimmetria d'elicità A_1 può essere riscritta come

$$A_1 = \frac{\sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T}{\sigma_{1/2}^T + \sigma_{3/2}^T} = \frac{\sum_{f,\bar{f}} e_f^2 (q_f^\uparrow - q_f^\downarrow)}{\sum_{f,\bar{f}} e_f^2 (q_f^\uparrow + q_f^\downarrow)} = \frac{\tilde{G}_1(x_B)}{F_1(x_B)} \doteq \frac{g_1(x_B)}{f_1(x_B)},\tag{1.78}$$

dove

$$g_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 [q_f^\uparrow(x_B) - q_f^\downarrow(x_B)],\tag{1.79}$$

rappresenta la **distribuzione d'elicità**. Più in generale, in QCD la distribuzione di elicità dipende anche da q^2 : $g_1(x_B, q^2)$.

L'interesse riguardo la funzione $g_1(x_B, q^2)$ è dovuto al fatto che il suo primo momento di Mellin

$$\Gamma_1(q^2) \doteq \int_0^1 dx g_1(x, q^2) = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \int_0^1 dx (q_f^\uparrow(x, q^2) - q_f^\downarrow(x, q^2)) = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 \Delta_{q_f}\tag{1.80}$$

sia collegabile alla carica assiale g_A del nucleone, cioè ad una quantità conservata. Inoltre, la carica assiale è calcolabile su reticolo attraverso l'operatore d'elicità:

$$\langle p, S | \bar{q}_f \gamma^\mu \gamma_5 q_f | p, S \rangle \Big|_{\mu^2} = S^\mu \Delta q_f(\mu^2) \propto g_A \quad (1.81)$$

per uno stato adronico con momento trasverso p e spin S . Il risultato è inoltre indipendente dalla scala di rinormalizzazione μ .

Nel caso in cui, invece, i partoni abbiano momento trasverso p_T non nullo rispetto al fotone virtuale incidente, lo stato di quark polarizzato si scrive

$$|q^\uparrow\rangle \propto \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \frac{p_z}{E+m} \chi^\uparrow + \frac{p_x + ip_y}{E+m} \chi^\downarrow \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Le combinazioni possibili sono maggiori, perché

$$\gamma^{*\uparrow} |q^\uparrow\rangle \propto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+ \\ -\sigma_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\uparrow \\ \frac{p_z}{E+m} \chi^\uparrow + \frac{p_x + ip_y}{E+m} \chi^\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x + ip_y}{E+m} \chi^\uparrow \\ 0 \end{pmatrix} \neq |0\rangle, \quad (1.83)$$

ed analogamente per $\gamma^{*\downarrow} |q^\downarrow\rangle$.

Ad esempio considerando un bersaglio ideale costituito da un quark polarizzato q^\uparrow con un solo sapore, si ha

$$\sigma_{1/2}^T = |\gamma^{*\downarrow} |q^\uparrow\rangle|^2 = \left(\frac{p_z}{E+m} \right)^2 + 1, \quad (1.84)$$

$$\sigma_{3/2}^T = |\gamma^{*\uparrow} |q^\uparrow\rangle|^2 = \left| \frac{p_x + ip_y}{E+m} \right|^2 = \frac{p_T^2}{(E+m)^2}.$$

Quindi se nel caso collineare $p_T = 0$ abbiamo $A_1 = 1$, nel caso $p_T \neq 0$ risulta

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\frac{p_z^2}{(E+m)^2} + 1 - \frac{p_T^2}{(E+m)^2}}{\frac{p_z^2}{(E+m)^2} + 1 + \frac{p_T^2}{(E+m)^2}} = \frac{\bar{p}^2 + (E+m)^2 - 2p_T^2}{\bar{p}^2 + (E+m)^2} \\ &= 1 - \frac{2p_T^2}{\bar{p}^2 + (E+m)^2} = 1 - \frac{2p_T^2}{E^2 - m^2 + (E+m)^2} \\ &= 1 - \frac{p_T^2}{E(E+m)}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

che è quantità minore di 1. Per le energie in gioco nel DIS il rapporto p_T^2/E^2 è molto piccolo, e ciò ha portato per lunghi anni a ritenere che gli effetti legati al momento trasverso intrinseco dei partoni (cioè non generati

perturbativamente da correzioni radiative di QCD o dall'evoluzione DGLAP) fossero trascurabili. Vedremo tuttavia che ciò è sempre vero in relazione soprattutto a stati di polarizzazione trasversi alla direzione del moto.

1.6 Spin crisis

Nel QPM la funzione d'onda del quark nel protone polarizzato p^\uparrow viene costruita per rispettare la simmetria $SU(3)_{\text{flavor}} \otimes SU(2)_{\text{spin}} = SU(6)$. Limitandoci ad utilizzare solo i quark di valenza (trascurando quindi il contributo del quark strange nel protone) abbiamo

$$|p^\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left(2u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow - u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow - u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + \text{permutazioni sulla posizione di } d \right). \quad (1.86)$$

Le probabilità di trovare i vari flavor nei due stati di polarizzazione sono

$$\begin{aligned} P(u^\uparrow) &= \frac{1}{18} [4 \cdot 2 + 1 + 1] \cdot 3 = \frac{5}{3}, \\ P(u^\downarrow) &= \frac{1}{18} [1 + 1] \cdot 3 = \frac{1}{3}, \\ P(d^\uparrow) &= \frac{1}{18} [1 + 1] \cdot 3 = \frac{1}{3}, \\ P(d^\downarrow) &= \frac{2}{3}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

da cui si possono calcolare il primo membro della distribuzione d'elicità

$$\begin{aligned} \Gamma_1^p(q^2) &= \int_0^1 dx g_1^p(x, q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{4}{9} \left(u^\uparrow(x, q^2) - u^\downarrow(x, q^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \left(d^\uparrow(x, q^2) - d^\downarrow(x, q^2) \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{9} \Delta u + \frac{1}{9} \Delta d \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{5}{18} \cong 0.28, \end{aligned} \quad (1.88)$$

e la distribuzione di singoletto di sapore

$$\Delta\Sigma \doteq \sum_f \Delta q_f = \Delta u + \Delta d = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1. \quad (1.89)$$

Nel 1973 Ellis e Jaffe calcolarono con correzioni di pQCD le stesse quantità nell'ipotesi di perfetta simmetria $SU(3)$ e $\Delta s = 0$, ottenendo risultati abbondantemente diversi:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^p(q^2) &= \int_0^1 dx g_1^p(x, q^2) = 0.17 \pm 0.01 \\ \Delta\Sigma &= 0.60 \pm 0.12, \end{aligned} \quad (1.90)$$

per $|q^2| = 10.7 GeV^2$. Dal confronto con i risultati della (1.88) e (1.89) si deduce che nel QPM Γ_1^p sia una quantità fissa e lo spin sia determinato solo dai quark di valenza ($\Delta\Sigma = 1$), in realtà le correzioni di QCD modificano radicalmente questo scenario, sottolineando che il ruolo dei quark del “mare”, degli antiquark e dei gluoni (che non sono inclusi nel QPM) sia fondamentale. L'esperimento EMC (Cern, 1987), cioè lo scattering tra muoni e protoni polarizzati a $|q^2| = 10.7 GeV^2$ rivelò che sia le previsioni del QPM che quelle della regola di somma di Ellis-Jaffe erano sbagliate. Infatti i valori sperimentali trovati furono

$$\Gamma_1^p(q^2) = 0.126 \pm 0.010 \pm 0.015 \quad \text{e} \quad \Delta\Sigma = 0.13 \pm 0.19,$$

con discrepanze maggiori di due deviazioni standard rispetto ai calcoli teorici.

Questo test sperimentale determinò definitivamente l'inadeguatezza del QPM nel fornire previsioni riguardo lo spin del nucleone. Si determinò così quello stato di incertezza noto come *spin crisis*, la quale ebbe il suo apice con altri esperimenti (SMC, E142, E143) che confermarono i risultati di EMC. Diverse altre misure (soprattutto regole di somma) rivelarono che la dinamica dello spin del nucleone presenta aspetti cruciali di natura non perturbativa, cioè che non possono essere descritti con tecniche di QCD perturbativa (vedi regola di somma di Gerasimov, Drell, Hearn, (Hosada e Yamamoto) [18],[19],[20]). E comunque dimostrarono una volta di più l'incompletezza della descrizione basata sul QPM. Ad esempio dalla regola di somma di Bjorken polarizzata

$$\int_0^1 dx \left[g_1^p(x, q^2) - g_1^n(x, q^2) \right] \quad (1.91)$$

otteniamo nel QPM che $0.2777 = 5/18 = \frac{1}{6} g_A/g_V$, il che implica $g_A/g_V = \frac{5}{3}$, dove g_A , g_V sono le cariche assiale e vettoriale del nucleone. Le correzioni di

QCD perturbativa danno invece

$$\frac{1}{6} \frac{g_A}{g_V} \left(1 - \frac{\alpha_s(q^2)}{\pi} + O(\alpha_s) \right) = 0.191 \pm 0.002 \quad \Rightarrow \quad \frac{g_A}{g_V} = 1.257 \pm 0.003. \quad (1.92)$$

Sperimentalmente invece si ottiene 0.209 ± 0.003 .

Dopo l'esperimento EMC, furono formulate numerose ipotesi teoriche nel tentativo di fornire una spiegazione a quei risultati inaspettati (solo il 13% dello spin del nucleone sembrava essere attribuibile ai quark di valenza). Qui di seguito ne riportiamo alcuni:

- La violazione della simmetria $SU(3)$. Sappiamo infatti che questa simmetria gioca un ruolo fondamentale nel determinare Δu e Δd . Tuttavia attualmente è noto che non si tratta di una simmetria completamente rispettata e ciò potrebbe portare a correzioni significative dei risultati.
- L'incertezza nell'estrapolare i dati a $x \simeq 0$. Il comportamento della funzione $xg_1(x, q^2)$ per $x \rightarrow 0$ può modificare la regola di somma.
- La possibile evoluzione non perturbativa di $\Delta\Sigma$. Siccome la corrente assiale di non singoletto non è conservata per via dell'anomalia assiale, $\Delta\Sigma$ dipende dalla scala alla quale viene misurata; è possibile che sia grande per $\mu \sim 1\text{GeV}$, ma che assuma valori piccoli alle energie dell'esperimento EMC.

Capitolo 2

TRASVERSITÀ E DISTRIBUZIONI PARTONICHE GENERALIZZATE

2.1 Operator Product Expansion e definizione operativa di twist

In questo paragrafo viene riportata una breve e non certo esaustiva trattazione riguardo l'Operator Product Expansion (OPE) e la definizione di twist di un operatore; concetti che si riveleranno utili nel prosieguo di questa tesi.

Considerando il processo

$$e^+ + e^- \rightarrow X, \quad (2.1)$$

è possibile dimostrare (ved. Appendice B) che il contributo dominante al tensore adronico

$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

nel limite di Bjorken, è dato dal contributo a corte distanze, cioè $\xi \rightarrow 0$. Ma il prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non sempre è ben

definito in teoria quantistica di campo. Ad esempio, per un campo scalare $\phi(x)$

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)^2|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_n \langle 0|\phi(0)|p, n\rangle \langle p, n|\phi(0)|0\rangle \\ &\geq \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} |\langle 0|\phi(0)|p, 1\rangle|^2 \equiv N \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \rightarrow \infty, \quad (2.3)\end{aligned}$$

perché l'elemento di matrice, dipende solo da $p^2 = m^2$ ed è costante. La prima congettura per ovviare a questo problema venne proposta da Wilson [25] nel '69 con l'introduzione dell'**Operator Product Expansion**(OPE), dimostrato in seguito nel '73 da Zimmermann in teoria delle perturbazioni. Dati un operatore A definito nel punto x ed un operatore B in un punto y , il loro prodotto risulta

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y)\hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (2.4)$$

in cui:

- gli operatori locali \hat{O}_i sono regolari in $(x+y)/2 \forall i = 0, 1, 2, \dots$;
- la divergenza per $x \rightarrow y$ è assorbita nei coefficienti C_i ;
- i termini sono ordinati per singolarità decrescenti in C_i , $i = 0, 1, 2, \dots$;
- generalmente $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$, ma l'espressione esplicita dell'espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo;
- l'OPE è anche una definizione operativa perché può essere usata per definire un operatore composito regolare. Ad esempio: nella teoria ϕ^4 , l'operatore composito $\phi^2(x)$ può essere costruito come

$$\phi^2(x) \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x)\phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x). \quad (2.5)$$

L'OPE purtroppo non può essere applicato a tutti i tipi di processi, infatti risulta dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi. Questa limitazione è dovuta essenzialmente al fatto che, mentre per i processi appena citati il tensore adronico contiene il commutatore di due operatori di corrente (ved. eq. (2.2)), nei casi semi-inclusivi tra i prodotti degli operatori corrente compare lo stato adronico finale incognito che impedisce di utilizzare la relazione di completezza.

Tuttavia questo problema può essere aggirato attraverso una procedura consistente nella classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard attraverso lo studio sistematico dei diagrammi coinvolti, nota appunto con il nome di *diagrammatic approach*. Il diagrammatic approach consente infatti di ritrovare i risultati dell'OPE per quanto riguarda i processi inclusivi e di generalizzare la ricerca del contributo dominante per i processi semi-inclusivi.

Per un generico operatore locale $\mathcal{O}_{d,n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ simmetrico a traccia nulla di spin n e dimensione d , è possibile dimostrare il seguente risultato. L'elemento di matrice dell'operatore su uno stato adronico $|p\rangle$ ha la seguente forma

$$\langle p | \mathcal{O}_{d,n}^{\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle \sim M^{d-n-2} p^{[\mu_1} \dots p^{\mu_2]} A_n + O\left(\frac{M^2}{Q^2}\right) \quad (2.6)$$

dove le parentesi quadrate negli apici indicano la parte simmetrica e a traccia nulla del tensore, il termine A_n rappresenta una funzione di struttura non perturbativa, e la potenza di M è regolata da questioni dimensionali.

Da questo risultato è possibile ricavare la seguente forma per il tensore adronico $W_{\mu\nu}$,

$$W_{\mu\nu} \sim t_{\mu\nu} \sum_k \left(\frac{M}{Q}\right)^{d-n_k-2} \left(\frac{1}{x_B}\right)^{n_k} A_{n_k}, \quad (2.7)$$

con $t_{\mu\nu}$ tensore di rango due (per esempio $g_{\mu\nu}$) e $Q \equiv \sqrt{-q^2}$. Dall'espressione appena riportata è semplice accorgersi che nel limite per $Q^2 \rightarrow \infty$ l'importanza di un operatore è determinata dalla quantità

$$t \doteq d - n = \text{dimensione} - \text{spin}, \quad (2.8)$$

nota in letteratura con il nome di “*twist*”, che assume valori ≥ 2 (per $t = 2$ si ha lo scaling in regime di DIS). Il twist di un operatore locale quindi è molto importante per classificare i contributi dominanti.

Come abbiamo visto nella (2.2), nei vari processi le quantità coinvolte riguardano operatori bilocali, ai quali però la definizione di twist non è applicabile direttamente. Quindi per gli operatori bilocali non è possibile effettuare un'analisi in twist per determinarne i contributi dominanti se non dopo aver applicato l'OPE e aver rappresentato l'operatore bilocale come una serie infinita di operatori locali. Questo problema venne risolto da Jaffe nel 1995, il quale fornì una definizione operativa di twist anche per gli operatori bilocali regolari. Il twist per un operatore bilocale risulta essere uguale alla potenza dominante in M/Q a cui l'elemento di matrice dell'operatore contribuisce al processo considerato nel limite di corte distanze. Le potenze di M necessarie

si determinano decomponendo l'elemento di matrice in tensori di Lorentz, costruiti con i vettori indipendenti del processo, e facendo un'analisi dimensionale. La definizione operativa di Jaffe non coincide con quella data in eq. (2.8), ma è più comoda e permette di stimare direttamente le correzioni di potenze in $1/Q$.

Come dimostrato in Appendice B per il processo l'annichilazione e^+e^- , anche per il processo di DIS (sia inclusivo che semi-inclusivo) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla regione cinematica $\xi^2 \rightarrow 0$. Di conseguenza è utile quantizzare la teoria sul cono di luce, cioè di imporre le regole di quantizzazione su un iperpiano che si muove sul cono di luce ($v = c$) a $x^+ \propto t + x^3$ costante, anziché definirle su un iperpiano a $t = \text{cost}$.

2.2 Quantizzazione Light-cone

Nel'ambito della quantizzazione light-cone (LC), un generico quadrivettore z viene rappresentato come $z^\mu = [z^+, z^-, \mathbf{z}_\perp]$, con componenti LC $z^\pm = (z^0 \pm z^3)/\sqrt{2}$ e parte trasversa $\mathbf{z}_\perp = (z^1, z^2)$. Il prodotto scalare di due quadrivettori è determinato dal tensore metrico

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cioè

$$z \cdot z' = z^\mu z'_\mu = g^{\mu\nu} z_\mu z'_\nu = z^+ z'^- + z^- z'^+ - \mathbf{z}_\perp \cdot \mathbf{z}'_\perp. \quad (2.9)$$

I versori light-like divengono quindi

$$n_+ \equiv [1, 0, \mathbf{0}_\perp] \text{ e } n_- \equiv [0, 1, \mathbf{0}_\perp], \quad (2.10)$$

con $n_+^2 = n_-^2 = 0$ e $n_+ \cdot n_- = 1$. Sfruttando questi nuovi versori possiamo proiettare le componenti LC dei vettori attraverso i seguenti prodotti scalari

$$z^+ = n_- \cdot z, \quad z^- = n_+ \cdot z. \quad (2.11)$$

Un boost di Lorentz lungo l'asse \hat{z} a velocità v produce le trasformazioni

$$\tilde{x}^0 = \frac{x^0 - vx^3}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{x}^3 = \frac{x^3 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{x}^1 = x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2. \quad (2.12)$$

Le stesse relazioni riscritte con notazione LC prendono la forma

$$\tilde{x}^+ = x^+ \exp(\psi), \quad \tilde{x}^- = x^- \exp(-\psi), \quad \tilde{\mathbf{x}}_\perp = \mathbf{x}_\perp. \quad (2.13)$$

dove l'angolo iperbolico ψ è dato da $\ln[(1-v)/(1+v)]/2$, cosicché $v = -\tanh \psi$.

Un'altra trasformazione di Lorentz che tornerà particolarmente utile è il boost *trasverso* (crf e.g. [26]) che lascia la componente $+$ del vettore z invariata:

$$\begin{aligned} z^\mu &= [z^+, z^-, \mathbf{z}_\perp] \\ \longrightarrow \quad \tilde{z}^\mu &= \left[z^+, z^- - \frac{\mathbf{z}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp}{b^+} + \frac{z^+ \mathbf{b}_\perp^2}{2(b^+)^2}, \mathbf{z}_\perp - \frac{z^+}{b^+} \mathbf{b}_\perp \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{z}^2 &= 2z^+ z^- - 2z^+ \frac{\mathbf{z}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp}{b^+} + 2z^+ \frac{z^+ \mathbf{b}_\perp^2}{2(b^+)^2} - \mathbf{z}_\perp^2 + 2 \frac{z^+}{b^+} \mathbf{z}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp \\ &\quad - \left(\frac{z^+}{b^+} \right)^2 \mathbf{b}_\perp^2 = 2z^+ z^- - \mathbf{z}_\perp^2 = z^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Boosts trasversi e rotazioni in genere non commutano. Infatti in entrambi i casi una rotazione nelle coordinate spaziali produce lo stesso effetto sulle componenti trasverse del momento. Ma una rotazione lascia invariata la componente legata all'energia e quindi produce una variazione della componente LC $+$, mentre ciò non avviene per il boost.

Si rivelerà utile per il prosieguo definire i seguenti proiettori

$$\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2} \gamma^\mp \gamma^\pm \quad (2.16)$$

con

$$\gamma^\pm = \frac{1}{2} (\gamma^0 + \gamma^3), \quad (2.17)$$

tali che

$$\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_- = 1, \quad \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_- \mathcal{P}_+ = 0, \quad \mathcal{P}_\pm^2 = \mathcal{P}_\pm, \quad (2.18)$$

e

$$\mathcal{P}_\pm \gamma^\mp = \gamma^\mp \mathcal{P}_\mp, \quad \mathcal{P}_\pm \gamma^\pm = 0, \quad \mathcal{P}_\pm \gamma_\perp = \gamma_\perp \mathcal{P}_\pm. \quad (2.19)$$

Il metodo canonico per quantizzare le teorie di campo consiste nell'imporre le regole di commutazione tra i campi dinamicamente indipendenti a

tempi uguali, ad es. $z^0 = 0$. Come diretta conseguenza dell'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz ogni altra scelta dell'iperpiano space-like nello spazio di Minkowsky risulta essere equivalente. Un iperpiano light-front, definito ad es. da $z^+ = 0$, può essere visto come caso limite di una sequenza di iperpiani space-like.

Nel seguito considereremo la quantizzazione LC per campi fermionici ψ_q^c di flavor q e colore c nel gauge in cui la componente del campo gluonico è nulla, $A^+ = 0$. Ad un dato tempo LC, $z^+ = 0$, i gradi di libertà indipendenti della QCD sono le cosiddette componenti LC “buone” dei campi, ovvero $\phi_q^c \equiv \mathcal{P}_+ \psi_q^c$, e le componenti trasverse del potenziale del gluone A_α^c , con $\alpha = 1, 2$ indice trasverso e c indice di colore. I campi dipendenti, o componenti “cattive” sono $\chi_q^c \equiv \mathcal{P}_- \psi_q^c$ e risultano sistematicamente soppressi almeno come $1/Q$; non possono quindi contribuire al tensore adronico al twist dominante.

Un metodo semplice per poter mostrare il differente ruolo delle componenti “buone” e “cattive” consiste nel proiettare con \mathcal{P}_\pm l'equazione di Dirac, ottenendo così due equazioni distinte (omettendo per semplicità gli indici di colore e quark)

$$i\gamma^+ D^- \phi = i\vec{\gamma}_\perp \cdot D_\perp \chi + m\chi \quad (2.20)$$

$$i\gamma^- D^+ \phi = i\vec{\gamma}_\perp \cdot D_\perp \phi + m\phi, \quad (2.21)$$

dove $D^\pm = \partial/\partial z^\mp + igA^\pm$. Solo l'equazione (2.20) descrive la propagazione di gradi di libertà fisici.

I campi dinamici indipendenti a $z^+ = 0$ hanno la seguente espansione di Fourier nello spazio dei momenti (vedi, e.g. [26], Appendix II)

$$\begin{aligned} \phi_q^c(z^-, \mathbf{z}_\perp) &= \int \frac{dk^+ d^2\mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\ &\times \sum_\mu \{b_q(w) u_+(k, \mu) \exp(-ik^+ z^- + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{z}_\perp) \\ &+ d_q^\dagger(w) v_+(k, \mu) \exp(+ik^+ z^- - i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{z}_\perp)\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

per il campo di quark libero, e

$$\begin{aligned} A_\alpha^c(z^-, \mathbf{z}_\perp) &= \int \frac{dk^+ d^2\mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\ &\times \sum_\mu \{a(w) \epsilon_\alpha(k, \mu) \exp(-ik^+ z^- + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{z}_\perp) \\ &+ a^\dagger(w) \epsilon_\alpha^*(k, \mu) \exp(+ik^+ z^- - i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{z}_\perp)\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

per quanto riguarda il campo di gluone libero, dove $\Theta(k^+)$ è l'usuale funzione a gradino e $w = (k^+, \mathbf{k}_\perp, \mu, c)$ raccoglie la dipendenza collettiva dalle

componenti $+$ e trasversa del momento del partone, dall'elicità e dal colore. Gli operatori b e d^\dagger rispettivamente annichilano una componente “buona” dei campi di quark e creano una componente “buona” per i campi di antiquark; inoltre $u_+(k, \mu) \equiv \mathcal{P}_+ u(k, \mu)$ e $v_+(k, \mu) \equiv \mathcal{P}_+ v(k, \mu)$ sono le proiezioni degli spinori di quark e antiquark sulle componenti “buone”. Invece a e a^\dagger sono gli operatori di annichilazione e creazione per la componente trasversa dei gluoni, e $\epsilon_\alpha(k, \mu)$ è una componente trasversa del vettore di polarizzazione del gluone. Gli operatori di quark e antiquark soddisfano le seguenti regole di anticommutazione

$$\begin{aligned} \{b_{q'}(w'), b_q^\dagger(w)\} &= \{d_{q'}(w'), d_q^\dagger(w)\} \\ &= 16\pi^3 k^+ \delta(k'^+ - k^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{k}_\perp) \delta_{q'q} \delta_{\mu'\mu} \delta_{c'c}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e gli operatori di gluone soddisfano la regola di commutazione

$$[a(w'), a^\dagger(w)] = 16\pi^3 k^+ \delta(k'^+ - k^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{k}_\perp) \delta_{\mu'\mu} \delta_{c'c}. \quad (2.25)$$

2.3 Funzioni di distribuzione partoniche (PDF) al twist dominante

Il tensore adronico per il DIS inclusivo può essere approssimato nel seguente modo

$$2MW^{\mu\nu} \sim \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} \left[\Phi(p, P, S) \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu + \bar{\Phi}(p, P, S) \gamma^\nu \gamma^+ \gamma^\mu \right] \Big|_{p^+ = xP^+}, \quad (2.26)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(p, P, S) &= \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot \xi} \langle P, S | \bar{\psi}_f(\xi) \psi_f(0) | P, S \rangle \\ &= \sum_{S_X} \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle P, S | \bar{\psi}_f(0) | P_X, S_X \rangle \langle P_X, S_X | \psi_f(0) | P, S \rangle \delta(\mathbf{P} - \mathbf{p} - \mathbf{P}_X) \end{aligned} \quad (2.27)$$

il correlatore quark-quark, cioè un operatore bilocale nei campi di quark e valutato su uno stato adronico di momento P e spin S , dove i partoni trasportano la frazione LC di momento $x = p^+/P^+$ e \mathbf{P}_X il momento dello stato finale su cui si somma.

Nella sezione precedente si è visto come nella cinematica light-cone le componenti leading twist siano quelle “buone”, cioè non soppresse, e possono essere isolate attraverso il proiettore P^+ . Applicando lo stesso metodo al correlatore della (2.27) si estraggono le distribuzioni partoniche al leading twist. Infatti

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^+ \left\{ \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \Phi(p, P, S) \Big|_{p^+=xP^+} \right\} \gamma^+ \\ &= \mathcal{P}^+ \left\{ \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{ixP^+\xi^-} \langle P, S | \bar{\psi}_f(\xi^-) \psi_f(0) | P, S \rangle \Big|_{\xi^+=\xi_\perp} \right\} \gamma^+, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove $S = (0, \mathbf{S})$, $\mathbf{S} = (\lambda, \mathbf{S}_T)$. Mediante l'operazione di traccia definita da

$$\Phi^{[\Gamma]}(x, S) = \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P, S) \Gamma] \Big|_{p^+=xP^+}, \quad (2.29)$$

è possibile isolare tre funzioni partoniche al twist due:

$$f_1(x) = \Phi^{[\gamma^+]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) \gamma^+ \psi_f(0) | P \rangle; \quad (2.30)$$

$$\lambda g_1(x) = \Phi^{[\gamma^+ \gamma_5]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) \gamma^+ \gamma_5 \psi_f(0) | P \rangle; \quad (2.31)$$

$$S_T^i h_1(x) = \Phi^{[i\sigma^{i+} \gamma_5]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) i\sigma^{i+} \gamma_5 \psi_f(0) | P \rangle. \quad (2.32)$$

Al variare di Γ in una base di matrici di Dirac indipendenti ($\mathbf{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$) si ricavano le espressioni per le distribuzioni partoniche (PDF) anche ai twist soppressi. Ad esempio le distribuzioni al twist tre sono date da

$$\begin{aligned} \Phi^{[\mathbf{1}]}(x, S) &= \frac{M}{P^+} e(x), \\ \Phi^{[\gamma^i \gamma_5]}(x, S) &= \frac{M}{P^+} S_T^i g_T(x), \\ \Phi^{[i\sigma^{+-} \gamma_5]}(x, S) &= \frac{M}{P^+} \lambda h^L(x), \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove il termine $M/P^+ \sim M/Q$ corrisponde al contributo soppresso secondo la definizione di twist efficace.

Diamo ora l'interpretazione probabilistica delle PDF al leading twist.

Le PDF denominati $f_1(x)$ e $g_1(x)$ sono quantità note. Infatti $f_1(x)$ rappresenta la probabilità di trovare un quark con una frazione x del momento longitudinale dell'adrone genitore¹; mentre $g_1(x)$ rappresenta la distribuzione di elicità, cioè per un adrone polarizzato longitudinalmente con elicità λ fornisce l'elicità netta (cioè la differenza tra elicità parallele e opposte a λ) di quark longitudinalmente polarizzati con frazione x del momento dell'adrone genitore. Questo risultato può essere semplicemente dimostrato utilizzando i proiettori di elicità

$$\mathcal{P}_{R/L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad \text{con} \quad [\mathcal{P}_{R/L}, \mathcal{P}_{\pm}] = 0. \quad (2.34)$$

Il correlatore quark-quark per $f_1(x)$ coinvolge la traccia su γ^+ e quindi una combinazione operatoriale del tipo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^+\psi &= \psi^\dagger \mathcal{P}_+ \psi = \phi^\dagger \phi \\ &= \phi^\dagger (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) \phi = \phi^\dagger (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L)^\dagger (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) \phi \\ &= \phi^\dagger (\mathcal{P}_R^\dagger \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L^\dagger \mathcal{P}_L) \phi = \bar{\mathcal{R}}\mathcal{R} + \bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

che è proprio la distribuzione di momento sommata su tutte le elicità, cioè non polarizzata. Per $g_1(x)$ si ha invece

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^+\gamma_5\psi &= \psi^\dagger \mathcal{P}_+ \gamma_5 \mathcal{P}_+ \psi = \phi^\dagger (\mathcal{P}_R - \mathcal{P}_L) \phi \\ &= \phi^\dagger (\mathcal{P}_R^\dagger \mathcal{P}_R - \mathcal{P}_L^\dagger \mathcal{P}_L) \phi = \bar{\mathcal{R}}\mathcal{R} - \bar{\mathcal{L}}\mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

cioè lo sbilanciamento tra quark destrorsi e sinistrorsi rispetto alla direzione definita da λ , cioè l'elicità netta $g_1(x)$.

La terza PDF, $h_1(x)$, rappresenta in un adrone trasversalmente polarizzato la densità del numero di quark con frazione di momento x e polarizzazione parallela a quella dell'adrone, meno la densità del numero di quark con la stessa frazione di momento e polarizzazione antiparallela. L'interpretazione probabilistica di questa PDF sulla base di elicità non è possibile perché

$$\bar{\psi}i\sigma^{i+}\gamma_5\psi = \phi^\dagger (\mathcal{P}_L^\dagger \gamma^i \mathcal{P}_R - \mathcal{P}_R^\dagger \gamma^i \mathcal{P}_L) \phi, \quad (2.37)$$

¹Equivalente alla notazione $q_f(x)$ la notazione $f_1(x)$ trova la sua giustificazione nel rappresentare compattamente il fatto che il quark non è polarizzato -lettera f - e che il contributo è dominante -indice 1-; per il caso polarizzato si usa la lettera g per polarizzazione longitudinale e h per quella trasversa.

che non è più un'espressione diagonale e mischia le componenti di elicità. Tuttavia sulla base di spin trasverso, utilizzando i proiettori di spin trasverso definiti da

$$\mathcal{P}_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1 \pm \gamma^i \gamma_5}{2}, \quad (2.38)$$

la traccia del correlatore quark-quark con l'operatore $i\sigma^{i+}\gamma_5$ fornisce la seguente espressione

$$\bar{\psi} i\sigma^{i+} \gamma_5 \psi = \phi^\dagger (\mathcal{P}_\uparrow^\dagger \mathcal{P}_\uparrow - \mathcal{P}_\downarrow^\dagger \mathcal{P}_\downarrow) \phi, \quad (2.39)$$

quindi $h_1(x)$ può essere interpretata come distribuzione di spin trasverso del protone, nota più comunemente con il nome di **trasversità**.

2.3.1 Trasversità e sue proprietà

La trasversità [27] venne introdotta per la prima volta nel 1979 da Ralston e Soper in un lavoro riguardante il processo di Drell-Yan polarizzato, nel quale era indicata come $h_T(x)$; dopodiché venne apparentemente dimenticata a causa di un pregiudizio diffuso secondo il quale gli effetti di spin trasverso dovrebbero essere soppressi perché in approssimazione di quark senza massa e per urti collineari la QCD proibisce processi che cambiano l'elicità. Fu riscoperta solamente negli anni novanta, grazie ai lavori di Artru e Mekhfi (1990), che la chiamarono $\Delta_1 q(x)$, e di Jaffe e Ji [28] che la ribattezzarono $h_1(x)$ (vedi nota di pag. precedente).

Dal punto di vista sperimentale la trasversità essendo una quantità che non conserva l'elicità, non è facilmente testabile negli usuali processi di scattering, che richiedono simmetria per trasformazioni di elicità. Ad esempio non è accessibile nei processi di DIS inclusivo. Infatti nel QPM per il DIS inclusivo si ha un parallelo tra le funzioni di struttura e le PDF $f_1(x)$ e $g_1(x)$

$$\begin{aligned} f_1(x) \rightarrow F_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 [f_1^f(x_B) + \bar{f}_1^f(x_B)] = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 [q_f^\uparrow(x_B) + q_f^\downarrow(x_B)], \\ g_1(x) \rightarrow G_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 [g_1^f(x_B) + \bar{g}_1^f(x_B)] = \frac{1}{2} \sum_{f,\bar{f}} e_f^2 [q_f^\uparrow(x_B) - q_f^\downarrow(x_B)], \end{aligned} \quad (2.40)$$

mentre $h_1(x)$ non ha controparte a livello di funzioni di struttura, perché per il DIS inclusivo polarizzato, nel tensore adronico antisimmetrico $W_A^{\mu\nu}$ di eq. (1.57) il contributo di G_2 è legato alla polarizzazione trasversa dell'adrone, ma è soppresso rispetto a quello di G_1 in quanto contribuisce al twist 3.

Per anni quindi i fisici hanno creduto che lo spin trasverso generasse effetti al twist 3, legando G_2 alla PDF g_T (vedi eq. (2.33)). In realtà, questo pregiudizio si basa sulla confusione tra polarizzazione trasversa dell'adrone (al twist 3 nel tensore adronico) e distribuzione di spin trasverso dei partoni, che non necessariamente deve apparire solo al twist tre:

	$\Phi^{[\Gamma]}$	spin long.	$\Phi^{[\Gamma]}$	spin trasv.
twist 2	$\gamma^+\gamma_5$	λg_1	$i\sigma^{i+}\gamma_5$	$S_T^i h_1$
twist 3	$i\sigma^{i+}\gamma_5$	λh_L	$\gamma^i\gamma_5$	$S_T^i g_T$

In sostanza quindi $h_1(x)$ ha esattamente la stessa importanza di $f_1(x)$ e $g_1(x)$ al twist 2. Infatti se, come visto, sulla base di elicità $f_1(x)$ e $g_1(x)$ sono diagonali mentre $h_1(x)$ no, sulla base di trasversità la situazione è opposta.

Tutte le distribuzioni partoniche sono definite nel sistema di riferimento detto “Infinite Momentum Frame” (IFM), in cui si considera un boost di Lorentz in direzione z , per $Q \rightarrow \infty$. Se ci mettessimo però in un riferimento non relativistico le rotazioni di Galileo e i boosts commuterebbero e di conseguenza g_1 e h_1 sarebbero la stessa cosa. Quindi dallo studio della distribuzione di spin trasverso è possibile ottenere informazioni sul moto relativistico dei quark nel nucleone.

Dal momento che h_1 non conserva l'elicità (e quindi neanche la chiralità, da cui il nome gergale di “chiral-odd” PDF), essa presenta proprietà peculiari per quanto riguarda l'evoluzione. Per adroni genitori con spin 1/2 come il nucleone, le variazioni d'elicità massime sono $\Delta\lambda = \pm 1$. Pertanto h_1 , che mischia le componenti di elicità, non può essere definita per oggetti come i gluoni, che hanno elicità intera e possono presentare variazioni del tipo $\Delta\lambda = \pm 2$. Durante l'evoluzione secondo le equazioni DGLAP, dunque la h_1 di un quark non può ricevere contributi da gluoni radiativi. Inoltre il primo momento di Mellin della trasversità, che risulta proporzionale alla carica tensoriale, ha una struttura dispari per trasformazioni di carica. Quindi a differenza di ciò che accade per l'elicità, l'evoluzione di $h_1(x, Q^2)$ non riceve contributi neppure da coppie del mare di Dirac. In sostanza è molto diversa in linea di principio da quella delle altre PDF al twist dominante. Esplorare tale comportamento è quindi un test probante della QCD in regime non perturbativo.

Poiché le sezioni d'urto non mischiano l'elicità, sono cioè “chiral-even”, il problema di estrarre la trasversità dai dati si traduce nel problema di trovare al leading twist una combinazione che coinvolga la trasversità accoppiata ad un'altra funzione partonica di tipo “chiral-odd”.

Il processo più semplice è la collisione di protoni trasversalmente polariz-

zati nel processo di Drell-Yan

$$p^\uparrow + p^\uparrow \rightarrow l^+ l^- + X, \quad (2.41)$$

grazie al quale vengono calcolate le asimmetrie di spin

$$A_{TT} = \frac{d\sigma(p^\uparrow p^\uparrow) - d\sigma(p^\uparrow p^\downarrow)}{d\sigma(p^\uparrow p^\uparrow) + d\sigma(p^\uparrow p^\downarrow)} \propto \sum_{f, \bar{f}} e_f^2 \frac{h_1(x_1)^f \bar{h}_1^f(x_2)}{f_1^f(x_1) \bar{f}_1^f(x_2)}. \quad (2.42)$$

In questo processo la trasversità è il partner “chiral-odd” di se stessa. Però le asimmetrie sono molto piccole, circa l'1%, in quanto coinvolgono la distribuzione di spin trasverso per l'antiquark, che nel protone risulta soppressa. In alternativa si possono considerare processi alla Drell-Yan con antiprotoni

$$p^\uparrow + \bar{p}^\uparrow \rightarrow l^+ l^- + X, \quad (2.43)$$

ma di questi esperimenti per ora esistono solamente progetti, perché ottenere antiprotoni polarizzati trasversalmente è complicato.

Un altro processo da cui è possibile estrarre la trasversità è il DIS semi-inclusivo polarizzato. Ad esempio, nello scattering su un bersaglio di protoni trasversalmente polarizzati, se nello stato finale si rivela una particella Λ trasversalmente polarizzata,

$$e + p^\uparrow \rightarrow e' + \Lambda^\uparrow + X, \quad (2.44)$$

si può calcolare l'asimmetria di spin

$$D_{NN} = \frac{d\sigma(p^\uparrow \Lambda^\uparrow) - d\sigma(p^\downarrow \Lambda^\downarrow)}{d\sigma(p^\uparrow \Lambda^\uparrow) + d\sigma(p^\downarrow \Lambda^\downarrow)} \propto \sum_{f, \bar{f}} e_f^2 \frac{h_1(x)^f H_1^f(z)}{f_1^f(x) D_1^f(z)}, \quad (2.45)$$

dove $H_1^f(z)$ e $D_1^f(z)$ sono funzioni che descrivono la frammentazione di un quark polarizzato trasversalmente, oppure non polarizzato, nell'adrone Λ .

Anche qui, però, si hanno dei problemi per estrarre $h_1(x)$. Infatti, H_1^f , contiene informazioni sul meccanismo di trasferimento della polarizzazione dal quark alla Λ , che non è non ancora ben noto.

Un'ulteriore possibilità che è stata presa in considerazione in tempi recenti, si basa sulla considerazione che nel processo di SIDIS i quadrivettori momento indipendenti (nucleone iniziale, P , sonda esterna, q , e adrone finale, P_h) non sono tra loro collineari. Pertanto se la sezione d'urto rimane differenziale rispetto ad esempio $d\mathbf{P}_{hT}$, allora si può avere sensibilità ai momenti trasversi intrinseci dei partoni nel vertice hard. Questa osservazione implica una struttura più ricca nelle PDF e FF al twist 2. In questo modo la trasversità può accoppiarsi a diverse altre distribuzioni partoniche o

funzioni di frammentazione, incrementando le opportunità per individuare meccanismi di estrazione. Ad esempio il nuovo correlatore quark-quark, nel caso dell'operatore $i\sigma^{i+}\gamma_5$ diviene

$$\Phi^{[i\sigma^{i+}\gamma_5]}(x, \mathbf{p}_T, S) = S_T^i h_{1T}(x, \mathbf{p}_T^2) + \frac{p_T^i}{M} \left[\lambda h_{1L}^\perp(x, \mathbf{p}_T^2) + \frac{\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{S}_T}{M} h_{1T}^\perp(x, \mathbf{p}_T^2) \right]. \quad (2.46)$$

Analogamente a quanto visto per le PDF, anche la struttura delle FF si arricchisce e questo permette di studiare un effetto non perturbativo legato al momento angolare orbitale dei partoni, l'effetto Collins [30], che interviene nel processo

$$e + p^\uparrow \rightarrow e' + \pi + X. \quad (2.47)$$

Mantenendo la sezione d'urto differenziale in $d\mathbf{P}_{hT}$ si può costruire un'asimmetria del tipo

$$\frac{\int d\phi_s d\mathbf{P}_{hT} \frac{|\mathbf{P}_{hT}|}{M_h} \sin(\phi_c) (d\sigma^\uparrow - d\sigma^\downarrow)}{\int d\phi_s d\mathbf{P}_{hT} (d\sigma^\uparrow + d\sigma^\downarrow)} \propto \sum_{f, \bar{f}} e_f^2 \frac{z h_1^f(x) H_1^{\perp f(1)}(z)}{f_1^f(x) D_1^f(z)}, \quad (2.48)$$

dove ϕ_s è l'angolo azimutale della direzione di polarizzazione del protone bersaglio al piano di scattering, e $\phi_c = \phi_s + \phi_h$ è l'angolo di Collins, con ϕ_h angolo azimutale che identifica la direzione di \mathbf{P}_h . $H_1^{\perp f(1)}(z)$ è data da

$$H_1^{\perp f(1)}(z) = \int d\mathbf{k}_T \frac{\mathbf{k}_T^2}{2M_h} H_1^{\perp f}(z, \mathbf{k}_T^2), \quad (2.49)$$

dove $H_1^{\perp f}(z, \mathbf{k}_T^2)$ è la funzione di Collins, ovvero la funzione che descrive la frammentazione di un quark trasversalmente polarizzato, di sapore f e momento trasverso \mathbf{k}_T , in un adrone non polarizzato con frazione di energia z . L'indice 1 segnala che la funzione è al twist 2, mentre il simbolo “ \perp ” richiama la necessità di costruire asimmetrie pesate col momento \mathbf{P}_{hT} (vedi eq. SSA Collins).

Questo effetto consiste nel trasferire la polarizzazione del quark di frammentazione non alla polarizzazione trasversa dell'adrone, ma al moto orbitale di un adrone non polarizzato descritto dal suo momento trasverso \mathbf{P}_{hT} . Una possibile congettura per l'interpretazione di questo effetto è quella fornita da Artru [31], secondo il quale se il fotone γ^* colpisce un quark polarizzato nel nucleone, la stringa di colore tra il quark polarizzato e la coppia di partoni “spettatori” ha un momento angolare orbitale determinato dalla polarizzazione trasversa del nucleone bersaglio; quando la stringa si rompe, viene generata una coppia $q\bar{q}$, che possiede momento angolare e determina l'asimmetria azimutale nell'emissione dell'adrone finale osservato (vedi Fig. 2.1).

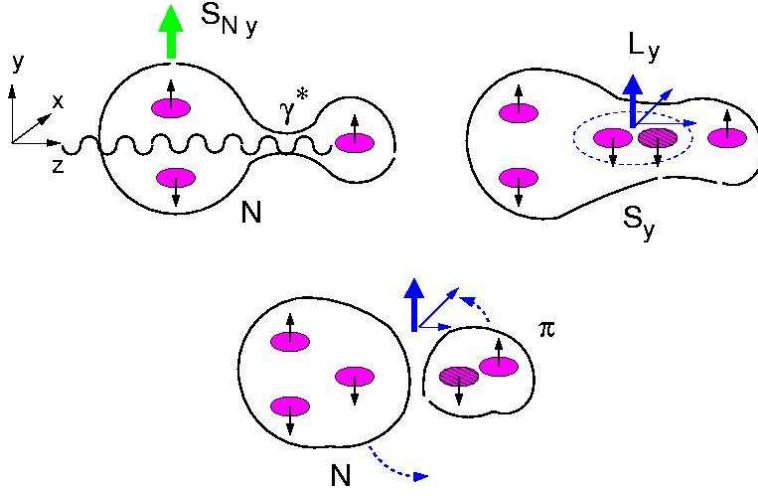


Figura 2.1: Rappresentazione grafica dell'interpretazione di Artru all'effetto Collins

2.4 Distribuzioni partoniche generalizzate (GPD)

Per determinare come lo spin del nucleone viene costruito in base allo spin dei suoi costituenti, le PDF non sono sufficienti, occorre introdurre uno strumento teorico molto più potente: la distribuzione partonica generalizzata (GPD) (per una rassegna ved. [32]). Essa interviene ad esempio nel calcolo di processi di scattering Compton profondamente virtuali (Deeply Virtual Compton Scattering, DVCS)

$$e + p \rightarrow e' + p' + \gamma \quad (2.50)$$

per regime cinematico $Q^2 \rightarrow \infty$, x_B fisso e $t = (p - p')^2$ piccolo, ma diverso da zero. Infatti per studiare i processi di DVCS, che sono non diagonali nello stato adronico ($p \neq p'$), si introduce il correlatore quark-quark non diagonale [29]

$$\Phi'(\bar{P}, P, P', S, S') = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{i\bar{P} \cdot z} \langle P', S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z}{2} \right) \psi \left(\frac{z}{2} \right) | P, S \rangle, \quad (2.51)$$

con $\bar{P} = (P + P')/2$.

Analogamente al caso delle PDF, anche per le GPD è possibile effettuare un'analisi in twist del correlatore. L'estrazione del contributo dominante

avviene esattamente come per le PDF, decomponendo il correlatore Φ' in termini delle strutture di Dirac e dei quadrivettori P, P', S, S' , integrando nella direzione LC – soppressa e proiettando le componenti LC “buone” attraverso gli operatori $\gamma^+, \gamma^+\gamma_5, i\sigma^{i+}\gamma_5$:

$$\begin{aligned}
\Phi'^{[\gamma^+]} &= \int \frac{dz^-}{(2\pi)} e^{ix\bar{P}^+ \cdot z} \langle P', S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+ \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | P, S \rangle \Big|_{z^+ = \mathbf{z}_\perp = 0} \\
&= \frac{1}{\bar{p}^+} \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ H(x, \xi, t) + \frac{i\sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} E(x, \xi, t) \right\} u(P, S), \\
\Phi'^{[\gamma^+\gamma_5]} &= \int \frac{dz^-}{(2\pi)} e^{ix\bar{P}^+ \cdot z} \langle P', S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+ \gamma_5 \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | P, S \rangle \Big|_{z^+ = \mathbf{z}_\perp = 0} \\
&= \frac{1}{\bar{p}^+} \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ \gamma_5 \tilde{H}(x, \xi, t) + \frac{\gamma_5 \Delta^+}{2M} \tilde{E}(x, \xi, t) \right\} u(P, S), \\
\Phi'^{[i\sigma^{i+}\gamma_5]} &= \int \frac{dz^-}{(2\pi)} e^{ix\bar{P}^+ \cdot z} \langle P', S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) i\sigma^{i+} \gamma_5 \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | P, S \rangle \Big|_{z^+ = \mathbf{z}_\perp = 0} \\
&= \frac{1}{\bar{p}^+} \bar{u}(P', S') \left\{ \sigma^{i+} \gamma_5 H_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \Delta_\alpha \bar{P}^\beta}{2M} \tilde{H}_T(x, \xi, t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \Delta_\alpha \gamma_\beta}{2M} E_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \bar{P}^\alpha \gamma_\beta}{2M} \tilde{E}_T(x, \xi, t) \right\} u(P, S),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

dove $\bar{p}^+ = x\bar{P}^+$ è il momento medio del partone. Osservando l'espressione dei vari correlatori si vede che questi sono non diagonali anche nello spin dell'adrone $S \neq S'$, quindi è possibile modificare l'elicità del nucleone. Di conseguenza il numero delle GPD rispetto a quello delle PDF raddoppia o quadruplica a seconda che si conservi o meno l'elicità del quark. Abbiamo quindi, per il caso dei proiettori γ^+ e $\gamma^+\gamma_5$, due GPD “chiral-even ciascuno”: H, E e \tilde{H}, \tilde{E} ; le funzioni E e \tilde{E} relative al cambio d'elicità del nucleone. Invece per l'operatore $\sigma^{i+}\gamma_5$ abbiamo quattro GPD chiral-odd: H_T, E_T, \tilde{H}_T e \tilde{E}_T . Ciascuna GPD dipende, oltre che da x e t , dal parametro $\xi = (p^+ - p'^+)/ (p^+ + p'^+)$, cioè dal cambio di momento longitudinale del partone.

Dal momento che il correlatore è non diagonale le GPD non sono densità di probabilità come le PDF, ma ampiezze di interferenza tra due stati differenti, per questo non si ha la possibilità di un'immediata interpretazione dal punto di vista probabilistico.

Per poter interpretare le GPD probabilisticamente bisogna ricorrere alla rappresentazione overlap ideata da Diehl *et al.* [33], che tratteremo in dettaglio nel capitolo 3.

Le GPD sono uno strumento molto generale e flessibile, infatti prendendone il limite diagonale (forward) per $\xi, t \rightarrow 0$ esse riproducono le PDF al

twist due,

$$H(x, 0, 0) = f_1(x) \quad (2.53)$$

$$\tilde{H}(x, 0, 0) = g_1(x), \quad (2.54)$$

$$H_T(x, 0, 0) = h_1(x). \quad (2.55)$$

Inoltre, calcolando il primo momento di Mellin delle GPD H e E si ottengono i fattori di forma dell'adrone considerato. Ad esempio, per il nucleone

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx H(x, \xi, t) &= F_1(t), \\ \int_{-1}^1 dx E(x, \xi, t) &= F_1(t), \end{aligned} \quad (2.56)$$

con $F_{1/2}$ fattore di forma elettrico e magnetico. Analogamente, dal primo momento di Mellin delle GPD \tilde{H} e \tilde{E} si ottengono il fattore di forma assiale, $g_A(t)$, e pseudoscalare, $g_P(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \tilde{H}(x, \xi, t) &= g_A(t), \\ \int_{-1}^1 dx \tilde{E}(x, \xi, t) &= g_P(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Capitolo 3

RAPPRESENTAZIONE A OVERLAP DELLE DISTRIBUZIONI PARTONICHE GENERALIZZATE

3.1 Decomposizione degli stati alla Fock

L'ingrediente essenziale per l'interpretazione probabilistica delle funzioni fenomenologiche coinvolte nella descrizione dei processi di scattering hard è la decomposizione degli stati di Fock [26], i.e., la descrizione di uno stato adronico attraverso una sovrapposizione di stati di Fock partonici contenenti i quanti liberi delle componenti LC “buone” dei campi di (anti)quark e gluoni. Gli autostati di momento del singolo quark, antiquark o gluone sono generati dall'azione degli operatori b^\dagger , d^\dagger e a^\dagger sul vuoto perturbativo¹,

$$\begin{aligned} |q; w\rangle &= b_q^\dagger(w)|0\rangle, \\ |\bar{q}; w\rangle &= d_q^\dagger(w)|0\rangle, \\ |g; w\rangle &= a_q^\dagger(w)|0\rangle, \end{aligned} \tag{3.1}$$

¹Si assume un vuoto perturbativo “banale”, i.e., $b|0\rangle = d|0\rangle = a|0\rangle$, e vengono ignorati possibili problemi dovuti ai modi di zero, che esulano dallo scopo di questa tesi.

e grazie alle regole di (anti)commutazione (2.24) e (2.25) è possibile ottenere la normalizzazione di questi stati

$$\langle s'; w' | s; w \rangle = 16\pi^3 k^+ \delta(k'^+ - k^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp}) \delta_{s's} \delta_{\mu'\mu} \delta_{c'c} \quad (3.2)$$

per partoni s' e s di ogni tipo. Un generico stato adronico di momento p e elicità λ viene scritto

$$|H; p, \lambda\rangle = \sum_{N, \beta} \int [dx]_N [d^2 \mathbf{k}_{\perp}]_N \Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r) |N, \beta; k_1, \dots, k_N\rangle, \quad (3.3)$$

dove $\Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r)$ è la funzione d'onda LC (LCWF) di momento dello stato di Fock ad N -partoni $|N, \beta; k_1, \dots, k_N\rangle$. L'indice β indica la sua composizione partonica, oltre che il sapore, l'elicità e il colore di ogni partone.

I partoni sono caratterizzati, oltre che dai loro numeri quantici (sapore, elicità e colore), dai loro momenti $k_i = [k_i^+, k_i^-, \mathbf{k}_{\perp i}]$. Le LCWFs, d'altro canto non dipendono dal momento dell'adrone, ma solo dalle coordinate di momento del partone relative al momento dell'adrone; ovvero, in altre parole, il moto del centro di massa può essere separato dal moto relativo dei partoni. Gli argomenti della LCWF r , cioè $x_i \equiv k_i^+/p^+$ e il momento trasverso $\mathbf{k}_{\perp i}$, possono venire identificati più facilmente in sistemi di riferimento in cui l'adrone ha momento trasverso nullo. Questi tipi di riferimenti sono denominati "Hadron-Frames" ed in essi viene nuovamente utilizzata una notazione collettiva

$$r_i = (x_i, \mathbf{k}_{\perp i}), \quad (3.4)$$

con la prescrizione che $\Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r) = \Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r_1, \dots, r_N)$ per gli argomenti delle LCWFs. Uno stato ad N -partoni è definito come

$$|N, \beta; k_1, \dots, k_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{f_{N, \beta}}} \prod_i b_{q_i}^{\dagger}(w_i) \prod_j d_{q_j}^{\dagger}(w_j) \prod_l a^{\dagger}(w_l) |0\rangle. \quad (3.5)$$

A causa delle relazioni di (anti)commutazione (2.24) e (2.25) gli stati $|N, \beta; k_1, \dots, k_N\rangle$ sono completamente (anti)simmetrici per scambio dei momenti k_i dei gluoni (quark); quindi senza perdita di generalità è possibile prendere $\Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r)$ con la stessa (anti)simmetria, rispetto alle permutazioni, del momento corrispondente r_i . Il fattore di normalizzazione $f_{N, \beta}$ nell'equazione (3.5) contiene un fattore $n!$ per ogni sottoinsieme di n partoni i cui numeri quantici siano identici, in questo modo si ha

$$\begin{aligned} & \Psi_{N, \beta'}^{*\lambda}(r') \Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r) \langle N', \beta'; k'_1, \dots, k'_N | N, \beta; k_1, \dots, k_N \rangle \\ &= |\Psi_{N, \beta}^{\lambda}(r)|^2 \delta_{N'N} \delta_{\beta'\beta} \prod_i^N 16\pi^3 k^+ \delta(k_i'^+ - k_i^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\perp i} - \mathbf{k}_{\perp i}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

La $\delta_{\beta'\beta}$ implica che non occorre introdurre indici differenti per stati in cui i numeri quantici per ogni partone differiscono solo per una permutazione. Da ciò risulta che gli stati adronici sono così normalizzati

$$\langle H; p', \lambda' | H; p, \lambda \rangle = 16\pi^3 p^+ \delta(p_i'^+ - p_i^+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}'_{\perp i} - \mathbf{p}_{\perp i}) \delta_{\lambda'\lambda}, \quad (3.7)$$

con

$$\sum_{N,\beta} \int \left[\frac{dx}{\sqrt{x}} \right]_N [d^2\mathbf{k}_{\perp}]_N |\Psi_{N,\beta}^{\lambda}(r)|^2 = 1. \quad (3.8)$$

Le misure d'integrazione che compaiono nelle equazioni (3.3) e (3.8) sono definite attraverso le seguenti relazioni

$$\left[\frac{dx}{\sqrt{x}} \right]_N \equiv \prod_{i=1}^N \frac{dx_i}{\sqrt{x_i}} \delta(1 - \sum_{i=1}^N x_i), \quad (3.9)$$

$$[d^2\mathbf{k}_{\perp}]_N \equiv \frac{1}{(16\pi^3)^{N-1}} \prod_{i=1}^N d^2\mathbf{k}_{\perp i} \delta^{(2)}(\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_{\perp i} - \mathbf{p}_{\perp}). \quad (3.10)$$

Va sottolineato che gli stati partonici (3.5) non si riferiscono specificatamente ad un adrone, piuttosto sono caratterizzati da un set β di numeri quantici. Il loro combinarsi a uno stato adronico definito con determinati numeri quantici è assorbito nelle funzioni $\Psi_{N,\beta}^{\lambda}(r)$. Ad esempio lo stato di Fock a tre quark di valenza per un nucleone ha una sola LCWF indipendente per tutte le configurazioni dove le elicità partoniche si sommano a dare l'elicità dell'adrone. Per stati di Fock più complicati ci sono, in generale, più LCWF indipendenti.

3.2 Cinematica

Dal momento che gli adroni sono massivi occorre specificare gli stati d'elicità che appaiono nella (3.3). A questo punto quello che si fa è introdurre la funzione d'onda $\Psi_{N,\beta}^{\lambda}(r)$ scrivendo la (3.3) per uno stato con $\mathbf{p}_{\perp} = 0$, i.e., nel sistema di riferimento adronico. Nell'“hadron frame” gli stati d'elicità $|H; p, \lambda\rangle$ sono definiti nella maniera usuale, cioè con la direzione dello spin allineata o antiallineata con il momento dell'adrone. Da questa si ottiene poi la decomposizione degli stati di Fock per un adrone con $\mathbf{p}_{\perp} \neq 0$ applicando ad entrambi i membri della (3.3) un “boost *trasverso*” (2.14). Si può mostrare che il vettore covariante di spin è dato da:

$$\frac{\lambda}{m} \left[p^+, \frac{\mathbf{p}_{\perp}^2 - m^2}{2p^+}, \mathbf{p}_{\perp} \right]. \quad (3.11)$$

Nel limite $m = 0$, gli stati LC di elicità così definiti coincidono con gli stati d'elicità usuali. Per $m \neq 0$ non coincidono: per $\mathbf{p}_\perp \neq 0$ essi non sono autostati del momento angolare lungo la loro direzione di moto.

Gli stati adronici iniziali e finali sono caratterizzati dai momenti p e p' , che vengono coinvolti nelle definizioni delle GPDs. Per parametrizzarli si introduce il momento medio

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p + p'), \quad (3.12)$$

scegliendo il 3-momento $\bar{\mathbf{p}}$ diretto lungo l'asse \mathbf{e}_3 , e scrivendo

$$\begin{aligned} p &= \left[(1 + \xi)\bar{p}^+, \frac{M^2 + \Delta_\perp^2/4}{2(1 + \xi)\bar{p}^+}, -\frac{\Delta_\perp}{2} \right], \\ p' &= \left[(1 - \xi)\bar{p}^+, \frac{M^2 + \Delta_\perp^2/4}{2(1 - \xi)\bar{p}^+}, +\frac{\Delta_\perp}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

(M massa del nucleone) con il vettore trasverso Δ_\perp , la componente più \bar{p}^+ e ξ parametro di distorsione²

$$\xi = \frac{(p - p')^+}{(p + p')^+}, \quad (3.14)$$

che descrive la variazione della componente $+$ del momento. Il momento trasferito assume la forma

$$\Delta = p - p' = \left[-2\xi\bar{p}^+, \frac{\xi(M^2 + \Delta_\perp^2/4)}{(1 - \xi^2)\bar{p}^+}, \Delta_\perp \right], \quad (3.15)$$

e dall'equazione (3.13) il suo quadrato diventa

$$t = \Delta^2 = -\frac{4\xi^2 M^2 + \Delta_\perp^2}{1 - \xi^2}. \quad (3.16)$$

Va notato che la positività di Δ_\perp^2 implica il valore minimo

$$-t_0 = \frac{4\xi^2 M^2}{1 - \xi^2} \quad (3.17)$$

per $-t$ ad un dato ξ , che può essere visto come un valore massimo di ξ a dato t . Il momento del partone emesso all'adrone verrà indicato con k , mentre il momento di quello assorbito con k' ; da questi viene introdotto, in analogia con la (3.12), il momento partonico medio \bar{k} come $(k + k')/2$ e corrispondentemente la frazione di momento $\bar{x} = \bar{k}^+/\bar{p}^+$. La frazione di momento \bar{x} è quella che XiangDong Ji indica con x nel suo articolo [29].

²Questo parametro, in inglese skewedness, inizialmente dava il nome alle GPDs. Le quali, infatti, venivano chiamate Skewed Parton Distributions (SPDs).

3.3 GPD di quark non polarizzata

In questo paragrafo si deriva la rappresentazione “*overlap*” [33] per le GPDs al leading-twist. Per chiarezza viene studiato il caso di quark non polarizzati all’interno del protone, prendendo, quindi, in considerazione elementi di matrice di protone della componente più di operatori bilocali di campo di quark sommati sul colore. La generalizzazione al caso di altri adroni è banale. Seguendo Ji [29], si definiscono le GPDs $H^q(\bar{x}, \xi; t)$ e $E^q(\bar{x}, \xi; t)$ per un quark di sapore q attraverso la relazione

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q &\doteq \frac{1}{2} \sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \lambda' | \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \gamma^+ \psi_q^c(\bar{z}/2) | p, \lambda \rangle \\ &= \frac{\bar{u}(p', \lambda') \gamma^+ u(p, \lambda)}{2\bar{p}^+} H^q(\bar{x}, \xi; t) + \frac{\bar{u}(p', \lambda') i\sigma^{+\alpha} \Delta_\alpha u(p, \lambda)}{2\bar{p}^+} E^q(\bar{x}, \xi; t)\end{aligned}\quad (3.18)$$

dove λ, λ' denotano le elicità del protone, e \bar{z} è una notazione abbreviata di $[0, z^-, \mathbf{0}_\perp]$. Per le diverse combinazioni dell’elicità del protone si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{++}^q &= \mathcal{H}_{--}^q = \sqrt{1 - \xi^2} H^q - \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} E^q, \\ \mathcal{H}_{-+}^q &= -(\mathcal{H}_{+-}^q)^* = \eta \frac{\sqrt{t_0 - t}}{2m} E^q,\end{aligned}\quad (3.19)$$

con t_0 definito nell’eq. (3.17) e

$$\eta = \frac{\Delta^1 + i\Delta^2}{|\Delta_\perp|}. \quad (3.20)$$

Un punto fondamentale per poter ricavare la formula “*overlap*” è l’osservazione che l’operatore bilocale di campo di quark nella definizione (3.18) possa essere riscritto come un operatore densità, in termini delle componenti LC “buone”, sfruttando l’idempotenza e l’hermeticità del proiettore \mathcal{P}_+ :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \gamma^+ \psi_q^c(\bar{z}/2) &= \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^0 \gamma^+ \psi_q^c(\bar{z}/2) = \\ \sqrt{2} \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}_+ \psi_q^c(\bar{z}/2) &= \sqrt{2} \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}_+^2 \psi_q^c(\bar{z}/2) = \\ \sqrt{2} \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}_+^\dagger \mathcal{P}_+ \psi_q^c(\bar{z}/2) &= \sqrt{2} [\mathcal{P}_+ \psi_q^c(-\bar{z}/2)]^\dagger [\mathcal{P}_+ \psi_q^c(\bar{z}/2)] \\ &= \sqrt{2} \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Inserendo l’espansione nello spazio di momento (2.22) del campo nella definizione di $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q$, per la trasformata di Fourier della (3.18) si ottiene l’espressione

$$\sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \gamma^+ \psi_q^c(\bar{z}/2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2} \int \frac{dk'^+ d^2\mathbf{k}'_\perp}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2\mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\
&\times \sum_{\mu, \mu'; c, c'} \delta_{cc'} \left\{ \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ - k'^+) b_q^\dagger(w') b_q(w) u_+^\dagger(k', \mu') u_+(k, \mu) \right. \\
&\quad + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ + k'^+) d_q(w') b_q(w) v_+^\dagger(k', \mu') u_+(k, \mu) \\
&\quad + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ + k^+ - k'^+) b_q^\dagger(w') d_q^\dagger(w) u_+^\dagger(k', \mu') v_+(k, \mu) \\
&\quad \left. + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ - k'^+) d_q(w') d_q^\dagger(w) v_+^\dagger(k', \mu') v_+(k, \mu) \right\}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

che permette l'interpretazione delle GPDs nel modello a partoni ([34], [36]). Quale dei quattro termini nella (3.22) contribuisca all'elemento di matrice è determinato dalle condizioni di positività $k^+ \geq 0$ e $k'^+ \geq 0$ per i momenti dei partoni, insieme alla conservazione del momento, che impone $k^+ - k'^+ = p^+ - p'^+ = 2\xi\bar{p}^+$. Qui di seguito si considera il caso $\xi > 0$, utile per l'applicazione delle GPDs nei processi hard; in questo modo il termine $b^\dagger(w')d^\dagger(w)$ nell'eq. (3.22), che descrive l'assorbimento di una coppia quark-antiquark, non contribuisce. Nella regione $\xi < \bar{x} < 1$ le GPDs descrivono l'emissione di un quark dal nucleone con una frazione di momento $\bar{x} + \xi$ e il suo riassorbimento con $\bar{x} - \xi$. Per quanto riguarda la regione $-1 < \bar{x} < -\xi$ si ha l'emissione di un antiquark con momento $-(\bar{x} + \xi)$ e il suo riassorbimento con momento $-(\bar{x} - \xi)$. Invece la terza regione $-\xi < \bar{x} < \xi$ rappresenta l'emissione di una coppia quark-antiquark (ved. Figura 3.1).

3.3.1 Regione $\xi < \bar{x} < 1$

La decomposizione alla Fock (3.3) degli stati conduce ad una rappresentazione dell'elemento di matrice $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q$ come somma su contributi di stati di Fock separati.

$$\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q = \sum_N \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)}, \tag{3.23}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_c \sum_{\beta, \beta'} \int \left[\frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}}} \right]_N [d^2\tilde{\mathbf{k}}_\perp]_N \left[\frac{d\hat{x}'}{\sqrt{\hat{x}'}} \right] [d^2\hat{\mathbf{k}}'_\perp]_N \Psi_{N, \beta'}^{*\lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N, \beta}^\lambda(\tilde{r}) \\
&\times \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle N, \beta'; k'_1, \dots, k'_N | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | N, \beta; k_1, \dots, k_N \rangle. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Ora è possibile esprimere gli stati ad N-partoni e l'operatore bilocale $\phi_q^{c\dagger} \phi_q^c$ in termini di operatori di creazione e distruzione attraverso le equazioni (3.5)

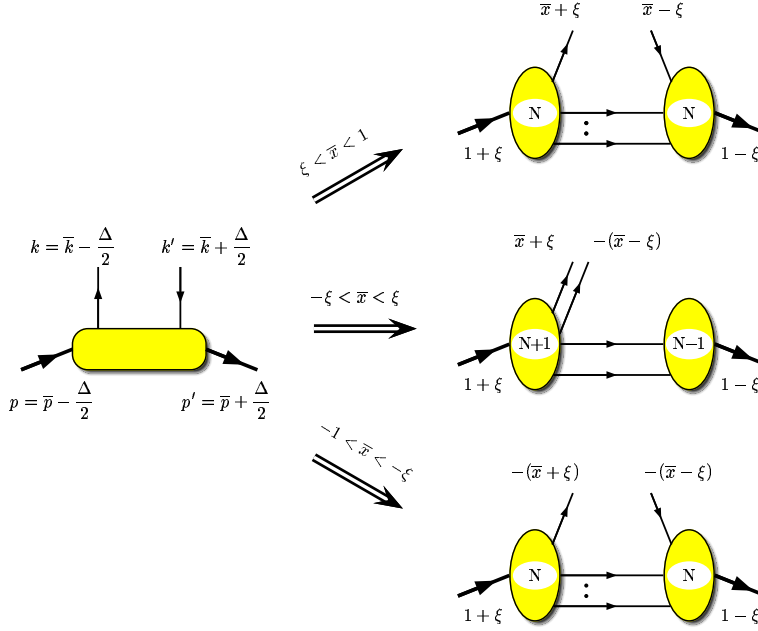


Figura 3.1: Rappresentazione overlap delle GPDs nelle differenti regioni cinematiche, nel caso $\xi > 0$.

e (3.22), e valutare poi l'elemento di matrice sul vuoto usando le regole di (anti)commutazione.

Quello che si ottiene è il prodotto di due anticommutatori contenenti gli operatori di creazione e di distruzione da $\phi_q^{c\dagger}\phi_q^c$, i quali possono essere riscritti come elemento di matrice degli operatori di campo per i quark attivi, e il prodotto di $N - 1$ (anti)commutatori per i partoni spettatori, esprimibile attraverso elementi di matrice ad un partone come nella (3.2). Dal momento poi, che i numeri quantici per i quark attivi e per i quark spettatori devono “match-arsi”, si ha che i labels β e β' degli stati di Fock devono essere uguali.

Per partoni identici nello stato di Fock gli anticommutatori diversi da zero generano un numero di termini corrispondente alle possibilità di associare i partoni nello stati finale e iniziale. Questi termini sono, comunque, tutti uguali a causa della (anti)simmetria delle funzioni d'onda per la permutazione dei momenti r_i per particelle identiche. Il numero di questi termini è esattamente uguale al fattore di normalizzazione $\sqrt{f_{N,\beta'}f_{N,\beta}}$; quindi si arriva ad avere un unico termine. L'elemento di matrice che compare nella (3.24) può essere riscritto come

$$\langle N, \beta'; k'_1, \dots, k'_N | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | N, \beta; k_1, \dots, k_N \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^N \langle s'_j; w'_j | \phi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | s_j; w_j \rangle \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \langle s'_i; w'_i | s_i; w_i \rangle. \quad (3.25)$$

Gli stati partonici sono caratterizzati dal loro momento e dalla loro elicità, w_i . I momenti dei partoni appartenenti all'adrone entrante e uscente vengono denotati con lettere non primate e primate rispettivamente. D'altro canto le LCWFs dipendono dalle coordinate relative di momento rispetto all'adrone parente, r_i e l'identificazione degli argomenti delle LCWFs risulta più agevole quando come sistemi di riferimento vengono presi i sistemi adronici. Per questo si adotta la convenzione di definire il sistema in cui l'adrone entrante/uscente ha momento trasverso nullo “hadron-in”/“hadron-out”. Nel proseguio della tesi le quantità nel sistema hadron-in verranno indicate con una tilde, mentre quelle nel sistema hadron-out con un cappuccio. Inoltre verrà usato il nome “average-frame” per un sistema in cui i momenti adronici siano parametrizzati secondo le equazioni (3.13). Per ottenere una formulazione simmetrica nelle quantità entranti ed uscenti è utile definire come variabili ausiliarie le medie dei momenti partonici entranti e uscenti nel sistema di riferimento medio

$$\bar{k}_i = \frac{1}{2}(k_i + k'_i), \quad \bar{x}_i = \frac{\bar{k}_i^+}{\bar{p}^+} \quad (3.26)$$

le quali soddisfano le condizioni

$$\sum_{i=1}^N \bar{x}_i = \frac{1}{\bar{p}^+} \sum_{i=1}^N \bar{k}_i^+ = 1, \quad \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} = \bar{\mathbf{p}}_{\perp} = \mathbf{0}_{\perp}. \quad (3.27)$$

I partoni emessi e poi riassorbiti dall'adrone sono detti “attivi” e indicati con j ; tutti gli altri partoni $i \neq j$ giocano il ruolo di “spettatori”. I partoni attivi portano una frazione $\bar{x}_j + \xi$ del momento medio \bar{p}^+ quando escono dal protone, e una frazione $\bar{x}_j - \xi$ quando rientrano. Il momento trasverso del partone attivo è $\mathbf{k}_{\perp j} = \bar{\mathbf{k}}_{\perp j} - \mathbf{\Delta}_{\perp}/2$ prima, e $\mathbf{k}'_{\perp j} = \bar{\mathbf{k}}_{\perp j} + \mathbf{\Delta}_{\perp}/2$ dopo il processo di scattering partonico.

Gli argomenti della LCWF per l'adrone entrante sono ottenuti attraverso un boost trasverso definito in eq.(2.14) con parametri $b^+ = (1 + \xi)\bar{p}^+$ e $\mathbf{b}_{\perp} = -\mathbf{\Delta}_{\perp}/2$, che porta dall'average-frame al hadron-in frame. Analogamente, un boost trasverso con parametri $b^+ = (1 - \xi)\bar{p}^+$ e $\mathbf{b}_{\perp} = +\mathbf{\Delta}_{\perp}/2$ permette di passare dal sistema di riferimento medio al sistema hadron-out. Dalla conservazione del momento e dalla condizione di spettatore

$$k'_i = \bar{k}_i = k_i, \quad \text{per } i \neq j, \quad (3.28)$$

si ottiene che gli argomenti della LCWF per l'adrone entrante (i.e., i momenti dei partoni appartenenti all'adrone entrante nel sistema hadron-in) sono legati ai momenti nell'average-frame dalle relazioni

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= \frac{\bar{x}_i}{1+\xi}, & \tilde{\mathbf{k}}_{\perp i} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} + \frac{\bar{x}_i}{1+\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, & \text{per } i \neq j, \\ \tilde{x}_j &= \frac{\bar{x}_j + \xi}{1+\xi}, & \tilde{\mathbf{k}}_{\perp j} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp j} - \frac{1-\bar{x}_j}{1+\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Allo stesso modo gli argomenti della LCWF per l'adrone uscente (i.e., i momenti dei partoni appartenenti all'adrone uscente nel sistema hadron-out) sono legati ai momenti nell'average-frame dalle relazioni

$$\begin{aligned}\hat{x}'_i &= \frac{\bar{x}_i}{1-\xi}, & \hat{\mathbf{k}}'_{\perp i} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} + \frac{\bar{x}_i}{1-\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, & \text{per } i \neq j, \\ \hat{x}'_j &= \frac{\bar{x}_j - \xi}{1-\xi}, & \hat{\mathbf{k}}'_{\perp j} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp j} - \frac{1-\bar{x}_j}{1-\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Utilizzando le relazioni precedenti è possibile esprimere la normalizzazione degli stati partonici (3.2) attraverso gli argomenti della LCWF

$$\begin{aligned}\langle s'_i; w'_i | s_i; w_i \rangle &= 16\pi^3 \hat{x}'_i \delta\left(\hat{x}'_i - \tilde{x}_i \frac{1+\xi}{1-\xi}\right) \\ &\quad \times \delta^{(2)}\left(\hat{\mathbf{k}}'_{\perp i} - \tilde{\mathbf{k}}_{\perp i} + \frac{\tilde{x}_i}{1-\xi} \Delta_{\perp}\right) \delta_{s'_i s_i} \delta_{\mu'_i \mu_i} \delta_{c'_i c_i},\end{aligned}\quad (3.31)$$

dove si sono usate le relazioni in eq. (3.29) e (3.30) per esprimere le variabili w_i e w'_i in termini delle quantità del sistema adronico e cioè in termini delle variabili di integrazione [ved. eq.(3.24)]. A questo punto combinando l'espansione (3.22) per l'operatore densità, cui contribuisce solo il termine $b^\dagger(w')b(w)$, e la definizione di stato di quark singolo (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle s'_j; w'_j | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | s_j; w_j \rangle \\ = \frac{1}{\bar{p}^+} \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) u_+^\dagger(k'_j, \mu'_j) u_+(k_j, \mu_j) \delta_{s_j q} \delta_{s'_j s_j} \delta_{c'_j c_j}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

A questo risultato si perviene in modo agevole, basta infatti utilizzare le regole di anticommutazione (2.24) e usare la relazione (3.26) per riscrivere l'argomento della delta che compare nel risultato.

$$\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)} = \frac{1}{\bar{p}^+ \sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right)^{1-N} \sum_{\beta, \beta'} \sum_{j=1}^N \int [d\tilde{x}]_N [d^2 \tilde{\mathbf{k}}_{\perp}]_N d\hat{x}'_j d^2 \hat{\mathbf{k}}'_{\perp j}$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta \left(\hat{x}'_j - 1 + \sum_{i \neq j} \hat{x}'_i \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \delta^{(2)} \left(\hat{\mathbf{k}}'_{\perp j} + \sum_{i \neq j} \left(\tilde{\mathbf{k}}_{\perp i} - \tilde{x}_i \frac{1+\xi}{1-\xi} \boldsymbol{\Delta}_{\perp} \right) \right) \\
& \times \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) u_+^\dagger(k'_j, \mu'_j) u_+(k_j, \mu_j) \delta_{s_j q} \delta_{s'_j s_j} \delta_{c'_j c_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \delta_{s'_i s_i} \delta_{c'_i c_i} \delta_{\mu'_i \mu_i} \\
& \times \frac{\Psi_{N, \beta'}^{* \lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N, \beta}^\lambda(\tilde{r})}{\sqrt{\hat{x}'_j \tilde{x}_j}}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Il prodotto degli spinori risulta

$$\begin{aligned}
u_+^\dagger(k'_j, \mu'_j) u_+(k_j, \mu_j) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}(k'_j, \mu'_j = 1/2) \gamma^+ u(k_j, \mu_j = 1/2) \\
&= \sqrt{2(1-\xi^2)} \hat{x}'_j \tilde{x}_j \bar{p}^+ \delta_{\mu'_j \mu_j}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

La delta di Kronecker per le elicit  nella equazione precedente avrebbe potuto essere anticipata dalla struttura di Dirac dell'operatore $\bar{\psi}_q^c \gamma^+ \psi_q^c$ nella (3.22). Definendo le proiezioni dei campi right- e left-handed, $\phi_{q, R/L}^c \equiv \mathcal{P}_{R/L} \mathcal{P}_+ \psi_q^c$, con $\mathcal{P}_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ e usando $\mathcal{P}_\pm \gamma_5 = \gamma_5 \mathcal{P}_\pm$   facile vedere che

$$\bar{\psi}_q^c \gamma^+ \psi_q^c = \sqrt{2} \phi_q^{c\dagger} (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) \phi_q^c = \sqrt{2} (\phi_{qR}^{c\dagger} \phi_{qR}^c + \phi_{qL}^{c\dagger} \phi_{qL}^c). \tag{3.35}$$

Dal momento che per quark non massivi la chiralit  e l'elicit  sono identiche, le elicit  su entrambe le linee di quark devono essere le stesse.

Per presentare i risultati in modo simmetrico le misure d'integrazione vanno riscritte in termini delle quantit  medie con l'ausilio della (3.30)

$$[d\tilde{x}]_N = \left(\frac{1}{1+\xi} \right)^{N-1} [d\bar{x}]_N, \quad [d\tilde{\mathbf{k}}_\perp]_N = [d\bar{\mathbf{k}}_\perp]_N. \tag{3.36}$$

Arrivando cos  alla rappresentazione overlap della GPD di quark nella regione $\xi < \bar{x} < 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\lambda' \lambda}^{q(N \rightarrow N)} &= \left(\sqrt{1-\xi} \right)^{2-N} \left(\sqrt{1+\xi} \right)^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \delta_{s_j q} \\
&\times \int [d\bar{x}]_N [d^2 \bar{k}_\perp]_N \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \Psi_{N, \beta'}^{* \lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N, \beta}^\lambda(\tilde{r})
\end{aligned} \tag{3.37}$$

con gli argomenti $\tilde{r}(\hat{r}')$ della LCWF per il protone entrante (uscente) legati alle variabili d'integrazione \bar{x}_i e $\bar{\mathbf{k}}_{\perp i}$ tramite le relazioni (3.29) e (3.30), rispettivamente. Per ottenere l'espressione totale $\mathcal{H}_{\lambda' \lambda}^q$ basta sommare su tutte le configurazioni partoniche di N (ved. (3.23)) l'espressione appena ricavata.

3.3.2 Regione $-1 < \bar{x} < -\xi$

Per gli *antiquark* “attivi” la derivazione della rappresentazione overlap delle GPDs procede in totale analogia al caso precedente. Le differenze compaiono quando si utilizza la decomposizione di Fourier (3.22) per ottenere l’analogia della formula (3.32), dal momento che in questa nuova regione il termine che contribuisce è $d(w')d^\dagger(w)$. Lo scambio dell’operatore di creazione e distruzione comporta la presenza di un segno meno a fattore, e la funzione δ nell’analogia di eq. (3.32) ora fornisce il vincolo $\bar{x}_j = -\bar{x}$. Quindi il risultato finale per la regione $-1 < \bar{x} < -\xi$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)} &= - \left(\sqrt{1-\xi} \right)^{2-N} \left(\sqrt{1+\xi} \right)^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \delta_{\bar{s}_j q} \\ &\quad \times \int [d\bar{x}]_N [d^2 \bar{k}_\perp]_N \delta(\bar{x} + \bar{x}_j) \Psi_{N,\beta'}^{*\lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N,\beta}^\lambda(\tilde{r}), \end{aligned} \quad (3.38)$$

con gli argomenti della LCWF \tilde{r} e \hat{r}' dati da (3.29) e (3.30), rispettivamente.

3.3.3 Regione $-\xi < \bar{x} < \xi$

Consideriamo ora il range cinematico $-\xi < \bar{x} < \xi$. Sapendo che $\xi > 0$, le GPDs di quark in questa regione descrivono l’emissione di una coppia quark-antiquark da parte del protone entrante. Quindi nella decomposizione dello stato di Fock dei protoni iniziale e finale occorre considerare solo termini dove lo stato iniziale ha lo stesso contenuto partonico dello stato finale con l’aggiunta di una coppia quark-antiquark. Perciò si ha

$$\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q = \sum_N \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N+1 \rightarrow N-1)}. \quad (3.39)$$

Partendo dalla definizione (3.18) delle GPDs per quark di sapore q e sostituendo lo stato adronico con la sua decomposizione dello stato di Fock (3.3), il contributo della transizione $N + 1 \rightarrow N - 1$ all’elemento di matrice $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N+1 \rightarrow N-1)} &= \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_c \sum_{\beta, \beta'} \int \left[\frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}}} \right]_{N+1} [d^2 \tilde{\mathbf{k}}_\perp]_{N+1} \left[\frac{d\hat{x}'}{\sqrt{\hat{x}'}} \right]_{N-1} [d^2 \hat{\mathbf{k}}'_\perp]_{N-1} \\ &\quad \times \Psi_{N-1, \beta'}^{*\lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N+1, \beta}^\lambda(\tilde{r}) \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \\ &\quad \times \langle N-1, \beta'; k'_1, \dots, k'_{N-1} | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | N+1, \beta; k_1, \dots, k_{N+1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sfruttando nuovamente le relazioni di (anti)commutazione per gli operatori di creazione e distruzione, l'elemento di matrice partonico può essere riscritto come

$$\begin{aligned} & \langle N-1, \beta'; k'_1, \dots, k'_{N-1} | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | N+1, \beta; k_1, \dots, k_{N+1} \rangle \\ &= \sum_{j,j'=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{n_j n'_j}} \langle 0 | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | s_j, w_j; s'_j, w'_j \rangle \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \langle s'_i; w'_i | s_i; w_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.41)$$

dove si sono indicizzate le coppie quark-antiquark con j per il quark e con j' per l'antiquark, e si è indicato con $|s_j, w_j; s'_j, w'_j\rangle = b_{s_j}^\dagger(w_j) d_{s'_j}^\dagger(w'_j) |0\rangle$ il corrispondente stato a due partoni. n_j (n'_j) è il numero di (anti)quark nella funzione d'onda del protone iniziale $\Psi_{N+1,\beta}^\lambda(r)$ con gli stessi numeri quantici discreti del (anti)quark "attivo". Questo fattore compare perché il prodotto $\sqrt{f_{N+1,\beta} f_{N-1,\beta'}}$ dei fattori di normalizzazione degli stati partonici (3.5) non è uguale al numero di possibilità di associare i partoni nello stato iniziale e nello stato finale di protone, in contrasto con la situazione che si aveva per le altre regioni.

Al fine di semplificare la notazione si utilizza la stessa numerazione per i partoni spettatori nelle LCWFs dello stato di protone iniziale e finale. quindi gli $N-1$ partoni nel protone uscente non saranno numerati con $i=1, \dots, N-1$, ma con $i=1, \dots, N+1$ con j e j' omissi. Partendo dai momenti dei partoni spettatori k_i e k'_i ($i \neq j, j'$) vengono nuovamente introdotte le variabili ausiliarie definite dall'eq. (3.26). Per j e j' si ha

$$\bar{k}_j = \frac{1}{2}(k_j - k'_j), \quad \bar{x}_j = \frac{\bar{k}_j^+}{\bar{p}^+}. \quad (3.42)$$

Dalla conservazione del momento e dalla condizione di spettatore

$$k'_i = \bar{k}_i = k_i, \quad \text{per } i \neq j, j' \quad (3.43)$$

si ottiene che gli argomenti della LCWF per l'adrone entrante sono legate al momento del partone nel sistema di riferimento medio attraverso le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \frac{\bar{x}_i}{1+\xi}, & \tilde{\mathbf{k}}_{\perp i} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} + \frac{\bar{x}_i}{1+\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, & \text{per } i \neq j, j', \\ \tilde{x}_j &= \frac{\bar{x}_j + \xi}{1+\xi}, & \tilde{\mathbf{k}}_{\perp j} &= \bar{\mathbf{k}}_{\perp j} - \frac{1-\bar{x}_j}{1+\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, \\ \tilde{x}'_j &= -\frac{\bar{x}_j - \xi}{1+\xi}, & \tilde{\mathbf{k}}_{\perp j'} &= -\bar{\mathbf{k}}_{\perp j} - \frac{1+\bar{x}_j}{1+\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

e che gli argomenti delle LCWF per l'adrone uscente sono dati da

$$\hat{x}'_i = \frac{\bar{x}_i}{1-\xi}, \quad \hat{\mathbf{k}}'_{\perp i} = \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} - \frac{\bar{x}_i}{1-\xi} \frac{\Delta_{\perp}}{2}, \quad \text{per } i \neq j, j'. \quad (3.45)$$

Le formule (3.44) e (3.45) possono essere usate per scrivere $\langle s'; w' | s; w \rangle$ come nella (3.31), e per valutare l'elemento di matrice della coppia quark-antiquark si sfrutta l'espansione di Fourier (3.22), tenendo conto del fatto che in questa regione l'unico termine a contribuire è $d(w')b(w)$. Dopodiché applicando la definizione dello stato a due partoni introdotta nella (3.41), e le usuali regole di anticommutazione (2.24), la trasformata di Fourier dell'elemento di matrice nella (3.40) diviene

$$\begin{aligned} & \sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+z^-} \langle 0 | \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \phi_q^c(\bar{z}/2) | s_j, w_j; s_{j'}, w_{j'} \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{p}^+} \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) v_+^\dagger(k_{j'}, \mu_{j'}) u_+(k_j, \mu_j) \delta_{\bar{s}_{j'} s_j} \delta_{s_j q} \delta_{c_{j'} c_j}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Si arriva quindi all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N+1 \rightarrow N-1)} &= \frac{1-\xi}{\bar{p}^+ \sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \right)^N \sum_{\beta, \beta'} \sum_{j'=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{n_j n_{j'}}} \int [d\tilde{x}]_{N+1} [d^2 \tilde{\mathbf{k}}_{\perp}]_{N+1} \\ &\times 16\pi^3 \delta \left(1 - \frac{1+\xi}{1-\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \tilde{x}_i \right) \delta^{(2)} \left(\frac{\Delta_{\perp}}{1+\xi} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \tilde{\mathbf{k}}_{\perp i} \right) \\ &\times \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) v_+^\dagger(k_{j'}, \mu_{j'}) u_+(k_j, \mu_j) \delta_{\bar{s}_{j'} s_j} \delta_{s_j q} \delta_{c_{j'} c_j} \\ &\times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \delta_{s'_i s_i} \delta_{c'_i c_i} \delta_{\mu'_i \mu_i} \frac{\Psi_{N-1, \beta'}^{* \lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N+1, \beta}^{\lambda}(\tilde{r})}{\sqrt{\tilde{x}_j \tilde{x}_{j'}}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Il prodotto di spinori in questo caso risulta

$$\begin{aligned} v_+^\dagger(k_{j'}, \mu_{j'}) u_+(k_j, \mu_j) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}(k_{j'}, \mu_{j'} = 1/2) \gamma^+ u(k_j, \mu_j = 1/2) \\ &= \sqrt{2\tilde{x}_j \tilde{x}_{j'}} (1+\xi) \bar{p}^+ \delta_{\mu_{j'} - \mu_j}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le integrazioni su $\tilde{x}_{j'}$ e $\tilde{\mathbf{k}}_{\perp j'}$ possono essere eseguite, e riscrivendo le restanti integrazioni in termini delle variabili ausiliarie si arriva alla rappresentazione a overlap di $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^q$ nella regione $-\xi < \bar{x} < \xi$ per la transizione $N+1 \rightarrow N-1$:

$$\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N+1 \rightarrow N-1)} = \left(\sqrt{1-\xi} \right)^{3-N} \left(\sqrt{1+\xi} \right)^{1-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_{j,j'=1}^{N+1} \frac{\delta_{\bar{s}_{j'} s_j} \delta_{s_j q}}{\sqrt{n_j n_{j'}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta_{c_j, c_j} \delta_{\mu j' - \mu_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \delta_{s'_i s_i} \delta_{c'_i c_i} \delta_{\mu'_i \mu_i} \int d\bar{x}_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} d\bar{x}_i \delta \left(1 - \xi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \bar{x}_i \right) \\
& \times \int d^2 \bar{k}_{\perp j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} d^2 \bar{k}_{\perp i} (16\pi^3)^{1-N} \delta^{(2)} \left(\frac{\Delta_{\perp}}{2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j'}}^{N+1} \bar{\mathbf{k}}_{\perp i} \right) \\
& \times \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \Psi_{N, \beta'}^{* \lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N, \beta}^{\lambda}(\tilde{r})
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Gli argomenti \tilde{r} e \hat{r}' delle funzioni d'onda sono dati in termini di \bar{x}_i e $\bar{\mathbf{k}}_{\perp i}$ dalla (3.44) e (3.45), e n_j , $n_{j'}$ sono definiti dopo l'eq. (3.40). Come aspettato, l'operatore $\sum_c \bar{\psi}_q^c \gamma^+ \psi_q^c$ nella (3.22) “proietta” coppie $q\bar{q}$ singoletto di colore con elicità totale zero nella LCWF iniziale di protone.

3.4 GPD di quark longitudinalmente polarizzata

In questo paragrafo viene derivata l'espressione delle distribuzioni generalizzate di quark, $\tilde{H}^q(\bar{x}, \xi; t)$ e $\tilde{E}^q(\bar{x}, \xi; t)$, definite dalla trasformata di Fourier dell'elemento di matrice

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda' \lambda}^q & \doteq \frac{1}{2} \sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \lambda' | \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \gamma^+ \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) | p, \lambda \rangle \\
& = \frac{\bar{u}(p', \lambda') \gamma^+ \gamma_5 u(p, \lambda)}{2\bar{p}^+} \tilde{H}^q(\bar{x}, \xi; t) + \frac{\bar{u}(p', \lambda') \Delta^+ \gamma_5 u(p, \lambda)}{4M\bar{p}^+} \tilde{E}^q(\bar{x}, \xi; t).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Per le differenti combinazioni d'elicità di protone si trova

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{++}^q & = -\tilde{\mathcal{H}}_{--}^q = \sqrt{1 - \xi^2} \tilde{H}^q - \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} \tilde{E}^q, \\
\tilde{\mathcal{H}}_{-+}^q & = (\tilde{\mathcal{H}}_{+-}^q)^* = \eta \xi \frac{\sqrt{t_0 - t}}{2m} \tilde{E}^q.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

La derivazione della rappresentazione a overlap procede in modo del tutto analogo al caso delle GPDs di quark non polarizzate. Occorre solamente trovare l'appropriata conversione da operatore di campo di quark a densità di campi LC. Esprimendo l'operatore bilocale all'interno in termini delle proiezioni left- e right-handed si ottiene

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \gamma^+ \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) & = \psi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^0 \gamma^+ \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) = \\
\sqrt{2} \psi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}_+ \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) & = \sqrt{2} \psi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}_+^2 \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\psi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2)\mathcal{P}_+^{\dagger}\mathcal{P}_+\gamma_5\psi_q^c(\bar{z}/2) &= \sqrt{2}[\mathcal{P}_+\psi_q^c(-\bar{z}/2)]^{\dagger}\gamma_5[\mathcal{P}_+\psi_q^c(\bar{z}/2)] = \\
\sqrt{2}\phi_q^{\dagger}(-\bar{z}/2)\gamma_5\phi_q^c(\bar{z}/2) &= \sqrt{2}\left(\phi_{qR}^{\dagger}(-\bar{z}/2)\phi_{qR}^c(\bar{z}/2) - \phi_{qL}^{\dagger}(-\bar{z}/2)\phi_{qL}^c(\bar{z}/2)\right)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

e la nuova espressione per la trasformata di Fourier del caso longitudinalmente polarizzato, in analogia alla (3.22), diventa

$$\begin{aligned}
&\sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2)\gamma^+\gamma_5\psi_q^c(\bar{z}/2) \\
&= 2\sqrt{2} \int \frac{dk'^+ d^2\mathbf{k}'_{\perp}}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2\mathbf{k}_{\perp}}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\
&\quad \times \sum_{\mu, \mu'; c, c'} \delta_{cc'} \left\{ \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ - k'^+) b_q^{\dagger}(w') b_q(w) u_+^{\dagger}(k', \mu') \gamma_5 u_+(k, \mu) \right. \\
&\quad + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ + k'^+) d_q(w') b_q(w) v_+^{\dagger}(k', \mu') \gamma_5 u_+(k, \mu) \\
&\quad + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ + k^+ - k'^+) b_q^{\dagger}(w') d_q^{\dagger}(w) u_+^{\dagger}(k', \mu') \gamma_5 v_+(k, \mu) \\
&\quad \left. + \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ - k'^+) d_q(w') d_q^{\dagger}(w) v_+^{\dagger}(k', \mu') \gamma_5 v_+(k, \mu) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ripetendo ora tutti i passi percorsi nel calcolo della (3.37) si trova la rappresentazione overlap del contributo dello stato di Fock a N particelle alla GPD di quark polarizzato longitudinalmente di sapore q nella regione $\xi < \bar{x} < 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)} &= \left(\sqrt{2-\xi}\right)^{2-N} \left(\sqrt{1+\xi}\right)^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \text{sign}(\mu_j) \delta_{s_j q} \\
&\quad \times \int [d\bar{x}]_N [d^2\bar{k}_{\perp}]_N \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \Psi_{N,\beta'}^{*\lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N,\beta}^{\lambda}(\tilde{r})
\end{aligned} \tag{3.54}$$

dove gli argomenti delle LCWFs sono dati dalle relazioni (3.29) e (3.30). L'unica differenza tra l'eq. (3.54) e l'eq. (3.37) è la funzione *segno* dell'elicità del quark attivo.

Per quanto riguarda la regione $-1 < \bar{x} < -\xi$ si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda'\lambda}^{q(N \rightarrow N)} &= (\sqrt{1-\xi})^{2-N} (\sqrt{1+\xi})^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \text{sign}(\mu_j) \delta_{\bar{s}_j q} \\
&\quad \times \int [d\bar{x}]_N [d^2\bar{k}_{\perp}]_N \delta(\bar{x} + \bar{x}_j) \Psi_{N,\beta'}^{*\lambda'}(\hat{r}') \Psi_{N,\beta}^{\lambda}(\tilde{r}).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

In contrasto con il caso non polarizzato, qui non si ha il segno meno a fattore, questo infatti viene “mangiato” dalla funzione $\text{sign}(\mu_j)$ che si riferisce all'elicità dell'antiquark. Nella regione centrale l'overlap non-diagonale $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}^{q(N+1 \rightarrow N-1)}$ risulta identico a quello di equazione (3.49) eccetto per il fattore $\text{sign}(\mu_j)$, che compare anche in questa regione.

Capitolo 4

TRASVERSITÀ NEL MODELLO A QUARK COSTITUENTI

4.1 GPDs trasversalmente polarizzate

Il caso delle GPDs di quark trasversalmente polarizzate ([35], [29]) risulta differente da quello delle GPDs longitudinalmente polarizzate [33] a causa del diverso “proiettore” all’interno della loro definizione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \lambda' | \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \sigma^{+i} \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) | p, \lambda \rangle |_{z^+=0, \mathbf{z}_\perp=0} \\ = \frac{1}{2\bar{p}^+} \bar{u}(p', \lambda') \left[H_T^q \sigma^{+i} \gamma_5 + \tilde{H}_T^q \frac{\epsilon^{+i\alpha\beta} \Delta_\alpha \bar{p}_\beta}{M^2} + E_T^q \frac{\epsilon^{+i\alpha\beta} \Delta_\alpha \gamma_\beta}{2M} \right. \\ \left. + \tilde{E}_T^q \frac{\epsilon^{+i\alpha\beta} \bar{p}_\alpha \gamma_\beta}{M} \right] u(p, \lambda), \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove $i = 1, 2$ è un indice trasverso.

L’operatore bilocale $\bar{\psi} i \sigma^{i+} \gamma_5 \psi$ può essere riscritto in termini delle matrici γ in modo tale da rendere più agevole il calcolo della trasformata di Fourier della definizione (4.1)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) i \sigma^{i+} \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) &= \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^0 i \sigma^{i+} \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) \\ &= \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^0 i \frac{\gamma^i + \gamma^+}{2} \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) = \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^0 \gamma^+ \gamma^i \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) \\ &= \sqrt{2} \psi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \mathcal{P}^+ \gamma^i \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) = \sqrt{2} [\mathcal{P}_+ \psi_q^c(-\bar{z}/2)]^\dagger \gamma^i \gamma_5 [\mathcal{P}_+ \psi_q^c(\bar{z}/2)] \\ &= \sqrt{2} \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^i \gamma_5 \phi_q^c(\bar{z}/2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dall'articolo di Diehl [35] è noto che la definizione (4.1) possa essere riscritta in termini di combinazioni lineari di determinati elementi di matrice

$$\mathbf{A}_{\lambda'\mu',\lambda\mu} = \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}z^-} \langle p', \lambda' | \mathcal{O}_{\mu',\mu}(z) | p, \lambda \rangle |_{z^+=0, \mathbf{z}_\perp=0}, \quad (4.3)$$

per certe elicità partoniche μ e μ' , dove il simbolo $\mathcal{O}_{\mu,\mu'}$ indica gli operatori

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{-,+} &= -i/4\bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2)\sigma^{+1}(1+\gamma_5)\psi_q^c(\bar{z}/2), \\ \mathcal{O}_{+,-} &= i/4\bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2)\sigma^{+1}(1-\gamma_5)\psi_q^c(\bar{z}/2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Calcoli espliciti, svolti lavorando nel sistema di riferimento in cui \vec{p} e \vec{p}' giacciono nel piano x - z , forniscono le espressioni degli elementi di matrice $\mathbf{A}_{\lambda'\mu',\lambda\mu}$ in termini delle GPDs con “flip” dell’elicità:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{++,+-} &= \epsilon \frac{\sqrt{t_0-t}}{2M} \left(\bar{H}_T^q + (1-\xi) \frac{E_T^q + \tilde{E}_T^q}{2} \right), \\ \mathbf{A}_{-+,-} &= \epsilon \frac{\sqrt{t_0-t}}{2M} \left(\bar{H}_T^q + (1+\xi) \frac{E_T^q - \tilde{E}_T^q}{2} \right), \\ \mathbf{A}_{++,-} &= \sqrt{1-\xi^2} \left(H_T^q + \frac{t_0-t}{4M^2} \tilde{H}_T^q - \frac{\xi^2}{1-\xi^2} E_T^q + \frac{\xi}{1-\xi^2} \tilde{E}_T^q \right), \\ \mathbf{A}_{-+,+} &= -\sqrt{1-\xi^2} \frac{t_0-t}{4M^2} \tilde{H}_T^q, \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove con t_0 si è indicato il valore minimo di t a fissato ξ (ved. eq. (3.17) e (3.16)) e con ϵ il $\text{sign}(D^1)$, con D^1 componente x di

$$D^\alpha = P^+ \Delta^\alpha - \Delta^+ P^\alpha. \quad (4.6)$$

Invertendo le equazioni (4.5) è possibile ottenere quattro relazioni che legano le quattro GPDs trasversalmente polarizzate alle combinazioni di elementi di matrice $\mathbf{A}_{\lambda'\mu',\lambda\mu}$:

$$\begin{aligned} E_T^q &= \frac{2M}{\epsilon\sqrt{t_0-t}} \left(\frac{1}{(1-\xi)} \mathbf{A}_{++,+-} + \frac{1}{(1+\xi)} \mathbf{A}_{-+,-} \right) \\ &\quad + \frac{8M^2}{(t_0-t)(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} \mathbf{A}_{-+,+}, \\ \tilde{E}_T^q &= \frac{2M}{\epsilon\sqrt{t_0-t}} \left(\frac{1}{(1-\xi)} \mathbf{A}_{++,+-} - \frac{1}{(1+\xi)} \mathbf{A}_{-+,-} \right) \\ &\quad + \frac{8M^2\xi}{(t_0-t)(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} \mathbf{A}_{-+,+}, \\ H_T^q &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\mathbf{A}_{++,-} + \mathbf{A}_{-+,+} \right) + \frac{2M\xi}{\epsilon\sqrt{t_0-t}(1-\xi^2)} \left(\mathbf{A}_{-+,-} - \mathbf{A}_{++,+} \right), \\ \tilde{H}_T^q &= \frac{-4M^2}{\sqrt{1-\xi^2}(t_0-t)} \left(\mathbf{A}_{-+,+} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dall'invarianza per parità si ha la seguente relazione per gli elementi di matrice

$$\mathbf{A}_{-\lambda' - \mu', -\lambda - \mu} = (-1)^{\lambda' - \mu' - \lambda + \mu} \mathbf{A}_{\lambda' \mu', \lambda \mu}, \quad (4.8)$$

sfruttando la quale è possibile scrivere

$$\mathbf{A}_{++,-} + \mathbf{A}_{-+,-} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_{++,-} + \mathbf{A}_{-+,-} + \mathbf{A}_{--,++} + \mathbf{A}_{+-,-}]. \quad (4.9)$$

Utilizzando le definizioni (4.3, 4.4) per esplicitare il calcolo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{++,-} + \mathbf{A}_{-+,-} &= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | \mathcal{O}_{+,-} | p, - \rangle + \langle p', - | \mathcal{O}_{+,-} | p, + \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle p', - | \mathcal{O}_{-+} | p, + \rangle + \langle p', + | \mathcal{O}_{-+} | p, - \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-+}] | p, - \rangle + \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-+}] | p, + \rangle \right] \\ &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | -\frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \gamma_5 \psi | p, - \rangle + \langle p', - | -\frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \gamma_5 \psi | p, + \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Da cui, sapendo che

$$\bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) i \sigma^{+1} \gamma_5 \psi_q^c(\bar{z}/2) = \sqrt{2} \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \gamma^1 \gamma_5 \phi_q^c(\bar{z}/2), \quad (4.11)$$

si ha

$$\frac{i}{4} \bar{\psi}_q^c \sigma^{+1} \gamma_5 \psi_q^c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \phi_q^{c\dagger} \gamma^1 \gamma_5 \phi_q^c. \quad (4.12)$$

A questo punto sostituendo le definizioni degli operatori di campo di quark si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \bar{\psi}_q^c(-\bar{z}/2) \left(-\frac{i}{4} \sigma^{+1} \gamma_5\right) \psi_q^c(\bar{z}/2) \\ &= \sum_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \phi_q^{c\dagger}(-\bar{z}/2) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^1 \gamma_5\right) \phi_q^c(\bar{z}/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dk'^+ d^2 \mathbf{k}'_\perp}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\ &\quad \times \sum_{\mu, \mu'; c, c'} \delta_{cc'} \left\{ \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k^+ - k'^+) b_q^\dagger(w') b_q(w) u_+^\dagger(k', \mu') \gamma^1 \gamma_5 u_+(k, \mu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Quindi gli elementi di matrice che compaiono in eq.(4.10) assumono la seguente

espressione

$$\begin{aligned} & \langle p', \lambda' | \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dk'^+ d^2 \mathbf{k}'_\perp}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \sum_{\mu, \mu'} \sum_{c, c'} \delta_{cc'} \\ & \times \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k_j^+ - k_{j'}^+) b_{s\mu'c}^\dagger(k') b_{s\mu c}(k) u_+^\dagger(k', \mu') \gamma^1 \gamma_5 u_+(k, \mu) |p, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Per esplicitare i prodotti degli spinori si procede riscrivendo le definizioni di $u_+(k, \pm 1/2)$ [37] in termini dei vettori di spin χ_\pm e poi, dopo aver svolto i prodotti, traducendo i risultati in termini delle *matrici* γ che compaiono nella definizione degli operatori \mathcal{O} [ved. eq.(4.4), pag. 63]:

$$u_+(k, 1/2) \doteq \sqrt{k^+/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{k^+/\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.15)$$

$$u_+(k, -1/2) \doteq \sqrt{k^+/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{k^+/\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.16)$$

con

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} u_+^\dagger(k', +1/2) \gamma^1 u_+(k, -1/2) &= -\sqrt{2k'^+ k^+} [\chi_{1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{-1/2}], \\ u_+^\dagger(k', -1/2) \gamma^1 u_+(k, +1/2) &= \sqrt{2k'^+ k^+} [\chi_{-1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{1/2}], \\ u_+^\dagger(k', +1/2) \gamma^1 \gamma_5 u_+(k, -1/2) &= \sqrt{2k'^+ k^+} [\chi_{1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{-1/2}], \\ u_+^\dagger(k', -1/2) \gamma^1 \gamma_5 u_+(k, +1/2) &= \sqrt{2k'^+ k^+} [\chi_{-1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{1/2}]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Quindi prendendo in considerazione la combinazione operatoriale di eq.(4.10) si trova

$$\begin{aligned} u_+^\dagger(k', \mu' = +1/2) [\gamma^1 \gamma_5] u_+(k, \mu = -1/2) &= \sqrt{2k'^+ k^+} \chi_{\mu'=1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=-1/2}, \\ u_+^\dagger(k', \mu' = -1/2) [\gamma^1 \gamma_5] u_+(k, \mu = +1/2) &= \sqrt{2k'^+ k^+} \chi_{\mu'=-1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=1/2}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove $\chi_{\mu'=1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=-1/2} = \chi_{\mu'=-1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=1/2} = 1$.

Ora sostituendo questo risultato nell'equazione (4.14), quest'ultima diviene

$$\begin{aligned} \langle p', \lambda' | \int \frac{dk'^+ d^2 \mathbf{k}'_\perp}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \sum_{c,c'} \delta_{cc'} \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k_j^+ - k_j'^+) \\ \times \sqrt{k'^+ k^+} \left\{ b_{s\mu'=1/2c}^\dagger(k') b_{s\mu=-1/2c}(k) + b_{s\mu'=-1/2c}^\dagger(k') b_{s\mu=1/2c}(k) \right\} |p, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Il passo successivo consiste nell'effettuare una trasformazione di base per gli operatori di creazione e distruzione “ b^\dagger ” e “ b ”

$$\begin{aligned} b_{s1/2c}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{s\uparrow c}(k) + a_{s\downarrow c}(k)], \\ b_{s-1/2c}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{s\uparrow c}(k) - a_{s\downarrow c}(k)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Quindi

$$\begin{aligned} b_{s1/2c}^\dagger(k') b_{s-1/2c}(k) + b_{s-1/2c}^\dagger(k') b_{s1/2c}(k) &= a_{s\uparrow c}^\dagger(k') a_{s\uparrow c}(k) - a_{s\downarrow c}^\dagger(k') a_{s\downarrow c}(k) \\ &= \sum_{\mu^t} \text{sign}(\mu^t) a_{s\mu^t c}^\dagger(k') a_{s\mu^t c}(k), \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove $\mu^t = \pm 1/2$ sono le componenti di spin del quark lungo l'asse x . Notiamo che l'operatore ottenuto corrisponde alla differenza degli operatori densità a un corpo nello spazio dei momenti con proiezione parallela e antiparallela dello spin del quark rispetto alla direzione trasversa \hat{x} . A questo punto prendendo la combinazione degli elementi di matrice che compare in eq. (4.10) ed effettuando la seguente trasformazione di base sugli stati di nucleone

$$\begin{aligned} |p, +\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|p, \uparrow\rangle + |p, \downarrow\rangle], \\ |p, -\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|p, \uparrow\rangle - |p, \downarrow\rangle], \end{aligned} \quad (4.23)$$

si ottiene una nuova espressione per l'eq. (4.10)

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle - \langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} 2\langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle, \quad (4.24)$$

dove si è sfruttata la relazione

$$\begin{aligned} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle = \\ - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Considerando ora una nuova combinazione degli elementi di matrice \mathbf{A} si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{++,-} - \mathbf{A}_{-+,-} &= \frac{1}{2} [\mathbf{A}_{++,-} - \mathbf{A}_{-+,-} - \mathbf{A}_{--,-} + \mathbf{A}_{+-,+}] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, + \rangle - \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, - \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ci si può facilmente accorgere che l'operatore in parentesi quadre è esattamente lo stesso che si era ottenuto in equazione (4.10), quindi calcolandolo esplicitamente in termini di operatori di creazione e distruzione e cambiando la base si ricava nuovamente il risultato (4.22). Cambiando ora la base degli stati di nucleone attraverso le relazioni in equazione (4.23), l'espressione (4.26) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle + \langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle \right] \\ = \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} 2\langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle, \end{aligned} \quad (4.27)$$

dove si è usato il fatto che

$$\langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle = \langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle. \quad (4.28)$$

Perseguendo lo scopo di rendere chiaro e semplice il formalismo risulta conveniente definire

$$T_{\lambda'_t \lambda_t}^q \doteq \langle p', \lambda'_t | \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} [\mathcal{O}_{+,-} + \mathcal{O}_{-,+}] | p, \lambda_t \rangle, \quad (4.29)$$

che analogamente all'eq. (3.55) del caso polarizzato, risulta essere dato da

$$T_{\lambda'_t \lambda_t}^q = \sum_N T_{\lambda'_t \lambda_t}^{q(N \rightarrow N)}, \quad (4.30)$$

con

$$\begin{aligned} T_{\lambda'_t \lambda_t}^{q(N \rightarrow N)} &= \left(\sqrt{1 - \xi} \right)^{2-N} \left(\sqrt{1 + \xi} \right)^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \text{sign}(\mu_j^t) \delta_{s_j q} \\ &\times \int [d\bar{x}]_N [d^2 \bar{k}_\perp]_N \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \Psi_{N,\beta'}^{*\lambda'_t}(\hat{r}') \Psi_{N,\beta}^{\lambda_t}(\tilde{r}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

ovvero l'equivalente, nello spazio di spin trasverso, dell'espressione $\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda' \lambda}^q$ che si aveva per il caso polarizzato longitudinalmente. Inoltre, dalle equazioni (4.7), (4.9), (4.10), (4.24), (4.26) e (4.27) si trova l'espressione generale per la GPD H_T^q

$$H_T^q = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} T_{++}^q - \frac{2M\xi}{\epsilon \sqrt{t_0 - t} (1 - \xi^2)} T_{+-}^q, \quad (4.32)$$

con

$$\begin{aligned} T_{++}^q &= \sqrt{1 - \xi^2} \left[H_T^q - \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} E_T^q + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \tilde{E}_T^q \right], \\ T_{+-}^q &= \epsilon \frac{\sqrt{t_0 - t}}{2M} [-\xi E_T^q + \tilde{E}_T^q] \end{aligned} \quad (4.33)$$

in perfetta analogia al caso di polarizzazione longitudinale.

Le altre combinazioni di elementi di matrice \mathbf{A} che vanno prese in considerazione per poter ricostruire il sistema delle GPDs trasversalmente polarizzate sono

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{++,+-} + \mathbf{A}_{-+,-} &= \frac{1}{2} [\mathbf{A}_{++,+-} - \mathbf{A}_{--, -+} + \mathbf{A}_{-+,-} - \mathbf{A}_{+-,++}] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, + \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, - \rangle \right] \\ &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | \frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \psi | p, + \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle p', - | \frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \psi | p, - \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{++,-,-} - \mathbf{A}_{-+,+-} &= \frac{1}{2}[\mathbf{A}_{++,-,-} + \mathbf{A}_{--,++} - \mathbf{A}_{-+,+-} - \mathbf{A}_{+,-,-}] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, - \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, + \rangle \right] \\
&= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \left[\langle p', + | \frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \psi | p, - \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle p', - | \frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} \psi | p, + \rangle \right].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Cambiando base per gli stati di nucleone grazie alle equazioni (4.23) si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} &\left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, + \rangle + \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, - \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} 2 \left[\langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle \right],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

dove si è sfruttata la seguente relazione

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle \\
&= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} &\left[\langle p', + | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, - \rangle - \langle p', - | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, + \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} 2 \left[\langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle \right],
\end{aligned} \tag{4.38}$$

dove questa volta

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \downarrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \uparrow \rangle \\
&= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} \langle p', \uparrow | [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \downarrow \rangle.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Perciò come per i casi precedenti è conveniente introdurre

$$\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q \doteq \langle p', \lambda'_t | \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i\bar{x}\bar{p}^+ z^-} [\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+}] | p, \lambda_t \rangle, \quad (4.40)$$

dove

$$\mathcal{O}_{+,-} - \mathcal{O}_{-,+} = \frac{i}{4} \bar{\psi} \sigma^{+1} [(1 - \gamma_5) + (1 + \gamma_5)] \psi = \frac{i}{2} \bar{\psi} \sigma^{+1} \psi. \quad (4.41)$$

Quindi riutilizzando i risultati (4.18) l'analogia di equazione (4.20) in questo caso risulta

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q &= \langle p', \lambda'_t | - \int \frac{dk'^+ d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \sum_{c,c'} \delta_{cc'} \\ &\quad \times \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k_j^+ - k_j'^+) \sqrt{k_j'^+ k_j^+} \\ &\quad \left\{ - b_{s\mu'=1/2c}^\dagger(k') b_{s\mu=-1/2c}(k) \chi_{\mu'=1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=-1/2} \right. \\ &\quad \left. + b_{s\mu'=-1/2c}^\dagger(k') b_{s\mu=1/2c}(k) \chi_{\mu'=-1/2}^\dagger \sigma_x \chi_{\mu=1/2} \right\} | p, \lambda_t \rangle \end{aligned} \quad (4.42)$$

Effettuando nuovamente la trasformazione di base (4.21) si ottiene

$$b_{s-1/2c}^\dagger(k') b_{s1/2c}(k) - b_{s1/2c}^\dagger(k') b_{s-1/2c}(k) = a_{s\uparrow c}^\dagger(k') a_{s\downarrow c}(k) - a_{s\downarrow c}^\dagger(k') a_{s\uparrow c}(k), \quad (4.43)$$

In questo caso, a differenza dell'operatore in eq. (4.22), l'operatore è dato dagli elementi non diagonali nello spazio di spin trasverso della matrice densità a un corpo. Di conseguenza, l'elemento di matrice di tale operatore tra gli stati di nucleone descrive l'ampiezza di probabilità di avere flip di spin trasverso del quark dallo stato iniziale allo stato finale.

Dalla (4.43) si ha

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q &= -\langle p', \lambda'_t | \int \frac{dk'^+ d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{16\pi^3 k'^+} \Theta(k'^+) \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{16\pi^3 k^+} \Theta(k^+) \\ &\quad \times \sum_{c,c'} \delta_{cc'} \delta(2\bar{x}\bar{p}^+ - k_j^+ - k_j'^+) \sqrt{k_j'^+ k_j^+} \\ &\quad \left\{ a_{s\uparrow c}^\dagger(k') a_{s\downarrow c}(k) - a_{s\downarrow c}^\dagger(k') a_{s\uparrow c}(k) \right\} | p, \lambda_t \rangle. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Anche ora vale un'equazione simile alla (4.30)

$$\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q = \sum_N \tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^{q(N \rightarrow N)}, \quad (4.45)$$

quindi la “*overlap representation*” di $\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^{q(N \rightarrow N)}$ è data da

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^{q(N \rightarrow N)} &= \left(\sqrt{1 - \xi} \right)^{2-N} \left(\sqrt{1 + \xi} \right)^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \delta_{\mu_j'^t - \mu_j^t} \text{sign}(\mu_j^t) \delta_{s_j q} \\ &\times \int [d\bar{x}]_N [d^2 \bar{k}_\perp]_N \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \Psi_{N, \beta'}^{* \lambda'_t}(\hat{r}') \Psi_{N, \beta}^{\lambda_t}(\tilde{r}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

e le espressioni di \tilde{T}_{++}^q e \tilde{T}_{-+}^q in termini di GPDs risultano

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{++}^q &= \epsilon \frac{\sqrt{t_0 - t}}{2M} [2\tilde{H}_t^q + E_T^q - \xi \tilde{E}_T^q], \\ \tilde{T}_{-+}^q &= \sqrt{1 - \xi^2} \left[H_T^q + \frac{t_0 - t}{2M^2} \tilde{H}_t^q - \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} E_T^q + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \tilde{E}_T^q \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Grazie alle equazioni (4.7), (4.32), (4.33) e (4.47) è semplice ricavare le espressioni generali per tutte e quattro le GPDs trasversalmente polarizzate

$$\begin{aligned} E_T^q &= \frac{2M\xi}{\epsilon\sqrt{t_0 - t}} \frac{1}{1 - \xi^2} T_{+-}^q + \frac{2M}{\epsilon\sqrt{t_0 - t}(1 - \xi^2)} \tilde{T}_{++}^q \\ &\quad - \frac{4M^2}{(t_0 - t)\sqrt{1 - \xi^2}(1 - \xi^2)} \left(\tilde{T}_{-+}^q - T_{++}^q \right), \\ \tilde{E}_T^q &= \frac{2M}{\epsilon\sqrt{t_0 - t}(1 - \xi^2)} \left(T_{+-}^q + \xi \tilde{T}_{++}^q \right) \\ &\quad - \frac{4M^2\xi}{(t_0 - t)\sqrt{1 - \xi^2}(1 - \xi^2)} \left(\tilde{T}_{-+}^q - T_{++}^q \right), \\ H_T^q &= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} T_{++}^q - \frac{2M\xi}{\epsilon\sqrt{t_0 - t}(1 - \xi^2)} T_{+-}^q, \\ \tilde{H}_T^q &= \frac{2M^2}{(t_0 - t)\sqrt{1 - \xi^2}} (\tilde{T}_{-+}^q - T_{++}^q). \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.2 Funzioni d'onda light-cone nel modello relativistico a quark costituenti

I modelli relativistici a quark costituenti (CQM) sono modelli quantomeccanici con un numero fisso di costituenti e consistenti con la relatività, che si fondano su due ipotesi fondamentali:

- la dominanza dei quark di valenza, cioè lo sviluppo di Fock per lo stato di nucleone,

$$|\Psi\rangle = \Psi_{3q}|qqq\rangle + \Psi_{3qg}|qqqg\rangle + \Psi_{3q(q\bar{q})}|3q(q\bar{q})\rangle + \dots, \quad (4.49)$$

è saturato dalla configurazione dei quark di valenza;

- i quark costituenti rappresentano in maniera efficace i gradi di libertà del sistema.

Nei modelli a quark costituenti la relatività può essere incorporata in modo abbastanza naturale utilizzando il teorema di Bakamjian-Thomas ([38], [39]) per la costruzione dell'hamiltoniana di un sistema di particelle interagenti. In questo approccio le funzioni d'onda del CQM possono essere calcolate risolvendo l'equazione agli autovalori della Hamiltoniana nella "instant form" [IF], nella quale la coordinata temporale è x^0 e l'istante iniziale fissato a $t = t_0$, e venire legate alle autofunzioni in un'altra forma di dinamica relativistica mediante un'opportuna trasformazione unitaria. Infatti le diverse forme di dinamica relativistica differiscono per la diversa scelta dell'ipersuperficie su cui specificare le condizioni iniziali del sistema e per la diversa classificazione dei generatori del gruppo di Poincaré in operatori cinematici, indipendenti dalla dinamica del sistema, e operatori Hamiltoniani, responsabili dell'evoluzione del sistema.

In questa tesi viene presa in considerazione la connessione tra la dinamica nella IF e quella nella "light-front form" [LF], dove la coordinata temporale è costituita da $x^+ = x^0 + x^3$ e viene fissata a $t + x^3 = 0$.

La connessione delle LCWFs nel CQM in instant form e quelle nel CQM in light-front form può essere stabilita partendo dalle equazioni agli autovalori nelle differenti rappresentazioni:

- [IF] $M|M, j_c, \mu_c\rangle_c = [M_0 + V]|M, j_c, \mu_c\rangle_c = M|M, j_c, \mu_c\rangle_c$ con $M_0 = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2}$ operatore libero di massa e V operatore interazione, indipendente da \vec{P} e invariante per rotazione (condizioni necessarie per poter utilizzare il risultato di Bakamjian-Thomas);

- [LF] $\mathcal{M}|M, j_f, \mu_f\rangle_f = [M_0 + \mathcal{V}]|M, j_f, \mu_f\rangle_f = M|M, j_f, \mu_f\rangle_f$.

Quindi

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}^\dagger M \mathcal{R} = M_0 + \mathcal{R}^\dagger V \mathcal{R} \quad (4.50)$$

e

$$|M, j_f, \mu_f\rangle_f = \mathcal{R}^\dagger |M, j_c, \mu_c\rangle_c \quad (4.51)$$

dove $\mathcal{R} = \prod_{i=1}^3 R_M(\mathbf{k}_{\perp,i}, x_i, m_i)$ è una rotazione di Melosh generalizzata.

Di conseguenza la connessione tra la funzione d'onda di nucleone LF e quella IF è

$$\Psi_{3q}^f = \langle \{x_i, \mathbf{k}_{\perp,i}, \lambda_i\} | M, j_f, \mu_f \rangle_f = \left[\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{x_1 x_2 x_3 M_0} \right]^{1/2} \sum_{\{\lambda'_i\}} \langle \{\lambda_i\} | \mathcal{R}^\dagger | \{\lambda'_i\} \rangle \Psi_{3q}^c. \quad (4.52)$$

Una derivazione molto più dettagliata ed esaustiva di questa connessione è stata derivata da Boffi, Pasquini e Traini negli articoli ([40], [41]).

Il modello preso in considerazione in questa tesi è il “modello ipercentrale” introdotto da Giannini, Santopinto, *et al.* nel 1995 [42] in versione non relativistica e reso relativistico da Faccioli, Traini e Vento nel 1999 [43], la cui hamiltoniana è data da

$$H = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2} - \frac{\tau}{\sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{l}^2}} + k \sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{l}^2}, \quad (4.53)$$

con

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3}{\sqrt{6}}. \quad (4.54)$$

Questo modello dipendente da due parametri, τ e k , a dispetto della sua semplicità presenta numerosi pregi: è infatti in grado di riprodurre in maniera soddisfacente le caratteristiche principali dello spettro a bassa energia e allo stesso tempo fornisce una buona descrizione delle proprietà elettromagnetiche del nucleone, tra cui i fattori di forma. Per questo è molto interessante esplorare la connessione tra le GPDs e il modello a CQM nella regione cinematica per $x \rightarrow 1$, nella quale i gradi di libertà efficaci sono solo quelli legati ai quark di valenza. Infatti le GPDs calcolate nella regione cinematica permessa sono ottenute con un approccio covariante e esibiscono il corretto limite “forward” riproducendo la distribuzione partonica con il supporto corretto e soddisfacendo automaticamente le regole di somma per il numero di particelle e il momento. Inoltre nel modello preso in considerazione la funzione d'onda del nucleone è costruita come prodotto della parte spaziale in onda S e della parte di spin e isospin, $SU(6)$ simmetrica.

La funzione d'onda light-cone nello spazio di spin trasverso risulta dunque definita come

$$\begin{aligned} \Psi_{[f]}^{\lambda_N^t} = & 16\pi^3 \left[\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{x_1 x_2 x_3 M_0} \right]^{1/2} \psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \sum_{\{\mu_i^t\}} D_{\lambda_1^t \mu_1^t}^{1/2 \dagger}(R_M(k_1)) D_{\lambda_2^t \mu_2^t}^{1/2 \dagger}(R_M(k_2)) \\ & \times D_{\lambda_3^t \mu_3^t}^{1/2 \dagger}(R_M(k_3)) \Phi_{\lambda_N^t, \tau_N}^{S_{12}} \left(\left\{ \mu_i^t \right\} \left\{ \tau_i \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

dove:

- $\psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ parte spaziale, soluzione dell'Hamiltoniana IF nel modello ipercentrale;

•

$$\begin{aligned} D_{\lambda^t \mu^t}^{1/2}(R_M(k_1)) &= \langle 1/2, \lambda^t | R_M(x, \mathbf{k}_\perp, M_0) | 1/2, \mu^t \rangle \\ &= \langle 1/2, \lambda^t | \frac{m + xM_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}_\perp)}{[(m + xM_0)^2 + \mathbf{k}_\perp^2]^{1/2}} | 1/2, \mu^t \rangle \end{aligned} \quad (4.56)$$

rotazione di Melosh nello “spazio di spin trasverso”, dove gli stati di spin sono autostati dell'operatore “ σ_x ”:

$$|1/2, \uparrow\rangle_{\searrow \mu_t=1/2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |1/2, \downarrow\rangle_{\searrow \mu_t=-1/2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

•

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda_N^t, \tau_N}^{S_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\Phi}_{\lambda_N^t}^0(\lambda_t^1, \lambda_t^2, \lambda_t^3) \tilde{\Phi}_{\tau_N}^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \\ &+ 4\tilde{\Phi}_{\lambda_N^t}^1(\lambda_t^1, \lambda_t^2, \lambda_t^3) \tilde{\Phi}_{\tau_N}^1(\tau_1, \tau_2, \tau_3)], \end{aligned} \quad (4.57)$$

rappresenta la funzione d'onda per la parte di spin-isospin, con

$$\tilde{\Phi}_{\lambda_N^t}^{S_{12}} = \sum_{M_{S_{12}}} \langle 1/2, \lambda_1^t; 1/2, \lambda_2^t | S_{12} M_{S_{12}} \rangle \langle S_{12} M_{S_{12}}; 1/2, \lambda_3^t | 1/2, \lambda^t \rangle. \quad (4.58)$$

Specializzando le formule ottenute per l'ampiezza di scattering $T_{\lambda_t' \lambda_t}^q$ e $\tilde{T}_{\lambda_t' \lambda_t}^q$ al modello relativistico a quark costituenti si ottengono i seguenti risultati

$$\begin{aligned}
T_{\lambda'_t \lambda_t}^q &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{(16\pi^3)^2} \int \prod_{i=1}^3 d\bar{x}_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i\right) \delta(\bar{x} - \bar{x}_3) \\
&\times \int \prod_{i=1}^3 d^2 \bar{\mathbf{k}}_{\perp, i} \delta\left(\sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{k}}_{\perp, i}\right) \tilde{\psi}^*(\{\hat{x}'_i\}, \{\hat{\mathbf{k}}'_{\perp, i}\}) \tilde{\psi}(\{\tilde{x}_i\}, \{\tilde{\mathbf{k}}_{\perp, i}\}) \\
&\times \delta_{\tau_q \tau_3} \left\{ X_{\lambda'_t \lambda_t}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \delta_{\tau_3 1/2} + \frac{1}{3} X_{\lambda'_t \lambda_t}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) [\delta_{\tau_3 1/2} + 2\delta_{\tau_3 -1/2}] \right\},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

con

$$\begin{aligned}
X_{\lambda'_N \lambda_N}^{S_{12} S'_{12}} &= \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \\
&\times \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} D_{\lambda_1^t \mu_1^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1)\right) D_{\lambda_2^t \mu_2^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_2)\right) D_{\lambda_3^t \mu_3^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_3)\right) \Phi_{\lambda_N^t \tau_N'}^{S'_{12}} \right\}^* \\
&\times \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} D_{\lambda_1^t \mu_1^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_1)\right) D_{\lambda_2^t \mu_2^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_2)\right) D_{\lambda_3^t \mu_3^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_3)\right) \Phi_{\lambda_N^t \tau_N}^{S_{12}} \right\},
\end{aligned} \tag{4.60}$$

e dove i contributi di spin e isospin alle ampiezze di scattering nello spazio di spin trasverso forniscono (ved. Appendice C per i dettagli riguardo alla derivazione) le seguenti espressioni

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(X_{++}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= -\text{Re} \left(X_{--}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) \\
&= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left[(A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) A_3 \right], \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(X_{++}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= -\text{Re} \left(X_{--}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) = \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \\
&\times \frac{1}{3} \left[- (A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - 4B_{1,x} B_{2,x}) A_3 \right. \\
&\quad + 2(A_1 B_{2,x} + A_2 B_{1,x}) B_{3,x} \\
&\quad + 2(B_{1,x} B_{2,z} + B_{1,z} B_{2,x}) B_{3,y} \\
&\quad \left. + 2(B_{1,x} B_{2,y} + B_{1,y} B_{2,x}) B_{3,z} \right], \tag{4.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(X_{-+}^{00}(\tilde{k}', \hat{k}) \right) &= \text{Re} \left(X_{+-}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) \\
&= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left[(A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) B_{3,y} \right], \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$$\text{Re} \left(X_{-+}^{11}(\tilde{k}', \hat{k}) \right) = \text{Re} \left(X_{+-}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) = \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i)$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{3} [(-A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 + 4B_{1,z} B_{2,z}) B_{3,y} \\
& + 2(A_1 B_{2,z} + A_2 B_{1,z}) B_{3,x} \\
& + 2(B_{1,x} B_{2,z} + B_{1,z} B_{2,x}) A_3 \\
& + 2(B_{1,y} B_{2,z} + B_{1,z} B_{2,y}) B_{3,z}], \tag{4.64}
\end{aligned}$$

$$\tag{4.65}$$

Nelle equazioni precedenti, $N(\tilde{k})$, A_i e \vec{B}_i , con $i = 1, 2$, sono definiti come nella Ref. [40] e li riportiamo qui per comodità

$$N(\tilde{k}) = [(m + \tilde{x} \tilde{M}_0)^2 + \tilde{k}_\perp^2]^{1/2}. \tag{4.66}$$

$$A_i = (m + \hat{x}'_i \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_i \tilde{M}_0) + \hat{k}'_{i,y} \tilde{k}_{i,y} + \hat{k}'_{i,x} \tilde{k}_{i,x}, \tag{4.67}$$

$$B_{i,x} = -(m + \hat{x}'_i \hat{M}'_0) \tilde{k}_{i,y} + (m + \tilde{x}_i \tilde{M}_0) \hat{k}'_{i,y}, \tag{4.68}$$

$$B_{i,y} = (m + \hat{x}'_i \hat{M}'_0) \tilde{k}_{i,x} - (m + \tilde{x}_i \tilde{M}_0) \hat{k}'_{i,x}, \tag{4.69}$$

$$B_{i,z} = \hat{k}'_{i,x} \tilde{k}_{i,y} - \hat{k}'_{i,y} \tilde{k}_{i,x}, \tag{4.70}$$

mentre A_3 e \vec{B}_3 sono dati da

$$A_3 = (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + \hat{k}'_{3,y} \tilde{k}_{3,y} - \hat{k}'_{3,x} \tilde{k}_{3,x}, \tag{4.71}$$

$$B_{3,x} = (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{3,y} - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{3,y}, \tag{4.72}$$

$$B_{3,y} = -(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{3,x} - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{3,x}, \tag{4.73}$$

$$B_{3,z} = -\hat{k}'_{3,x} \tilde{k}_{3,y} - \hat{k}'_{3,y} \tilde{k}_{3,x}. \tag{4.74}$$

Analogamente, le GPDs dispari per trasformazioni di elicità con flip della polarizzazione trasversa del quark attivo sono ottenute da differenti elementi di matrice dell'ampiezza $\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q$ che ha l'espressione

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{(16\pi^3)^2} \int \prod_{i=1}^3 d\bar{x}_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i\right) \delta(\bar{x} - \bar{x}_3) \\
&\times \int \prod_{i=1}^3 d^2 \bar{\mathbf{k}}_{\perp,i} \delta\left(\sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{k}}_{\perp,i}\right) \tilde{\psi}^*(\{\hat{x}'_i\}, \{\hat{k}'_{\perp,i}\}) \tilde{\psi}(\{\tilde{x}_i\}, \{\tilde{k}_{\perp,i}\}) \\
&\times \delta_{\tau_q \tau_3} \left\{ \tilde{X}_{\lambda'_t \lambda_t}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \delta_{\tau_3 1/2} + \frac{1}{3} \tilde{X}_{\lambda'_t \lambda_t}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) [\delta_{\tau_3 1/2} + 2\delta_{\tau_3 -1/2}] \right\}, \tag{4.75}
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{X}_{\lambda'_t \lambda_t}^{S_{12} S'_{12}} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} D_{\lambda_1^t \mu_1^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1) \right) D_{\lambda_2^t \mu_2^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_2) \right) D_{-\lambda_3^t \mu_3^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_3) \right) \Phi_{\lambda_N^t \tau_N'}^{S'_{12}} \right\}^* \\
& \times \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} D_{\lambda_1^t \mu_1^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_1) \right) D_{\lambda_2^t \mu_2^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_2) \right) D_{-\lambda_3^t \mu_3^t}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_3) \right) \Phi_{\lambda_N^t \tau_N}^{S_{12}} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Per la quale si trovano

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(\tilde{X}_{++}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= \text{Re} \left(\tilde{X}_{--}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) \\
&= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left[(A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) \right] \tilde{A}_3, \tag{4.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(\tilde{X}_{++}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= \text{Re} \left(\tilde{X}_{--}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) = \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \\
&\times \frac{1}{3} \left[(3A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) \tilde{A}_3 \right. \\
&\quad + 2(A_1 B_{2,x} + A_2 B_{1,x}) \tilde{B}_{3,x} \\
&\quad + 2(A_1 B_{2,y} + A_2 B_{1,y}) \tilde{B}_{3,y} \\
&\quad \left. + 2(A_1 B_{2,z} + A_2 B_{1,z}) \tilde{B}_{3,z} \right], \tag{4.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(\tilde{X}_{-+}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= -\text{Re} \left(\tilde{X}_{+-}^{00}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) \\
&= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left[(A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) \tilde{B}_{3,y} \right], \tag{4.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left(\tilde{X}_{-+}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) &= -\text{Re} \left(\tilde{X}_{+-}^{11}(\hat{k}', \tilde{k}) \right) = \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \\
&\times \frac{1}{3} \left[(-A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 + 4B_{1,y} B_{2,y}) \tilde{B}_{3,y} \right. \\
&\quad + 2(B_{1,x} B_{2,y} + B_{2,x} B_{1,y}) \tilde{B}_{3,x} \\
&\quad + 2(A_1 B_{2,y} + A_2 B_{1,y}) \tilde{A}_3 \\
&\quad \left. + 2(B_{1,y} B_{2,z} + B_{1,z} B_{2,y}) \tilde{B}_{3,z} \right], \tag{4.80}
\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{A}_3 = k'_{3,x}(m + y_3 M_0) - k_{3,x}(m + y'_3 M'_0), \tag{4.81}$$

$$\tilde{B}_{3,x} = -k'_{3,x} k_{3,y} - k'_{3,y} k_{3,x}, \tag{4.82}$$

$$\tilde{B}_{3,y} = (m + y'_3 M'_0)(m + y_3 M_0) - k'_{3,y} k_{3,y} + k'_{3,x} k_{3,x}, \tag{4.83}$$

$$\tilde{B}_{3,z} = -(m + y'_3 M'_0) k_{3,y} - (m + y_3 M_0) k'_{3,y}. \tag{4.84}$$

4.2.1 Limite diagonale delle GPDs

In questo paragrafo viene riportato un interessante risultato ottenuto nel calcolo del limite diagonale (“forward”, $\xi, t \rightarrow 0$ cioè $p = p'$) delle GPDs H^q , \tilde{H}^q e H_T^q grazie al quale si ritrovano le tre PDFs al leading twist (2.53) Infatti osservando le espressioni per $\tilde{H}^q(x, 0, 0)$ e $H_T^q(x, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^q(x, 0, 0) = g_1^q(x) &= \sum_{\lambda_i \tau_i} \sum_{j=1}^3 \delta_{\tau_j \tau_q} \text{sign}(\lambda_j) \\
&\times \int [d\bar{x}]_3 [d\mathbf{k}_\perp]_3 \delta(x - x_j) \left| \psi_\lambda^{[f]}(x_i, \mathbf{k}_\perp; \lambda_i, \tau_i) \right|^2, \\
H_T^q(x, 0, 0) = h_1^q(x) &= \sum_{\lambda_i^t \tau_i} \sum_{j=1}^3 \delta_{\tau_j \tau_q} \text{sign}(\lambda_j^t) \\
&\times \int [d\bar{x}]_3 [d\mathbf{k}_\perp]_3 \delta(x - x_j) \left| \psi_{\lambda^t}^{[f]}(x_i, \mathbf{k}_\perp; \lambda_i^t, \tau_i) \right|^2,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

si può notare la loro completa analogia.

Questo risultato era atteso ed è un’ulteriore conferma di quanto detto in precedenza a proposito della differenza tra la distribuzione di elicità e trasversità. Come noto la loro differenza nasce puramente per effetti relativistici, che nel nostro modello sono contenuti nelle rotazioni di Melosh utilizzate per la costruzione delle LCWFs nello spazio di spin trasverso. Quindi, nelle formule in eq. (4.85), la differenza tra le due distribuzioni è nascosta all’interno dell’espressione per le funzioni d’onda light-cone $\psi_\lambda^{[f]}(x_i, \mathbf{k}_\perp; \lambda_i, \tau_i)$ e $\psi_{\lambda^t}^{[f]}(x_i, \mathbf{k}_\perp; \lambda_i^t, \tau_i)$.

Nell’ambito del limite “forward” le GPDs trasversalmente polarizzate posseggono un’altra importante proprietà.

Applicando una trasformazione di inversione temporale all’equazione (4.1) si ricavano [35] le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
H_T^q(x, \xi, t) &= H_T^q(x, -\xi, t), \\
\tilde{H}_T^q(x, \xi, t) &= \tilde{H}_T^q(x, -\xi, t), \\
E_T^q(x, \xi, t) &= E_T^q(x, -\xi, t), \\
\tilde{E}_T^q(x, \xi, t) &= -\tilde{E}_T^q(x, -\xi, t).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Da quest’ultime deduciamo che nel limite diagonale si ricava che la GPD \tilde{E}_T^q si annulla, mentre le altre GPDs sono diverse da zero. D’altra parte, dall’espressione in eq. (4.48), notiamo che le GPD E_T^q e \tilde{H}_T^q nel limite diagonale si

disaccoppiano dall'ampiezza di scattering, in quanto moltiplicate per un fattore cinematico che si annulla per $p = p'$. Di conseguenza solo H_T^q può essere misurata nel limite diagonale, dove si riduce alla distribuzione di trasversità, che è attualmente al centro di numerose attività sperimentali a HERMES, COMPASS e RHIC (ved. [27] e referenze in esso contenute).

Capitolo 5

CONCLUSIONI

La ricostruzione dello spin del protone in termini dei momenti angolari dei suoi costituenti elementari è tuttora un problema che non ha ricevuto soluzioni adeguate e soddisfacenti nell'ambito della Cromodinamica Quantistica, cioè la teoria che descrive il settore delle interazioni forti nel Modello Standard. Poiché il protone è la particella più comune nell'universo, capire la dinamica della sua struttura partonica di spin è un obiettivo di importante rilevanza.

In questa tesi si è affrontato il problema di costruire un modello per la distribuzione partonica di spin trasverso, che contribuisce in modo determinante alla struttura partonica di cui sopra, ma che è tuttora inesplorata. Una determinazione sperimentale delle sue peculiari caratteristiche rappresenta un test formidabile della Cromodinamica Quantistica nel cosiddetto regime non perturbativo, dove la simmetria chirale è spontaneamente rotta. La distribuzione di spin trasverso, o trasversità, è stata introdotta per la prima volta da Ralston e Soper nel 1979 ed è oggetto di studio in numerosi centri di ricerca sia dal punto di vista teorico che sperimentale (DESY, CERN, JLAB, ...).

Lo strumento di calcolo utilizzato in questa tesi è rappresentato dalle distribuzioni partoniche generalizzate (GPD), che si sono affermate di recente come l'approccio più potente e versatile al problema del legame tra spin degli adroni e polarizzazione dei suoi costituenti elementari. Le GPD inglobano le distribuzioni partoniche e ne generalizzano la definizione ad un regime cinematico più ampio; ma al tempo stesso contengono anche l'informazione fornita dai fattori di forma degli adroni. Esse rappresentano cioè un formalismo potente per descrivere consistentemente processi esclusivi e (semi-)inclusivi. Dalla definizione si evince che le GPD, al contrario delle distribuzioni partoniche, sono ampiezze di probabilità che descrivono interferenze tra canali diversi. Pertanto esse non hanno una naturale interpretazione probabilistica.

In questo lavoro si è studiato la rappresentazione overlap delle GPD,

che rappresenta un metodo efficace per ottenere tale l'interpretazione probabilistica. In particolare partendo dai risultati esistenti in letteratura per le GPD non polarizzate e polarizzate longitudinalmente, si è costruita la rappresentazione overlap per le GPD trasversalmente polarizzate. In tale rappresentazione le GPD sono direttamente connesse alla matrice densità a un corpo nello spazio dei momenti, e quindi si sono ottenute come sovrapposizione di funzioni d'onda relativistiche sul cono di luce (LCWF). In questo lavoro, utilizzando tale rappresentazione overlap, si è messo in evidenza come le diverse GPD (non polarizzate, polarizzate longitudinalmente e trasversalmente) siano ottenute da diverse proiezioni nello spazio di spin della matrice densità.

Inoltre questo studio fornisce tutte le basi per una futura analisi numerica dettagliata e rappresenta un calcolo originale in letteratura, che ha permesso di ottenere interessanti riscontri riguardo la trasversità. Infatti, come ampiamente descritto all'interno del capitolo 2, le GPD nel cosiddetto limite diagonale forniscono esattamente le distribuzioni partoniche al leading twist. In particolare la GPD trasversa H_T nel suo limite diagonale fornisce proprio la trasversità, in una maniera simile a quella per cui la GPD longitudinalmente polarizzata, \tilde{H} , ricade nella distribuzione di elicità. È stato così possibile mettere in luce gli effetti relativistici che spiegano la diversità tra trasversità e chiralità.

Nel nostro calcolo per la costruzione delle funzione d'onda sul cono luce abbiamo utilizzato un modello relativistico a quark costituenti. In tale modello è possibile studiare le GPD nella regione cinematica, in cui i gradi di libertà efficaci sono quelli legati ai quark di valenza. Gli effetti relativistici contenuti nella costruzione della LCWF sono essenziali per ottenere un approccio covariante, capace di soddisfare le condizioni del corretto supporto nel limite diagonale delle distribuzioni partoniche, e le regole di somma per il numero di particelle e per il momento.

APPENDICE A

Generalizzazione di $SU(2)$

Il gruppo $SU(2)$ ha tre generatori indipendenti, le matrici di Pauli σ^i $i=1-3$. L'invarianza per trasformazioni di gauge locali di $SU(2)$ implica l'esistenza di tre campi vettoriali A_μ^i . Il campo di Dirac diventa un doppietto di campi di Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

e la trasformazione di gauge locale diviene

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha^i(x)\left(\frac{\sigma^i}{2}\right)}\psi(x) \equiv V(x)\psi(x). \quad (2)$$

I generatori appartengono ad un'algebra non commutativa, infatti

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k, \quad (3)$$

di conseguenza generano una teoria di gauge non abeliana. Analogamente al caso della QED si introduce il *comparatore*

$$U(y, x) = e^{i\phi(y, x)}, \quad U(x, x) = \mathbf{1}, \quad (4)$$

il quale per la QCD si trasforma attraverso la seguente relazione

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x). \quad (5)$$

Per spostamenti infinitesimi

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu^i(x)\frac{\sigma^i}{2} + O(\epsilon^2). \quad (6)$$

Definiamo la derivata covariante

$$\begin{aligned}
n^\mu D_\mu \psi(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\psi(x) + \epsilon n^\mu \partial_\mu \psi(x) - \left(1 + g\epsilon \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu n^\mu \right) \psi(x) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\epsilon n^\mu \left(\partial_\mu \psi(x) - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \psi(x) \right) \right], \\
\Rightarrow D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \psi(x) - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \psi(x). \tag{7}
\end{aligned}$$

La trasformazione dei campi di gauge si ottiene partendo dalle proprietà del comparatore

$$\begin{aligned}
U(x + \epsilon n, x) &\rightarrow V(x + \epsilon n) U(x + \epsilon n, x) V^\dagger(x) \\
&\simeq \left(V(x) + \epsilon n^\mu \partial_\mu V \right) U(x + \epsilon n, x) V^\dagger(x) \\
&\left(V(x) + \epsilon n^\mu \partial_\mu V \right) \left(1 + ig\epsilon \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu n^\mu \right) V^\dagger(x) \simeq 1 + ig\epsilon V \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu n^\mu V^\dagger \\
&\quad + \epsilon n^\mu \left(\partial_\mu V \right) V^\dagger \\
\Rightarrow \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}'_\mu &= V \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu V^\dagger - \frac{i}{g} \left(\partial_\mu V \right) V^\dagger = V \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu V^\dagger + \frac{i}{g} V \partial_\mu V^\dagger. \tag{8}
\end{aligned}$$

Per V infinitesima, cioè α piccolo, risulta $V(x) \simeq \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right)$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}'_\mu &= \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right) \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \left(1 - i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right) - \frac{i}{g} \left(i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \partial_\mu \vec{\alpha}(x) \right) \\
&\times \left(1 - i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right) = \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu + i \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x), \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \right] + \frac{1}{g} \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \partial_\mu \vec{\alpha}(x). \tag{9}
\end{aligned}$$

La trasformazione per la derivata covariante è data da

$$\begin{aligned}
\left(D_\mu \psi(x)\right)' &= \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot A'_\mu\right) \psi' = D'_\mu V \psi(x) \simeq D'_\mu \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \psi(x) \\
&= \left[\partial_\mu - ig \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot A_\mu + \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x), \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu\right] + \frac{1}{g} \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \partial_\mu \vec{\alpha}(x)\right)\right] \\
&\quad \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \psi(x) \\
&= \left\{ \partial_\mu + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \partial_\mu \vec{\alpha}(x) + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot A_\mu \right. \\
&\quad \left. + g \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot A_\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) + g \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x), \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu\right] - i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \partial_\mu \vec{\alpha}(x) \right\} \psi(x) \\
&= \left\{ \partial_\mu + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu + g \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot A_\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right\} \psi(x) \\
&= \left\{ \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \partial_\mu - \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \right\} \psi(x) \\
&= \left(1 + i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\right) \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu\right) \psi(x) \\
&= V D_\mu \psi(x). \tag{10}
\end{aligned}$$

Questa trasformazione è analoga a quella per il campo di Dirac; il termine cinetico risulta quindi essere

$$\bar{\psi}(x) i \gamma^\mu D_\mu \psi(x), \tag{11}$$

con D_μ che ingloba l'interazione attraverso l'accoppiamento minimale descritto dalla costante d'accoppiamento “ g ”.

APPENDICE B

Contributo dominante in e^+e^- inclusivo

Partendo dalla definizione di tensore adronico abbiamo

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi \cdot (q - P_X)} \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle 0 | J^\mu(0) e^{-i\xi \cdot \hat{P}} | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle 0 | e^{i\xi \cdot \hat{P}} J^\mu(0) e^{-i\xi \cdot \hat{P}} | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle 0 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | 0 \rangle = \dots
\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&\int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle 0 | J^\nu(0) J^\mu(\xi) | 0 \rangle \\
&= \int d^4\xi \int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} e^{i\xi \cdot q} e^{i\xi \cdot P_X} \langle 0 | J^\nu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\mu(\xi) | 0 \rangle, \\
&\int \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q + P_X) \langle 0 | J^\nu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\mu(\xi) | 0 \rangle, \tag{12}
\end{aligned}$$

questo implica $q^0 = \nu = -P_x^0$, che è ovviamente impossibile; quindi questo contributo deve essere uguale a zero e può essere sommato a quello precedente per ottenere

$$W^{\mu\nu} = \dots = \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle.$$

Nel limite di Bjorken (che implica $\nu \rightarrow \infty$), sapendo che per $|q \cdot \xi| \rightarrow \infty$ il termine $e^{i\xi \cdot q}$ oscilla fortemente e i contributi all'integrale si cancellano, abbiamo

$$\begin{aligned} q \cdot \xi &= q_0 \xi^0 - \vec{q} \cdot \vec{\xi} = \nu \xi^0 - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\xi}}{|\vec{q}|} |\vec{q}| \doteq \nu \xi^0 - r \sqrt{\nu^2 - q^2} \\ &= \nu \xi^0 - r \nu \sqrt{1 - \frac{q^2}{\nu^2}} \cong \nu \xi^0 - r \nu \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\nu^2}\right) = \nu(\xi^0 - r) + r \frac{q^2}{2\nu} \\ &\cong \nu(\xi^0 - r) - r M x_B \leq \text{cost.} \end{aligned}$$

che implica

$$|\xi^0 - r| \leq \frac{\text{cost.}}{\nu} \quad \text{e} \quad r \leq \frac{\text{cost.}}{x_B}, \quad (13)$$

cioè

$$\xi^0 \leq \frac{\text{cost.}}{\nu} + r. \quad (14)$$

Infine, poiché $r^2 = |\vec{\xi}|^2$

$$\left(\xi^0\right)^2 \leq \frac{\text{cost.}}{\nu^2} + 2 \frac{\text{cost.}}{\nu} r + r^2 \leq |\vec{\xi}|^2 + \frac{\text{cost.}}{\nu x_B}, \quad (15)$$

e quindi

$$\left(\xi^0\right)^2 - |\vec{\xi}|^2 = \xi^2 \leq \frac{\text{cost.}}{\nu x_B} \longrightarrow 0. \quad (16)$$

APPENDICE C

Contributo di spin e isospin alle ampiezze di scattering nello spazio trasverso

In questa appendice si illustrano in un certo dettaglio i passaggi relativi al calcolo delle componenti di spin e isospin che compaiono nelle ampiezze di scattering $T_{\lambda'_t \lambda_t}^q$ e $\tilde{T}_{\lambda'_t \lambda_t}^q$ nel modello relativistico a quark costituenti.

Contributo di isospin

Esplicitando la somma sulle variabili di isospin in equazione (4.58) si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau_i} \Phi_{\tau_N}^{T'_{12}}(\tau_i) \Phi_{\tau_N}^{T_{12}}(\tau_i) \delta_{\tau_3, \tau_q} = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \sum_{\tau_3} \sum_{\tau_{12}} \sum_{\tau'_{12}} \langle 1/2, \tau_1; 1/2, \tau_2 | T'_{12}; \tau'_{12} \rangle \\
 & \times \langle 1/2, \tau_1; 1/2, \tau_2 | T_{12}; \tau_{12} \rangle \langle T'_{12}, \tau'_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle \langle T_{12}, \tau_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle \delta_{\tau_3, \tau_q} \\
 & = \sum_{\tau_3} \sum_{\tau_{12}} \langle T_{12}, \tau_{12} | 1/2, \tau_3 | 1/2, \tau_N \rangle \langle T_{12}, \tau_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle \delta_{\tau_3, \tau_q} \\
 & = \delta_{T_{12}, 0} \left\{ \sum_{\tau_3} \delta_{\tau_3, \tau_q} |\langle 0, 0; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle|^2 \right\} \\
 & + \delta_{T_{12}, 1} \left\{ \sum_{\tau_3} \delta_{\tau_3, \tau_q} \sum_{\tau_{12}} |\langle 1, \tau_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle|^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Dal momento che

$$\langle 0, 0; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle = \delta_{\tau_3, \tau_N} \tag{18}$$

e

$$\langle 1, \tau_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle = \delta_{\tau_3, \frac{1}{2}} (-1) \left[\frac{3 - 2\tau_N}{6} \right]^{1/2} + \delta_{\tau_3, -\frac{1}{2}} \left[\frac{3 + 2\tau_N}{6} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_3} \sum_{\tau_1 2} \delta_{\tau_3, \tau_q} |\langle 1, \tau_{12}; 1/2, \tau_3 | 1/2; \tau_N \rangle|^2 &= \\ &= \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} \delta_{\tau_N, \frac{1}{2}} \left[\frac{3 - 2\tau_N}{6} \right] + \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \delta_{\tau_N, \frac{1}{2}} \left[\frac{3 + 2\tau_N}{6} \right] \\ &\quad + \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} \delta_{\tau_N, -\frac{1}{2}} \left[\frac{3 - 2\tau_N}{6} \right] + \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \delta_{\tau_N, -\frac{1}{2}} \left[\frac{3 + 2\tau_N}{6} \right] \\ &= \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} \left\{ \delta_{\tau_N, \frac{1}{2}} (1/3) + \delta_{\tau_N, -\frac{1}{2}} (2/3) \right\} + \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \left\{ \delta_{\tau_N, \frac{1}{2}} (2/3) + \delta_{\tau_N, -\frac{1}{2}} (1/3) \right\} \\ &= \delta_{\tau_N, \frac{1}{2}} \left\{ (1/3) \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} + (2/3) \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \right\} + \delta_{\tau_N, -\frac{1}{2}} \left\{ (2/3) \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} + (1/3) \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Quindi, se il bersaglio è un protone

$$\delta_{T_{12}, 0} \delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} + \delta_{T_{12}, 1} (1/3) [\delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} + 2\delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}}], \quad (21)$$

in caso, invece, sia un neutrone

$$\delta_{T_{12}, 0} \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} + \delta_{T_{12}, 1} (1/3) [2\delta_{\tau_q, \frac{1}{2}} + \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}}]. \quad (22)$$

Dalla somma sulle variabili di isospin si deduce

$$T_{12} = S_{12} = T'_{12} = S'_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

Contributo di spin

In questa sezione riportiamo il calcolo esplicito dei coefficienti $X_{\lambda'_t \lambda_t}^{S_{12} S'_{12}}$.

Il calcolo di $X_{\lambda'_t \lambda_t}^{00}$ corrisponde alla seguente espressione

$$X_{\lambda'_t \lambda_t}^{00} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} D_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1) \right) D_{\lambda_2 \bar{\mu}_2}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_2) \right) D_{\lambda_3 \bar{\mu}_3}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda_N}^0(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \right\}^* \\
& \times \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} D_{\lambda_1 \mu_1}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_1) \right) D_{\lambda_2 \mu_2}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_2) \right) D_{\lambda_3 \mu_3}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda_N}^0(\mu_1, \mu_2, \mu_3)
\end{aligned} \tag{24}$$

• **Relazioni utili:**

$$\langle 1/2, \mu_1; 1/2, \mu_2 | 0; 0 \rangle \langle 0, 0; 1/2, \mu_3 | 1/2; \lambda_N^t \rangle = \delta_{\mu_3 \lambda_N} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle \tag{25}$$

Infatti

$$\langle 1/2, \mu_1; 1/2, \mu_2 | 0; 0 \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{per } \mu_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{per } \mu_2 = \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle & \stackrel{\mu_1 = \frac{1}{2}}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle & \stackrel{\mu_1 = -\frac{1}{2}}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle = \begin{cases} -1 & \text{per } \mu_2 = -\frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \mu_2 = \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
D_{\lambda \mu}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}) \right) &= \langle 1/2, \lambda | \frac{m + \tilde{x}\tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp})}{[(m + \tilde{x}\tilde{M}_0)^2 + \tilde{\mathbf{k}}_{\perp}^2]^{1/2}} | 1/2, \mu \rangle \\
&= \langle 1/2, \lambda | R_M^{\dagger}(\tilde{k}) | 1/2, \mu \rangle, \tag{29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[D_{\lambda \mu}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}) \right) \right]^* &= \langle 1/2, \mu | \frac{m + \tilde{x}\tilde{M}_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp})}{[(m + \tilde{x}\tilde{M}_0)^2 + \tilde{\mathbf{k}}_{\perp}^2]^{1/2}} | 1/2, \lambda \rangle \\
&= \langle 1/2, \mu | R_M(\tilde{k}) | 1/2, \lambda \rangle. \tag{30}
\end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni appena viste l'equazione (24) diviene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \left[\sum_{\lambda_1} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) | 1/2, \lambda_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^{\dagger}(\tilde{k}_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \right] \\
& \times \left[\sum_{\lambda_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | R_M(\hat{k}'_2) | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^{\dagger}(\tilde{k}_2) | 1/2, \mu_2 \rangle \right. \\
& \quad \left. \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | -i\sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle \right] \\
& \times \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda_N^t | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^{\dagger}(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle. \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda_1} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) | 1/2, \lambda_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\tilde{k}_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \\
&= \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) R_M^\dagger(\tilde{k}_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \\
&= N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | A_1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \mu_1 \rangle
\end{aligned} \tag{32}$$

Dim.:

$$\begin{aligned}
& \langle 1/2, \lambda' | R_M(\hat{k}') R_M^\dagger(\tilde{k}) | 1/2, \lambda \rangle \\
&= N^{-1}(\hat{k}') N^{-1}(\tilde{k}) \langle 1/2, \lambda' | [m + \hat{x}' \tilde{M}_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp)] \\
&\quad \times [m + \tilde{x} \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp)] | 1/2, \lambda \rangle \\
&= N^{-1}(\hat{k}') N^{-1}(\tilde{k}) \langle 1/2, \lambda' | (m + \hat{x}' \tilde{M}_0)(m + \tilde{x} \tilde{M}_0) \\
&\quad + i(m + \hat{x}' \tilde{M}_0) \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp) - i(m + \tilde{x} \tilde{M}_0) \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp) \\
&\quad + \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp) \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp) | 1/2, \lambda \rangle \\
&= N^{-1}(\hat{k}') N^{-1}(\tilde{k}) \langle 1/2, \lambda' | (m + \hat{x}' \tilde{M}_0)(m + \tilde{x} \tilde{M}_0) \\
&\quad + i(m + \hat{x}' \tilde{M}_0) \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp) - i(m + \tilde{x} \tilde{M}_0) \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp) \\
&\quad + (\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp) \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp) + i\vec{\sigma} [(\hat{z} \times \mathbf{k}'_\perp) \times (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_\perp)] | 1/2, \lambda \rangle \\
&= \langle 1/2, \lambda' | R_M(\hat{k}'_1) R_M^\dagger(\tilde{k}_1) | 1/2, \lambda \rangle \\
&= N^{-1}(\hat{k}') N^{-1}(\tilde{k}) \langle 1/2, \lambda' | A + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B} | 1/2, \lambda \rangle,
\end{aligned} \tag{33}$$

con

$$A = (m + x' \tilde{M}_0)(m + x \tilde{M}_0) + \hat{k}'_y \tilde{k}_y + \hat{k}'_x \tilde{k}_x, \tag{34}$$

$$B_x = -(m + x' \tilde{M}_0) \tilde{k}_y + (m + x \tilde{M}_0) \hat{k}'_y, \tag{35}$$

$$B_y = (m + x' \tilde{M}_0) \tilde{k}_x + (m + x \tilde{M}_0) \hat{k}'_x, \tag{36}$$

$$B_z = \hat{k}'_x \tilde{k}_y - \hat{k}'_y \tilde{k}_x. \tag{37}$$

Sfruttando la relazione (32) appena dimostrata l'equazione (31) può essere riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda_N^t | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle \\
& \times N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \\
& \times \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | A_1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \mu_1 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | -i\sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2 | 1/2, \mu_2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle,
\end{aligned} \tag{38}$$

e dal momento che vale questa proprietà

$$\langle 1/2, \bar{\mu}_1 | A_1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \mu_1 \rangle = \langle 1/2, \mu_1 | A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle, \quad (39)$$

si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda_N^t | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle \\ & \times N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \\ & \times \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \langle 1/2, \mu_1 | A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | -i\sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2 | 1/2, \mu_2 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N \rangle \\ & \times N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \\ & \times \text{Tr} \left\{ (A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1) \sigma_y (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2) \sigma_y \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

A questo punto ricordando le proprietà della “traccia” e delle matrici σ :

$$\text{Tr} \left\{ (A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1) \sigma_y (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2) \sigma_y \right\} = \text{Tr} \left\{ (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2) \sigma_y (A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1) \sigma_y \right\}, \quad (41)$$

$$\sigma_x^* \sigma_y = \sigma_x^* \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x, \quad (42)$$

$$\sigma_y^* \sigma_y = -\sigma_y \sigma_y = -1, \quad (43)$$

$$\sigma_z^* \sigma_y = \sigma_z \sigma_y = -\sigma_y \sigma_z, \quad (44)$$

si ha

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2) \sigma_y (A_1 + i\vec{\sigma}^* \cdot \vec{B}_1) \sigma_y \right\} \\ & = \text{Tr} \left\{ (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2) (A_1 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1) \right\} = 2[A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2]. \end{aligned} \quad (45)$$

L'equazione (40) diventa

$$\begin{aligned} & N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N \rangle [A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2]. \end{aligned} \quad (46)$$

- Calcolo di “ $\sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda_N^t | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle$ ”:

1)

$$\lambda'_N = \lambda_N = +\frac{1}{2}, \quad T_{++} = -T_{--} \quad \Rightarrow \quad T_{++} = \frac{1}{2}[T_{++} - T_{--}] \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \sum_{\lambda_3} \left\{ \langle 1/2, 1/2 | m + x'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_{\perp,3}) | 1/2, \lambda_3 \rangle \right. \\ & \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \\ & - \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}'_{\perp,3}) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \left. \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

utilizzando il risultato in eq.(33), si ha

$$\begin{aligned} & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \left\{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \right. \\ & \times \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\ & + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, 1/2 | -i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\ & + \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\ & - \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\ & \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\ & + (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \\ & \times \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\ & + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, -1/2 | -i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\ & + \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\ & \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\ & - \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\ & \times \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \left. \right\}. \quad (49) \end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned} \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle &= -i\hat{k}'_y \langle 1/2, 1/2 | \sigma_x | 1/2, 1/2 \rangle \\ &= -i\hat{k}'_y \\ \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle &= \dots = i\hat{k}'_y \\ \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle &= i\hat{k}'_x \langle 1/2, 1/2 | \sigma_y | 1/2, -1/2 \rangle \\ &= -\hat{k}'_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, 1/2 \rangle &= \dots = \hat{k}'_x, \\
\text{e} \\
\langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, 1/2 \rangle &= -\hat{k}'_y \\
\langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, -1/2 \rangle &= \hat{k}'_y \\
\langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, -1/2 \rangle &= i\hat{k}'_x \\
\langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, 1/2 \rangle &= -i\hat{k}'_x,
\end{aligned} \tag{50}$$

l'equazione (49) assume la forma

$$\begin{aligned}
\frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \Big\{ & 2(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) - i\tilde{k}_{y,3}(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \\
& + i\hat{k}'_{y,3}(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + \tilde{k}_{y,3}\hat{k}'_{y,3} - \tilde{k}_{x,3}\hat{k}'_{x,3} + i\tilde{k}_{y,3}(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \\
& - i\hat{k}'_{y,3}(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + \tilde{k}_{y,3}\hat{k}'_{y,3} - \tilde{k}_{x,3}\hat{k}'_{x,3} \Big\},
\end{aligned} \tag{51}$$

ovvero, effettuando le opportune semplificazioni

$$N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3) \Big[(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + \tilde{k}_{y,3}\hat{k}'_{y,3} - \tilde{k}_{x,3}\hat{k}'_{x,3} \Big]. \tag{52}$$

Quindi il risultato finale per il contributo di “spin” e “isospin” nel caso $S_{12} = S'_{12} = 0$, $T_{12} = T'_{12} = 0$ risulta:

$$\begin{aligned}
\delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i)N^{-1}(\tilde{k}_i) \Big[& (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \\
& + \tilde{k}_{y,3}\hat{k}'_{y,3} - \tilde{k}_{x,3}\hat{k}'_{x,3} \Big] [A_1 A_2 + \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2]
\end{aligned} \tag{53}$$

2)

$$\lambda'_N = +\frac{1}{2} \quad \lambda_N = -\frac{1}{2}, \quad T_{+-} = T_{-+} \quad \Rightarrow \quad T_{+-} = \frac{1}{2} [T_{+-} + T_{-+}] \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \sum_{\lambda_3} \Big\{ \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp, \mathbf{3}}) | 1/2, -1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \} \\
= & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \} \\
= & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(-\tilde{k}_{x,3}) + (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(-\hat{k}'_{x,3}) - i\hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{x,3} \\
& - i\hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{y,3} - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(\tilde{k}_{x,3}) - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(\hat{k}'_{x,3}) + i\hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{y,3} + i\hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{x,3} \} \\
= & N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3) \left[-\tilde{k}_{x,3}(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) - \hat{k}'_{x,3}(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \right]. \tag{55}
\end{aligned}$$

Quindi il risultato finale per il contributo di “spin” e “isospin” nel caso $\lambda_N = -\lambda'_N$, $S_{12} = S'_{12} = 0$ risulta:

$$\begin{aligned}
& \delta_{\tau_q, -\frac{1}{2}} \delta_{T_{12}, 0} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left[-\tilde{k}_{x,3}(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) - \hat{k}'_{x,3}(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \right] \\
& \times [A_1 A_2 + \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2]. \tag{56}
\end{aligned}$$

b) $S_{12} = S'_{12} = 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{M_{s_{12}}} \langle 1/2, \lambda_1; 1/2, \lambda_2 | 1, M_{s_{12}} \rangle \langle 1, M_{s_{12}}; 1/2 \lambda_3 | 1/2, \lambda_N \rangle \\
= & \left(\text{per } \lambda_N = \frac{1}{2} \right) \langle 1/2, \lambda_1; 1/2, \lambda_2 | 1, 0 \rangle \langle 1, 0; 1/2 \lambda_3 | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, \lambda_1; 1/2, \lambda_2 | 1, 1 \rangle \langle 1, 1; 1/2 \lambda_3 | 1/2, 1/2 \rangle \\
= & \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, \frac{1}{2}} \left(-\sqrt{1/6} \right) + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \left(1/2 + \lambda_1 \right) \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \sqrt{2/3}, \tag{57} \\
& \sum_{M_{s_{12}}} \langle 1/2, \lambda_1; 1/2, \lambda_2 | 1, M_{s_{12}} \rangle \langle 1, M_{s_{12}}; 1/2 \lambda_3 | 1/2, \lambda_N \rangle \\
= & \sqrt{1/6} \sum_j \langle 1/2, \lambda_1 | i\sigma_j \sigma_y | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1/6} \left\{ \langle 1/2, \lambda_1 | i\sigma_x \sigma_y | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | \sigma_x | 1/2, 1/2 \rangle \right. \\
&\quad + \langle 1/2, \lambda_1 | i\sigma_y \sigma_y | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | \sigma_z | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad \left. + \langle 1/2, \lambda_1 | i\sigma_z \sigma_y | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | \sigma_z | 1/2, 1/2 \rangle \right\} \\
&= \sqrt{1/6} \left\{ \langle 1/2, \lambda_1 | -\sigma_z | 1/2, \lambda_2 \rangle \delta_{\lambda_3, \frac{1}{2}} + i\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} (-i) \right. \\
&\quad \left. + \langle 1/2, \lambda_1 | \sigma_x | 1/2, \lambda_2 \rangle \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \right\} \\
&= \sqrt{1/6} \left\{ -\delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\lambda_3, 1/2} + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, -1/2} + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, -1/2} \text{sign}(\lambda_1) \right\} \\
&= \sqrt{1/6} \left\{ -\delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\lambda_3, 1/2} + 2\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, -1/2} (\lambda_1 + 1/2) \right\}, \tag{58}
\end{aligned}$$

per ottenere la quale sono state sfruttate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\sigma_z |1/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2\rangle; \\
\sigma_z |1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2, 1/2\rangle; \\
\sigma_y |1/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} = -i|1/2, -1/2\rangle; \\
\sigma_y |1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = i|1/2, -1/2\rangle.
\end{aligned} \tag{59}$$

Quindi l'analogia di equazione (24) in questo caso diventa

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \\
&\times \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} D_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{1/2\dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1) \right) D_{\lambda_2 \bar{\mu}_2}^{1/2\dagger} \left(R_M(\hat{k}'_2) \right) D_{\lambda_3 \bar{\mu}_3}^{1/2\dagger} \left(R_M(\hat{k}'_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda'_N}^1(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \right\}^* \\
&\times \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} D_{\lambda_1 \mu_1}^{1/2\dagger} \left(R_M(\tilde{k}_1) \right) D_{\lambda_2 \mu_2}^{1/2\dagger} \left(R_M(\tilde{k}_2) \right) D_{\lambda_3 \mu_3}^{1/2\dagger} \left(R_M(\tilde{k}_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda_N}^1(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} \sum_{j'} \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\hat{k}'_1) | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^\dagger(\hat{k}'_2) | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \right. \\
&\quad \times \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\hat{k}'_3) | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | i\sigma_{j'} \sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | \sigma_{j'} | 1/2, \lambda'_N \rangle \left. \right\}^* \\
&\left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sum_j \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\tilde{k}_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^\dagger(\tilde{k}_2) | 1/2, \mu_2 \rangle \right.
\end{aligned}$$

$$\times \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \mu_3 \rangle \langle 1/2, \mu_1 | i\sigma_j \sigma_y | 1/2, \mu_2 \rangle \langle 1/2, \mu_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle \Big\}. \quad (60)$$

Utilizzando la proprietà, qui di seguito riportata,

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\hat{k}'_1) | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^\dagger(\hat{k}'_2) | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\hat{k}'_3) | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \right. \\ & \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | i\sigma_{j'} \sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | \sigma_{j'} | 1/2, \lambda'_N \rangle \Big\}^* \\ = & \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) | 1/2, \lambda_1 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | R_M(\hat{k}'_2) | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | -i\sigma_y \sigma_{j'} | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle \langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_{j'} | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle, \end{aligned} \quad (61)$$

l'equazione (60) diventa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left\{ \sum_{\lambda_1} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) | 1/2, \lambda_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\hat{k}'_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{\lambda_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | R_M(\hat{k}'_2) | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^\dagger(\hat{k}'_2) | 1/2, \mu_2 \rangle \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, \lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\hat{k}'_3) | 1/2, \mu_3 \rangle \right\} \\ & \times \sum_{jj'} \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | -i\sigma_y \sigma_{j'} | 1/2, \bar{\mu}_1 \rangle \langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_{j'} | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \mu_1 | i\sigma_j \sigma_y | 1/2, \mu_2 \rangle \times \langle 1/2, \mu_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle \\ = & \frac{1}{6} N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) N^{-1}(\hat{k}'_3) N^{-1}(\tilde{k}_3) \\ & \times \sum_{jj'} \left\{ \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | A_1 + i\vec{B}_1 \cdot \vec{\sigma} | 1/2, \mu_1 \rangle \langle 1/2, \mu_1 | i\sigma_j \sigma_y | 1/2, \mu_2 \rangle \right. \\ & \times \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | A_2 + i\vec{B}_2 \cdot \vec{\sigma} | 1/2, \mu_2 \rangle \langle 1/2, \mu_1 | -i\sigma_y \sigma_j | 1/2, \mu_2 \rangle \Big\} \\ & \times \sum_{\mu_3} \sum_{\bar{\mu}_3} \langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_{j'} | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | A_3 + i\vec{B}_3 \cdot \vec{\sigma} | 1/2, \mu_3 \rangle \langle 1/2, \mu_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

Ricordando l'equazione (39), l'equazione (62) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \sum_{jj'} \text{Tr} \left\{ (A_1 + i\vec{B}_1 \cdot \sigma) \sigma_j \sigma_y (A_2 + i\vec{B}_2 \cdot \sigma^*) \sigma_y \sigma_{j'} \right\} \\ & \times \langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_{j'} (A_3 + i\vec{B}_3 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle. \end{aligned} \quad (63)$$

Calcolo della “traccia”:

$$\vec{\sigma}^* = -\sigma_y \vec{\sigma} \sigma_y, \quad \text{con } \sigma^2 = 1, \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ (A_1 + i\vec{B}_1 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_j (A_2 - i\vec{B}_2 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_{j'} \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ A_1 A_2 \sigma_j \sigma_{j'} - iA_1 \sigma_j (\vec{B}_2 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_{j'} + iA_2 (\vec{B}_1 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_j \sigma_{j'} - (\vec{B}_1 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_j (\vec{B}_2 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_{j'} \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ A_1 A_2 \delta_{jj'} - iA_1 \vec{B}_{2,k} \sigma_j (\delta_{kj'} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_{j'})) + iA_2 \vec{B}_{1,k} \sigma_k (\delta_{jj'} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_{j'})) \right. \\
&\quad \left. + B_{1,k} B_{2,i} (\delta_{kj} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_j)) (\delta_{ij'} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_{j'})) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ A_1 A_2 \delta_{jj'} + A_1 \sigma_j [\vec{\sigma} \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'})] - A_2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1) [\vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_{j'})] \right. \\
&\quad \left. + B_{1,j} B_{2,j'} - [\vec{\sigma} \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{e}_j)] \cdot [\vec{\sigma} \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'})] \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ A_1 A_2 \delta_{jj'} + B_{1,j} B_{2,j'} + A_1 \vec{e}_j \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'}) \right. \\
&\quad \left. - A_2 \vec{B}_1 \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_{j'}) - (\vec{B}_1 \times \vec{e}_j) \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'}) \right\}.
\end{aligned} \quad (65)$$

Siccome

$$\begin{aligned}
\vec{e}_j \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'}) &= \vec{B}_2 \cdot (\vec{e}_{j'} \times \vec{e}_j) = -\vec{B}_2 \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_{j'}), \\
\vec{B} \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_{j'}) &= B_k \epsilon_{jj'k}, \\
(\vec{B}_1 \times \vec{e}_j) \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{e}_{j'}) &= \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \delta_{jj'} - B_{1,j'} B_{2,j},
\end{aligned} \quad (66)$$

l'equazione (65) diviene

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ [A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2] \delta_{jj'} + B_{1,j} B_{2,j'} + B_{1,j'} B_{2,j} + [A_1 \vec{B}_2 + A_2 \vec{B}_1] \cdot (\vec{e}_{j'} \times \vec{e}_j) \right\} \\
&= 2 \left\{ [A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2] \delta_{jj'} + B_{1,j} B_{2,j'} + B_{1,j'} B_{2,j} + [A_1 \vec{B}_2 + A_2 \vec{B}_1] \cdot (\vec{e}_{j'} \times \vec{e}_j) \right\},
\end{aligned} \quad (67)$$

sostituendo questo risultato in eq. (63) si ottiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \sum_{jj'} \left\{ [A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2] \delta_{jj'} + B_{1,j} B_{2,j'} + B_{1,j'} B_{2,j} \right. \\
& \left. + [A_1 \vec{B}_2 + A_2 \vec{B}_1] \cdot (\vec{e}_{j'} \times \vec{e}_j) \right\} \langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_{j'} (A_3 + i\vec{B}_3 \cdot \vec{\sigma}) \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle,
\end{aligned} \quad (68)$$

ovvero

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \sum_j \sum_{j'} \left\{ \left[A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \right] \delta_{jj'} + B_{1,j} B_{2,j'} \right. \\
& + B_{1,j'} B_{2,j} + \sum_k \left[A_1 B_{2,k} + A_2 B_{1,k} \right] \epsilon_{ijk} \left. \right\} \left\{ \sum_{\lambda_3} \left[\langle 1/2, \lambda'_N | \sigma_j | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \right. \right. \\
& \times \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\sigma \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, \lambda_3 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\sigma \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, \mu_3 \rangle \langle 1/2, \mu_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N \rangle \text{sign}(\lambda_3) \left. \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{69}$$

1)

$$\lambda'_N = \lambda_N = +\frac{1}{2}, \quad T_{++} = -T_{--} \quad \Rightarrow \quad T_{++} = \frac{1}{2} [T_{++} - T_{--}] \tag{70}$$

Sviluppando le somme su j e j' nei vari termini x, y e z e ricordando l'azione delle matrici di Pauli ricavata in equazione (50) il contributo per T_{++} risulta essere dato da:

$$\begin{aligned}
X_{++}^{11} = & \frac{1}{3} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left\{ - \left[A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - 4B_{1x} B_{2x} \right] A_3 \right. \\
& + 2 \left[A_1 B_{2x} + A_2 B_{1x} \right] B_{3x} + 2 \left[B_{1x} B_{2z} + B_{1z} B_{2x} \right] B_{3y} \\
& \left. + 2 \left[B_{1x} B_{2y} + B_{1y} B_{2x} \right] B_{3z} \right\},
\end{aligned} \tag{71}$$

dove

- $A_3 = (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) + \hat{k}'_{y,3} \tilde{k}_{y,3} - \hat{k}'_{x,3} \tilde{k}_{x,3};$
- $B_{x,3} = (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{y,3} - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{3y};$
- $B_{y,3} = - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{x,3} - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{x,3};$
- $B_{3z} = -\hat{k}'_{x,3} \tilde{k}_{y,3} - \hat{k}'_{y,3} \tilde{k}_{x,3}.$

2)

$$\lambda'_N = +\frac{1}{2} \quad \lambda_N = -\frac{1}{2}, \quad T_{+-} = T_{-+} \quad \Rightarrow \quad T_{+-} = \frac{1}{2} [T_{+-} + T_{-+}] \tag{72}$$

Il contributo per T_{+-} risulta essere dato da:

$$\begin{aligned}
X_{+-}^{11} = & \frac{1}{3} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left\{ \left[(A_1 A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) + 2\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - 4B_{1z} B_{2z} \right] \right. \\
& \times \left[(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{x,3} + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{x,3} \right] + \left[A_1 B_{2z} + A_2 B_{1z} \right] \\
& \times \left[2(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{y,3} - 2(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{y,3} \right] \\
& + \left[B_{1x} B_{2z} + B_{1z} B_{2x} \right] \\
& \times \left[2(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0)(m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) - 2\hat{k}'_{x,3} \tilde{k}_{x,3} + 2\hat{k}'_{y,3} \tilde{k}_{y,3} \right] \\
& + \left[B_{1y} B_{2z} + B_{1z} B_{2y} \right] \left[-2\hat{k}'_{x,3} \tilde{k}_{y,3} - 2\hat{k}'_{y,3} \tilde{k}_{x,3} \right] \left. \right\}, \tag{73}
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
X_{+-}^{11} = & \frac{1}{3} \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \left\{ - \left[A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - 4B_{1z} B_{2z} \right] B_{3y} \right. \\
& + 2 \left[A_1 B_{2z} + A_2 B_{1z} \right] B_{3x} + 2 \left[B_{1x} B_{2z} + B_{1z} B_{2x} \right] A_3 \\
& + 2 \left[B_{1y} B_{2z} + B_{1z} B_{2y} \right] B_{3z} \left. \right\}. \tag{74}
\end{aligned}$$

Somma sulle variabili di spin nel caso polarizzato

Nel calcolo di $\tilde{T}_{\lambda'_N \lambda_N}$ le matrici di rotazioni coinvolte sono

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \left\{ \sum_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} D_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1) \right) D_{\lambda_2 \bar{\mu}_2}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_2) \right) D_{-\lambda_3 \bar{\mu}_3}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda'_N}^{S_{12}}(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \right\}^* \\
\times \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} D_{\lambda_1 \mu_1}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_1) \right) D_{\lambda_2 \mu_2}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_2) \right) D_{\lambda_3 \mu_3}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\tilde{k}_3) \right) \tilde{\Phi}_{\lambda_N}^{S_{12}}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \tag{75}
\end{aligned}$$

dove $S_{12} = 0, 1$. L'unica differenza rispetto a prima è che cambia il segno di λ_3 nella matrice di rotazione in parentesi graffa.

Dalla definizione delle matrici di rotazione $D_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{1/2 \dagger} \left(R_M(\hat{k}'_1) \right)$ (4.56) e della funzione $\tilde{\Phi}_{\lambda'_N}^{S_{12}}$ (4.57), per

a) $S_{12} = S'_{12} = 0$; l'equazione (75) diviene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \left[\sum_{\lambda_1} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | R_M(\hat{k}'_1) | 1/2, \lambda_1 \rangle \langle 1/2, \lambda_1 | R_M^\dagger(\tilde{k}_1) | 1/2, \mu_1 \rangle \right] \\ & \quad \times \left[\sum_{\lambda_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | R_M(\hat{k}'_2) | 1/2, \lambda_2 \rangle \langle 1/2, \lambda_2 | R_M^\dagger(\tilde{k}_2) | 1/2, \mu_2 \rangle \right. \\ & \quad \left. \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | -i\sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle \right] \\ & \times \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, -\lambda_N \rangle. \end{aligned} \quad (76)$$

Usando, ora, i risultati [(32) ÷ (37)] si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle \\ & \times N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \sum_{\bar{\mu}_1} \sum_{\bar{\mu}_2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | A_1 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_1 | 1/2, \mu_1 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \bar{\mu}_1 | -i\sigma_y | 1/2, \bar{\mu}_2 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_2 | A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_2 | 1/2, \mu_2 \rangle \langle 1/2, \mu_2 | i\sigma_y | 1/2, \mu_1 \rangle. \end{aligned} \quad (77)$$

La quale, ricordando le equazioni dalla (39) alla (45), assume la forma

$$\begin{aligned} & N^{-1}(\hat{k}'_1) N^{-1}(\tilde{k}_1) N^{-1}(\hat{k}'_2) N^{-1}(\tilde{k}_2) \sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \\ & \times \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle [A_1 A_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2]. \end{aligned} \quad (78)$$

• Calcolo di “ $\sum_{\lambda_3} \text{sign}(\lambda_3) \langle 1/2, \lambda'_N | R_M(\hat{k}'_3) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \langle 1/2, \lambda_3 | R_M^\dagger(\tilde{k}_3) | 1/2, \lambda_N^t \rangle$ ”:

1)

$$\lambda'_N = \lambda_N = +\frac{1}{2}, \quad \tilde{T}_{++} = \tilde{T}_{--} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_{++} = \frac{1}{2} [\tilde{T}_{++} + \tilde{T}_{--}] \quad (79)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3) N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \sum_{\lambda_3} \left\{ \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \right. \\ & \quad \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \\ & \quad + \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \\ & \quad \left. \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \right\} \\ & = \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3) N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \left\{ \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \langle 1/2, 1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, 1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, -1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, -1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \Big\} \\
= & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \Big\{ - (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \Big\} \\
= & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \Big\{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \Big[\langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big] \\
& + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \Big[- \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big] \\
& + \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big\}
\end{aligned}$$

$$-\langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \Big\}. \quad (80)$$

A questo punto sostituendo le relazioni ottenute in equazione (50), l'espressione (80) diviene:

$$\begin{aligned} \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} & \left\{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \left[-2\tilde{k}_{x,3} \right] + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \left[2\hat{k}'_{x,3} \right] \right. \\ & \left. + i\hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{x,3} - i\hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{y,3} - i\hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{x,3} + i\hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{y,3} \right\}, \end{aligned} \quad (81)$$

cioè

$$N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3) \left\{ (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{x,3} - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{x,3} \right\}. \quad (82)$$

Quindi il risultato finale per il contributo di “spin” \tilde{T}_{++} nel caso $S_{12} = S'_{12} = 0$ risulta essere:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{++}^{00} &= \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i)N^{-1}(\tilde{k}_i) \left\{ (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \hat{k}'_{x,3} - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \tilde{k}_{x,3} \right\} \\ &\times [A_1 A_2 + \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2]. \end{aligned} \quad (83)$$

2)

$$\lambda'_N = +\frac{1}{2} \quad \lambda_N = -\frac{1}{2}, \quad \tilde{T}_{+-} = -\tilde{T}_{-+} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_{+-} = \frac{1}{2} [\tilde{T}_{+-} - \tilde{T}_{-+}] \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \sum_{\lambda_3} \left\{ \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \right. \\ & \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \\ & - \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \\ & \left. \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \text{sign}(\lambda_3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \left\{ \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \right. \\
&\quad \times \langle 1/2, 1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad - \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, 1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{k}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad - \langle 1/2, 1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, -1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad + \langle 1/2, -1/2 | m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0 - i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, -1/2 | m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0 + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big\} \\
&= \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(k_3)}{2} \left\{ - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \right. \\
&\quad + \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad - \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \\
&\quad - (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad - \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
&\quad + \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
&\quad \times \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big\} \\
&= \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \left\{ (m + \hat{x}'_3 \hat{M}'_0) \left[- \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \right] \right. \\
&\quad \left. + (m + \tilde{x}_3 \tilde{M}_0) \left[\langle 1/2, -1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle 1/2, 1/2 | i\vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big] \\
& + \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \\
& - \langle 1/2, 1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, -1/2 \rangle \\
& + \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \langle 1/2, -1/2 | \vec{\sigma} \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{\perp,3}) | 1/2, 1/2 \rangle \Big\}.
\end{aligned} \tag{85}$$

Ora utilizzando le relazioni (50) si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3)}{2} \left\{ -2(m + \hat{x}'_3\hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3\tilde{M}_0) + (m + \hat{x}'_3\hat{M}'_0) \left[i\tilde{k}_{y,3} - i\tilde{k}_{y,3} \right] \right. \\
& \quad \left. + (m + \tilde{x}_3\tilde{M}_0) \left[i\hat{k}'_{y,3} - i\hat{k}'_{y,3} \right] - \hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{x,3} - \hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{x,3} + \hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{y,3} + \hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{y,3} \right\} \\
& = N^{-1}(\hat{k}'_3)N^{-1}(\tilde{k}_3) \left\{ (m + \hat{x}'_3\hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3\tilde{M}_0) + \hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{y,3} - \hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{x,3} \right\}.
\end{aligned} \tag{86}$$

Quindi il risultato finale per il contributo di “spin” \tilde{T}_{+-} in questo caso risulta essere:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{+-}^{00} &= \prod_i N^{-1}(\hat{k}'_i)N^{-1}(\tilde{k}_i) \left\{ - (m + \hat{x}'_3\hat{M}'_0)(m + \tilde{x}_3\tilde{M}_0) + \hat{k}'_{y,3}\tilde{k}_{y,3} - \hat{k}'_{x,3}\tilde{k}_{x,3} \right\} \\
&\quad \times [A_1A_2 + \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2].
\end{aligned} \tag{87}$$

Il caso in cui $S_{12} = S'_{12} = 1$ può svolto essere in modo totalmente analogo ai casi, precedentemente visti, basta tenere conto del fatto che ora l'equazione di partenza è data da

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \prod N^{-1}(\hat{k}'_i)N^{-1}(\tilde{k}_i) \sum_{j,j'} \text{Tr} \left\{ (A_1 + i\vec{\sigma} \cdot \bar{B}_1) \sigma_j \sigma_{j'} (A_2 + i\vec{\sigma} \cdot \bar{B}_2) \sigma_{j'} \sigma_j \right\} \\
& \times \sum_{\mu_3} \sum_{\bar{\mu}_3} \sum_{\lambda_3} \langle 1/2, \lambda_N^t | \sigma'_j | 1/2, \bar{\mu}_3 \rangle \langle 1/2, \bar{\mu}_3 | m + \hat{x}'_3\hat{M}'_0 - i\sigma \cdot (\hat{z} \times \hat{\mathbf{k}}'_{3,\perp}) | 1/2, -\lambda_3 \rangle \\
& \times \langle 1/2, \lambda_3 | m + \tilde{x}_3\tilde{M}_0 - i\sigma \cdot (\hat{z} \times \tilde{\mathbf{k}}_{3,\perp}) | 1/2, \mu_3 \rangle \langle 1/2, \mu_3 | \sigma_j | 1/2, \lambda_N^t \rangle.
\end{aligned} \tag{88}$$

Ripercorrendo quindi, i passi effettuati nel calcolo dei contributi precedenti, per \tilde{T}_{++}^q si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{++}^{11} &= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \\ &\times \left[(3A_1A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) \tilde{A}_3 \right. \\ &\quad + 2(A_1B_{2,x} + A_2B_{1,x}) \tilde{B}_{3,x} \\ &\quad + 2(A_1B_{2,y} + A_2B_{1,y}) \tilde{B}_{3,y} \\ &\quad \left. + 2(A_1B_{2,z} + A_2B_{1,z}) \tilde{B}_{3,z} \right],\end{aligned}\quad (89)$$

dove

$$\tilde{A}_3 = \hat{k}'_{3,x}(m + \tilde{x}_3M_0) - \tilde{k}_{3,x}(m + \hat{x}'_3M'_0), \quad (90)$$

$$\tilde{B}_{3,x} = -\hat{k}'_{3,x}\tilde{k}_{3,y} - \hat{k}'_{3,y}\tilde{k}_{3,x}, \quad (91)$$

$$\tilde{B}_{3,y} = (m + \hat{x}'_3M'_0)(m + \tilde{x}_3x_0) - \hat{k}'_{3,y}\tilde{k}_{3,y} + \hat{k}'_{3,x}\tilde{k}_{3,x}, \quad (92)$$

$$\tilde{B}_{3,z} = -(m + \hat{x}'_3M'_0)\tilde{k}_{3,y} - (m + \tilde{x}_3M_0)\hat{k}'_{3,y}. \quad (93)$$

Mentre per il caso di \tilde{T}_{-+}^q si ha

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{+-}^{11} &= \prod_{i=1}^3 N^{-1}(\hat{k}'_i) N^{-1}(\tilde{k}_i) \\ &\times \left[(-A_1A_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 + 4B_{1,y}B_{2,y}) \tilde{B}_{3,y} \right. \\ &\quad + 2(B_{1,x}B_{2,y} + B_{2,x}B_{1,y}) \tilde{B}_{3,x} \\ &\quad + 2(A_1B_{2,y} + A_2B_{1,y}) \tilde{A}_3 \\ &\quad \left. + 2(B_{1,y}B_{2,z} + B_{1,z}B_{2,y}) \tilde{B}_{3,z} \right].\end{aligned}\quad (94)$$

$$(95)$$

Bibliografia

- [1] H. Yukawa, Prog. Phys. Math. Soc. of Japan, **17**, 48 (1935)
- [2] M.L. Gell-Mann (1961) (non pubblicato); Phys. Rev. **125**, 1067 (1962); Phys. Lett. **8**, 214 (1964)
- [3] Y. Ne'eman, Nucl. Phys **26**, 222 (1961)
- [4] M.L. Gell-Mann, Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*. Reading: Benjamin (1964)
- [5] C. Zweig, CERN Rep. 8419/TH 412
- [6] J.D. Bjorken, Phys. Rev. **179**, 1547 (1969)
- [7] R.P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969)
- [8] G. 't Hooft, Nucl. Phys **B33**, 173 (1971); Nucl. Phys **B35**, 167 (1967)
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967)
- [10] A. Salam, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svaratholm, Stockholm: Almqvist and Forlag (1968)
- [11] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. **D8**, 3497 (1973)
- [12] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **26**, 1346 (1973)
- [13] C.G. Callan, D. Gross, Phys. Rev. Lett. **22**, 156 (1969)
- [14] D. Gross, C.H. Llewellyn Smith, Nucl. Phys. **B14**, 337 (1969)
- [15] Mishra *et al.*, *Proc. of SLAC Summer Institute*, p.407 (SLAC, Stanford, 1991)
- [16] NMC coll., Phys. Rev. Lett. **66**, 2712 (1991)
- [17] S.D. Drell, Yan, Phys. Rev. Lett. **25**, 316 (1970)

- [18] S.B. Gerasimov, Sov. J. Nucl. Phys. **2**, 430 (1966)
- [19] S.D. Drell, A.C. Hearn, Phys. Rev. Lett. **16**, 908 (1966)
- [20] M. Hosoda, K. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. Lett. **36**, 425 (1966)
- [21] C.G. Callan, Phys. Rev. **D2**, 1541 (1970)
- [22] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. **18**, 227 (1970)
- [23] G. Altarelli, G. Parisi, Nucl. Phys. **B 126**, 298 (1977)
- [24] J.C. Collins, D.E. Soper, G. Sterman, in: *Perturbative Quantum Chromodynamics*, ed. A.H. Mueller (World Scientific, Singapore 1989)
- [25] K.G. Wilson, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969)
- [26] S.J. Brodsky, G.P. Lepage, “Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics”, in: *Perturbative Quantum Chromodynamics*, ed. A.H. Mueller (World Scientific, Singapore 1989)
- [27] V. Barone, A. Drago, P.G. Ratcliffe, “Transverse polarisation of quark in hadrons”, Phys. Rep. **359**, 1-168 (2002)
- [28] R.L. Jaffe, X. Ji, Phys. Rev. Lett. **67**, 552 (1991)
- [29] X. Ji, “Gauge-invariant decomposition of nucleon spin and its spin off”, Phys. Rev. Lett. **78**, 610 (1997)
- [30] J.C. Collins, Nucl. Phys. **B 396**, 161 (1993)
- [31] X. Artru, in Int. Workshop on High Energy Spin Physics, Protvino, Russia, Sep 20-24, 1993 [hep-ph/9310323]
- [32] M. Diehl, “Generalized parton distributions”, Phys. Rep. **388**, 41-277 (2003)
- [33] M. Diehl, Th. Feldmann, R. Jakob, P. Kroll, “The overlap representation of skewed quark and gluon distribution”
- [34] X. Ji, “Off-forward parton distributions”, J. Phys. G **24**, 1181 (1998)
- [35] M. Diehl, “Generalized parton distributions with helicity flip”, Eur. Phys. J. C **19**, 485-492 (2001)
- [36] A.V. Radyushkin, “Generalized parton distributions”, Phys. Rev. **D 56**, 5524 (1997)

- [37] A. Harindranath, “An Introduction to Light-Front Dynamics for Pedestrians”, in: *Light Front Quantization and Non-Perturbative QCD*, eds. J.P. Vary and F. Wölz; hep-ph [9612244]
- [38] B. Bakamjian, L.H. Thomas, Phys. Rev. **92**, 1300 (1952)
- [39] B.D. Keister, W.N. Polyzou, Adv. Nucl. Phys. **20**, 225 (1991)
- [40] S. Boffi, B. Pasquini, M. Traini, “Linking generalized parton distributions to constituent quark models”, Nucl. Phys. **B 649**, 243 (2003)
- [41] S. Boffi, B. Pasquini, M. Traini, “Helicity-dependent generalized parton distributions in constituent quark models”, Nucl. Phys. **B 680**, 147 (2004)
- [42] M. Ferraris, M.M. Giannini, M. Pizzo, E. Santopinto, L. Tiator, Phys. Lett. **B 364**, 231 (1995)
- [43] P. Faccioli, M. Traini, V. Vento, Nucl. Phys. **A 656**, 400 (1999)

Testi di Riferimento

1. Mandl F., and Shaw, G., *Quantum Field Theory*. New York: Wiley 1984
2. Ryder L.H., *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press 1985
3. Kaku M., *Quantum Field Theory: a modern introduction*. Oxford: Oxford University Press 1993
4. Muta T., *Foundations of Quantum Chromodynamics*. Singapore: World Scientific 1987
5. Close F., *An Introduction to Quarks and Partons*. Academic Press 1980
6. Jaffe R.L., *International School on Spin Structure of Nucleon*. hep-ph/9602236
7. Radici M., *Note per il Corso di Fisica Adronica*.
<http://www.pv.infn.it/~radici>
8. Conta C., *Introduction to Modern Particle Physics: note per il corso di Fisica delle Particelle elementari*. Dip. Fisica Nucleare e Teorica - Università di Pavia