



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

**DEPARTAMENTO DE FISICA**

# **Aspectos de la teoría cuántica de campos noconmutativa en espacios curvos**

**Tesis que presenta**

**Carlos Arturo Soto Campos**

para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Héctor Hugo García Compeán**

México, Distrito Federal

Noviembre, 2006

*A mis Padres*  
*A mis Hermanas y Hermanos.*

# Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. Héctor Hugo García Compeán. Además de su inmejorable asesoría, y apoyo profesional, debo agradecer la amistad con la que me ha distinguido. Quiero recalcar la constante motivación de la que hemos disfrutado muchos de sus colaboradores a través de sus cursos y charlas en los que nos ha enseñado a no conformarnos sino hasta obtener lo mejor de uno mismo. Agradezco al jefe del departamento Dr. Gerardo Herrera Corral por su importante apoyo. Asimismo al Coordinador del departamento de Física, Dr. Gabriel López Castro por su invaluable apoyo y asesoría. Este trabajo ha sido desarrollado gracias al soporte académico brindado por la Coordinación a su cargo.

Quiero también agradecer a un gran número de profesores y amigos del departamento de Física. Trataré de no omitir a ninguno y les pido disculpas a aquéllos que olvide mencionar: Martín Hernández, Sergio Tomás, Mauricio Carbajal, José Méndez, Miguel Rocha, David Fernández, Nora Bretón, Vladimir Manko, Alberto García Díaz, Tonatiuh Matos, Abdel Pérez, Orlando Zelaya, Omar Miranda, Daniel Olguín, Carlos Arteaga, Rodrigo Pelayo, Julio César, Sendic Estrada (por su gentileza en revisar y discutir el capítulo 3 de esta tesis), Pavel, Alfredo, Francisco Turrubiates, Jorge Rosas, Jorge Téllez, Imelda, Xavier, Cuauhtémoc, Karla, Sara, Luz, Rocío, Malú, Paty Pliego, Julieta, Flor, Paty Villar, Isa, Bety, Charo, Esther, Diana, a Elvia, Claudia y todas las compañeras del Departamento de Servicios escolares —así como a los directivos del mismo—, Vladimir Cuesta, Edgar, Idrish, Alejandro García, Alejandro Gallardo, Pablo Rodríguez, Nicolás, Juan Carlos, Aldo, Pablo Paniagua, Luis (“Compa”), Roberto, Wilberth, Christian Garay (por su asesoría en LaTeX), Ricardo Pérez (por el soporte técnico), así como a toda la comunidad del Civestav, la cual contribuyó de una forma u otra, a la realización de este trabajo.

Quiero también expresar mi agradecimiento al Dr. David A. Leahy de la universidad de Calgary (Alberta, Canadá) por proporcionarme amablemente copia de algunas partes de su tesis de doctorado. A Salvador Cubeiro y Gloria Arreola: Gracias! Y a Nadia, por su enorme paciencia y comprensión...y por sus frecuentes cuestionamientos sobre el valor de mis ideas.

Finalmente deseo hacer patente mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme el apoyo de las becas de Maestría y Doctorado número **60582**. La presente Tesis fue escrita gracias a ese apoyo.



# Contenido

0.1	Resumen . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Breve revisión de la teoría de Anomalías . . . . .	3
1.2	Elementos de la teoría de campos noconmutativa . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Anomalías gravitacionales en la teoría noconmutativa</b>	<b>19</b>
2.0.1	Preliminares de Anomalías gravitacionales noconmutativas: Aspectos globales . . . . .	22
2.1	El acoplamiento noconmutativo de Gravedad y Fermiones quirales . .	24
2.2	Acoplamiento de Gravedad a Fermiones quirales . . . . .	25
2.2.1	Anomalía gravitacional de Delbourgo-Salam noconmutativa .	26
2.3	Anomalía gravitacional pura noconmutativa en $D = 2$ . . . . .	30
2.3.1	Cálculo explícito en dos dimensiones . . . . .	30
2.4	Anomalías gravitacionales noconmutativas en $D = 4k + 2$ . . . . .	35
2.4.1	Preliminares . . . . .	35
2.4.2	Cálculo explícito de la Interacción residual noconmutativa . .	37
2.4.3	Anomalía gravitacional para Campos de spin $\frac{1}{2}$ . . . . .	41
2.4.4	Anomalía gravitacional para Campos de spin $\frac{3}{2}$ . . . . .	42
2.5	Anomalías noconmutativas mezcladas . . . . .	45
2.5.1	Anomalías mezcladas para Campos de spin $\frac{1}{2}$ . . . . .	45
2.5.2	Anomalía mezclada para Campos de spin $\frac{3}{2}$ . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Efectos de la interacción noconmutativa <math>\lambda\Phi_\star^4</math> en la evaporación de un hoyo negro en dos dimensiones.</b>	<b>51</b>
3.0.3	Antecedentes de la radiación de agujeros negros . . . . .	51
3.1	Radiación en un agujero negro bidimensional con interacción $\lambda\Phi^4$ . .	53
3.2	Correcciones noconmutativas al Flujo de radiación . . . . .	58
3.3	Corrección a segundo orden noconmutativa al Hamiltoniano $H_I^\star$ . . .	63
3.4	Construcción de los diagramas de la teoría noconmutativa . . . . .	66
3.5	Cálculo del flujo noconmutativo de partículas . . . . .	69
3.6	Contribución del término de interferencia a la amplitud $\frac{dF^\star}{d\omega}$ . . . . .	74
3.6.1	Diagrama noconmutativo a segundo orden en $\Theta$ . . . . .	75
3.6.2	Comportamiento de las divergencias presentes en el término $\langle\alpha S_1^\dagger S_1^{NC} + S_1^{\dagger NC} S_1 \alpha\rangle$ . . . . .	79
3.6.3	Corrección noconmutativa del diagrama de lazo . . . . .	82
3.6.4	Renormalización de la masa . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>87</b>
4.1	Perspectivas . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Fundamentos geométricos de agujeros negros</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>

## 0.1 Resumen

### Resumen

En este trabajo se examinan las anomalías quirales gravitacionales y de norma en un espacio noconmutativo a través de un cálculo perturbativo explícito de diagramas de Feynman a un lazo en varias dimensiones. El análisis depende de cómo se acopla la gravedad a los campos de materia noconmutativos. El cálculo de Delbourgo-Salam de la contribución de la anomalía axial gravitacional al decaimiento del pión neutro es estudiado en detalle. En este proceso, demostramos que la anomalía quiral de Weyl gravitacional pura en dos dimensiones no recibe correcciones noconmutativas. Se discute la anomalía quiral gravitacional pura en  $4k + 2$  dimensiones con campos de materia representados por fermiones quirales de spin  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$ , y en ambos casos se encuentra una corrección noconmutativa. Las anomalías mixtas son finalmente consideradas para ambos casos.

Por otra parte se estudian los efectos de una interacción —noconmutativa— sobre la emisión de partículas debida a un agujero negro. Se usa un modelo  $\lambda\Phi_\star^4$  de interacción para un campo escalar sin masa en un agujero negro bidimensional. Para la parte conmutativa usual este modelo sufre de divergencias infrarojas. Cuando se introducen las correcciones noconmutativas se aprecia que en éstas predominan las divergencias ultravioleta. No obstante, es posible describir una corrección noconmutativa a la radiación de Hawking. Además se discuten algunos efectos no locales que son consecuencia de la noconmutatividad.



## Abstract

In the present work we examine the chiral gravitational and gauge anomalies in a non commutative space through an explicit perturbative calculation using one-loop Feynman diagrams in various dimensions. The analysis depends on how gravity is coupled to noncommutative matter fields. Delbourgo-Salam calculation of the gravitational axial anomaly contribution to the neutral pion decay is studied in detail. During the process, we show that the pure chiral gravitational Weyl anomaly in two dimensions does not receive noncommutative corrections. We study the pure gravitational chiral anomaly in  $4k + 2$  dimensions with matter fields represented by chiral fermions of spin  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{3}{2}$  and in both cases a noncommutative correction is found. Finally mixed anomalies are considered for both cases.

On the other hand we study the effects of a noncommutative interaction on the particle emission due to a Black Hole. A  $\lambda\Phi_\star^4$  interaction model for a massless scalar field in a two dimensional Black Hole is used. In the standard commutative case this model possesses infrared divergences. When the noncommutative corrections are included we notice that ultraviolet divergences prevail. However, it is possible to describe a noncommutative correction on Hawking's radiation. Besides, some nonlocal effects of the noncommutativity are discussed.

# Capítulo 1

## Introducción

*“De las frases que aquí escribo, sólo una que otra hará algún progreso; las demás son como el ruido de las tijeras del peluquero, que debe mantenerlas en movimiento para hacer con ellas un corte en el momento preciso”. (L. Wittgenstein, “Observaciones”).*

### 1.1 Breve revisión de la teoría de Anomalías

Podemos decir que la base de las teorías de las interacciones fundamentales es el principio de la simetría de gauge. Por otra parte, en términos generales, puede establecerse que una *Anomalía* se defina como la violación de una corriente (a nivel cuántico) que clásicamente es conservada. De manera que una Anomalía señala el rompimiento de una simetría de gauge y, por tanto, arruina la consistencia de una teoría. Evitar las anomalías puede conducir, por un lado, a constricciones muy importantes de las cantidades físicas en cuestión. Pero, por otra parte, las anomalías son muy necesarias para describir ciertos hechos experimentales —como veremos más adelante—. Estas dos facetas contrastantes, son precisamente, lo que hace tan importante el papel de las anomalías en la Física moderna.

En la primera parte de esta tesis estudiaré las anomalías axiales o quirales, las cuales corresponden a una corriente axial de fermiones. La historia de estas anomalías se remonta a un pasado ya bastante largo. El inicio puede marcarse en

1949 con la disertación doctoral de J. Steinberger [1] quien calculó un diagrama de Feynman para un modelo pión-nucleón, con el objeto de describir el decaimiento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Dos años después, J. Schwinger [2] señaló que la conservación de la corriente axial en QED —lo cual constituye una consecuencia inmediata de la simetría axial— queda rota cuando el operador de corriente es *apropiadamente* regularizado. Posteriormente, en los años 60 el “Álgebra de corrientes” de Gell-Man se popularizó y, en este contexto, Sutherland y Veltman probaron un teorema que establecía que el pión neutro no puede decaer en dos fotones! Ante esta evidente contradicción con el experimento, Bell y Jackiw resolvieron el problema usando un modelo  $\sigma$ . La anomalía corrige el resultado del teorema anterior por una cantidad bien definida, la cual resultó estar en excelente acuerdo con el experimento. Por su parte, S. Adler [3] en Princeton llegó a resultados similares. Actualmente la “anomalía ABJ” (Adler-Bell-Jackiw) es un resultado ampliamente conocido. Mediante el cálculo del —actualmente— famoso diagrama triangular llegamos a la ley de conservación rota

$$\partial^\mu j_\mu^5 = A \quad , \quad (1.1)$$

donde  $A$  representa la anomalía ABJ

$$A = \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad . \quad (1.2)$$

Es un hecho en verdad notable que la anomalía se pueda calcular mediante la utilización de diagramas a un lazo, i.e. que no hay correcciones radiativas al cálculo de la misma. Esto constituye —de hecho— el Teorema de Adler-Bardeen [4].

La extensión de los resultados anteriores a campos de gauge no abelianos  $A_\mu = A_\mu^a T^a$  con  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ , nos conduce, por una parte, a la anomalía de singlete

$$\mathcal{A} = \partial^\rho j_\rho^5 = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad , \quad (1.3)$$

y por otra parte, al resultado de la anomalía de Bardeen no abeliana

$$-G^a[A_\mu] = (D_\rho j^\rho)^a = \pm \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} T^a \partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma) \quad , \quad (1.4)$$

donde el signo  $\pm$  establece la diferencia entre quiralidad positiva y/o negativa.

A mediados de los años 70 surgieron las primeras interpretaciones topológicas en la teoría de Anomalías. Varios investigadores, entre ellos Rebbi, Nielsen, y Jackiw [5] descubrieron que la anomalía de singlete está determinada por el Teorema del índice. La razón de esto es que la anomalía puede expresarse en términos de la suma de las eigenfunciones del operador de Dirac, donde únicamente sobreviven los modos cero de una determinada quiralidad

$$\frac{1}{2i} \int dx \mathcal{A}(x) = \int dx \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) = n_+ - n_- = \text{Indice}(D_+) \quad , \quad (1.5)$$

donde la diferencia en la quiralidad de los modos cero representa el índice del operador de Weyl:

$$D_+ = \not{D} P_+ \quad (1.6)$$

De manera que usando el Teorema de Atiyah-Singer [6] es posible expresar el índice en términos de las clases características, en este caso, para  $c_2(P)$ , la segunda clase de Chern [7]

$$\text{Indice}(D_+) = -\frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr} F F \quad . \quad (1.7)$$

Otra línea de investigación importante en el estudio de las anomalías se inició en 1979 cuando K. Fujikawa [8] publicó su trabajo sobre la integral de camino para fermiones cuantizados en un campo de gauge externo:

$$Z[A_\mu] = e^{-W[A_\mu]} = \int d\psi \bar{\psi} e^{-S[A_\mu]} \quad , \quad (1.8)$$

con la acción clásica dada por

$$S = \int dx \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi \quad , \quad (1.9)$$

donde  $\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$ . Podría pensarse, ingenuamente, que ninguna anomalía debiera aparecer dado que bajo una transformación quiral

$$\psi \rightarrow e^{i\beta(x)\gamma_5} \psi \quad , \quad (1.10)$$

y

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\beta(x)\gamma_5} \quad , \quad (1.11)$$

puede verificarse que la acción clásica permanece invariante. Sin embargo, Fujikawa descubrió que la medida de la integral de camino no permanece invariante. En efecto, la medida se transforma como

$$d\psi d\bar{\psi} \rightarrow d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ -2i \int dx \beta(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right] \quad . \quad (1.12)$$

Aquí las  $\phi_n$  son eigenfunciones del operador de Dirac  $\not{D}$  y la anomalía está contenida precisamente en el Jacobiano

$$2 \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad , \quad (1.13)$$

Podemos ver que este procedimiento corresponde a una evaluación *local* del índice. Actualmente sabemos que el método de Fujikawa —que es un enfoque no perturbativo— está relacionado íntimamente al método del “heat kernel” así como a la regularización de la función zeta. No obstante que este enfoque representa una importante línea de investigación, en la presente tesis no será utilizado. El lector interesado puede consultar la referencia [8].

En los años 80 el estudio de las anomalías se robusteció al encontrarse métodos matemáticos más poderosos: cohomología, topología y geometría diferencial. Durante esta década las anomalías empezaron a ser representadas en términos de formas diferenciales. Por ejemplo, las anomalías de singlete y la anomalía no abeliana se pueden reescribir como:

$$\mathcal{A} = d \star j^5 = \frac{1}{4\pi^2} \text{tr} F F = \frac{1}{4\pi^2} d \text{tr} (A \wedge dA + \frac{2}{3} A^3) \quad (1.14)$$

y

$$G^a[A] = -(D \star j)^a = \pm \frac{1}{24\pi^2} \text{tr} T^a \left( d(A \wedge dA + \frac{1}{2} A^3) \right) , \quad (1.15)$$

respectivamente. La ecuación que define la anomalía es la condición de consistencia de Wess-Zumino. A nivel de la formulación BRST, ésta puede ser expresada de manera compacta como

$$sG(v, A) = s \int v^a G^a[A] = 0 , \quad (1.16)$$

donde  $v = v^a T^a$  denota el campo fantasma de Fadeev-Popov y  $s$  es el operador BRST (tal que  $s^2 = 0$ ). De manera general, podemos establecer que toda solución no trivial, representa un anomalía consistente. Obviamente, la solución trivial es

$$G_{triv} = s\tilde{G}[A] . \quad (1.17)$$

Matemáticamente, la condición de Wess-Zumino corresponde a cociclos en cohomologías. Stora y Zumino [9, 10] iniciaron el tratamiento moderno de las anomalías. Fueron ellos quienes encontraron una cadena descendente de ecuaciones en la que, diversos polinomios en  $v$ ,  $A$ , y  $F$  están ligados uno al otro en diferentes dimensiones

$$P(F^n) - dQ_{2n-1}^0 = 0 , \quad (1.18)$$

$$sQ_{2n-1}^0 + dQ_{2n-2}^1 = 0 , \quad (1.19)$$

$$sQ_{2n-2}^1 + dQ_{2n-3}^2 = 0 , \quad (1.20)$$

...

$$sQ_0^{2n-1} = 0 . \quad (1.21)$$

donde  $P(F^n)$  es un polinomio simétrico e invariante de gauge. Por otra parte los términos “cadena”  $Q_{2n-1-k}^k$  pueden ser resueltos en una forma sencilla. En éstos, el

índice inferior denota el grado de la  $p$ -forma, mientras que en índice superior denota la potencia del polinomio en  $v$ . Lo más asombroso de dicha estructura algebraica es que posee una contraparte en física. Por ejemplo, la tercera de las ecuaciones de Stora-Zumino representa una versión local de la condición de consistencia de Wess-Zumino, de manera tal que podemos identificar el término-cadena  $Q_{2n-2}^1$  —que es una estructura puramente algebraica— con la anomalía  $G(v, A)$  en física en  $2n - 2$  dimensiones

$$G(V, A) = N \int_{M_{2n-2}} Q_{2n-2}^1(v, A) \quad . \quad (1.22)$$

La constante  $N$  es una constante de normalización que no es determinada por la cadena. Si elegimos como polinomio invariante a la traza *simetrizada*,  $str F$ , puede verse que recuperamos la anomalía singlete en  $2n$  dimensiones. De modo que ambas anomalías, tanto la de singlete como la no Abelian, aún cuando son diferentes en su naturaleza, están estrechamente relacionadas en diferentes dimensiones.

Un “renacimiento” importante dentro de los métodos topológicos inició con el trabajo de Atiyah y Singer quienes en 1968 publicaron su famoso “Teorema del índice” [6]. El Teorema del índice fué retomado por Álvarez, Singer y Zumino, quienes descubrieron que la anomalía no Abelian está relacionada a un teorema del índice más “refinado”, conocido como teorema de la familia del índice [11].

Por su parte, Álvarez-Gaumé y Ginsparg [12] en ese mismo año, relacionaron la anomalía en  $2n$  dimensiones con un teorema del índice en  $(2n + 2)$  dimensiones. Las 2 dimensiones extra surgen al considerar familias biparamétricas de potenciales de gauge

$$-G(v, A) = 2\pi i \frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!} \int_{S^{2n}} Q_{2n}^1 \quad . \quad (1.23)$$

Y vemos que la anomalía está dada por el término de cadena de Stora-Zumino  $Q_{2n}^1$  con la correcta normalización.

Por otra parte y de manera paralela al desarrollo en teorías de gauge, se dió un rápido desarrollo en teorías de gravedad. La gravitación es una parte funda-

mental en la teoría de campos que no puede olvidarse de ninguna manera. La investigación moderna en las teorías que incorporan la interacción de gravedad con materia inicia con el trabajo de Álvarez-Gaumé y Witten publicado en el año 1983 con el título *Gravitational Anomalies* [13]. Esta línea de investigación culminó con el descubrimiento de Green y Schwarz en 1984 [14] de que las anomalías de gauge y gravitacionales se cancelan mutuamente en una teoría de Yang Mills 10-dimensional acoplada a supergravedad ( $N = 1$ ). Esto sucede si el grupo de gauge es  $S0(32)$  ó  $E_8 \times E_8$ . Dichas cancelaciones se dan en supergravedad ( $D = 10$ ) tipo *IIB* y tipo *I*.

Aquí la gravitación es considerada como una teoría de gauge donde las transformaciones de norma son los difeomorfismos. De manera que ahora tenemos una violación cuántica a la ley clásica de conservación del tensor de energía-momento, i.e. tenemos una anomalía de Einstein

$$\delta_\xi^E W[g_{\mu\nu}] = - \int dx \sqrt{|g|} \xi_\nu \nabla_\mu < T^{\mu\nu} > = G^E(\xi) \quad , \quad (1.24)$$

donde  $\xi$  representa un cambio infinitesimal de coordenadas. En el capítulo 2 nos ocuparemos de este tipo de estructuras. Paralelamente consideraremos el efecto que tiene sobre las anomalías gravitacionales el introducir una deformación noconmutativa del espacio-tiempo.

## 1.2 Elementos de la teoría de campos noconmutativa

Por otra parte, la noconmutatividad del espacio ha sido considerada desde hace algún tiempo cuando se trata de estudiar una posible forma de regular las divergencias UV en teoría cuántica de campos y en relatividad general. La gravedad cuántica tiene un principio de incertidumbre que nos previene de medir posiciones a una escala menor que la longitud de Plank. El momento y la energía requeridos para hacer una medición de esta naturaleza, modificaría la geometría a dichas escalas. Es natural



preguntarse si estos efectos podrían ser modelados por una relación de conmutación entre las coordenadas del espacio tiempo.

A continuación daré algunos de los elementos básicos de la teoría de campos noconmutativa. El enfoque que considero a continuación dista mucho de ser formal. La idea es, en su lugar, proporcionar los elementos fundamentales para seguir los cálculos que se darán a lo largo de esta tesis.

En la mecánica cuántica tradicional tenemos las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores de posición y momento

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.25)$$

y

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \quad , \quad (1.26)$$

donde los índices  $i, j, k = 1, 2, 3$  corren sobre las coordenadas espaciales. No hay evidencia, sin embargo, de que estas relaciones de conmutación sigan siendo válidas a distancias “muy pequeñas” o bien, a “muy altas” energías. Una generalización que podríamos encontrar natural de dichas relaciones de conmutación es la siguiente

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\theta_{ij} \quad , \quad (1.27)$$

donde  $\theta_{ij}$  es un parámetro constante —con dimensiones de  $[L]^2$ —. Obviamente que cuando se introduce esta condición en las coordenadas, se arruina la invariancia de Lorentz. Recordemos, sin embargo, que hemos supuesto que las anteriores relaciones de conmutación aparecen a distancias  $l$  muy pequeñas, i.e. que para  $\frac{l}{\sqrt{\theta}} \gg 1$  deberíamos recobrar la simetría de Lorentz. Esta es una de las características de nuestra teoría de campos noconmutativa, que al menos a nivel clásico, en el límite  $\frac{l}{\sqrt{\theta}} \gg 1$  deberíamos recuperar una teoría de campo conmutativa previamente conocida.

Ahora, la ecuación anterior puede ser extendida a las coordenadas de espacio tiempo

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad . \quad (1.28)$$

Lo que constituye una definición de espacio noconmutativo, i.e. cualquiera donde las coordenadas satisfagan la relación anterior de conmutación. Para construir la correspondiente teoría de campo perturbativa, es más conveniente usar campos que sean funciones en lugar de operadores. Para pasar a estos campos manteniendo la relación de conmutación válida, definiremos a continuación el producto en el espacio de funcionales. Este nuevo producto es introducido a través de la —así llamada— correspondencia de Weyl-Wigner-Moyal:

$$\hat{\Phi}(\hat{X}) \leftrightarrow \Phi(x) \quad ; \quad (1.29)$$

y, consecuentemente

$$\hat{\Phi}(\hat{X}) = \int_{\alpha} e^{i\alpha\hat{X}} \phi(\alpha) d\alpha \quad , \quad (1.30)$$

$$\phi(\alpha) = \int e^{-i\alpha x} \phi(x) dx \quad , \quad (1.31)$$

donde  $\alpha$  y  $x$  son variables reales. Así,

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \left[ e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi\mu}\partial_{\eta\nu}} \phi_1(x + \xi) \phi_2(x + \eta) \right]_{\xi=\eta=0} \quad , \quad (1.32)$$

Esto último sugiere que podemos trabajar en un espacio conmutativo usual para el cual la multiplicación se modifica a lo que se conoce como producto estrella. Es fácil verificar que el bracket de Moyal (el conmutador en el cual el producto usual se modifica con un producto estrella) entre dos coordenadas, satisface la relación de conmutación deseada

$$[x_\mu, x_\nu]_M = i\theta_{\mu\nu} \quad . \quad (1.33)$$

## Propiedades del producto estrella

Ahora enumeramos algunas de las identidades comunes del álgebra del producto estrella.

### 1. Producto estrella entre exponenciales

$$e^{ikx} \star e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{\frac{-i}{2}k\theta q} \ , \quad (1.34)$$

donde  $k\theta p \equiv k^\mu p^\nu \theta_{\mu\nu}$ .

### 2. Representación del producto $\star$ en el espacio de momentos.

Sea  $\tilde{f}(k)$  y  $\tilde{g}(k)$  las componentes de Fourier de  $f$  y  $g$ . Entonces

$$(f \star g)(x) = \int d^4k d^4q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)} e^{i(k+q)x} \ . \quad (1.35)$$

### 3. Asociatividad,

$$[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x) \ , \quad (1.36)$$

lo cual puede ser inmediatamente probado trabajando en el espacio de momentos.

### 4. Productos estrella bajo una integral

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int (g \star f)(x) d^4x = \int (fg)(x) d^4x \quad (1.37)$$

De aquí puede deducirse la propiedad cíclica

$$\int (f_1 \star f_2 \star \dots \star f_n)(x) d^4x = \int (f_n \star f_1 \star \dots \star f_{n-1})(x) d^4x \ . \quad (1.38)$$

### 5. Conjugación compleja

$$(f \star g)^* = g^* \star f^* \ . \quad (1.39)$$

Es evidente que si  $f$  es una función real entonces  $f \star f$  también será real.

### Teoría de campo noconmutativa a nivel clásico

La acción para el análogo noconmutativo de la teoría  $\Phi^4$  real puede escribirse

$$S[\Phi] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \star \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi \star \Phi - \frac{\lambda}{4!} \Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi \right] . \quad (1.40)$$

Debido a las propiedades del producto estrella mencionadas en la subsección anterior, la parte cuadrática de la acción es la misma que en el caso conmutativo. De manera que la parte que se vé modificada está en el término de interacción.

### Momento conjugado y ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento clásicas pueden ser obtenidas, como en el caso conmutativo, minimizando la acción

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0 \quad , \quad (1.41)$$

Entonces las ecuaciones de movimiento para la teoría del campo escalar con una interacción tipo  $\lambda \Phi^4$  quedan

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi = \frac{\lambda}{3!} (\Phi \star \Phi \star \Phi)(x) \quad . \quad (1.42)$$

Ahora, con el objeto de encontrar el momento conjugado debemos primero distinguir dos casos importantes:

(i)  $\theta_{0i} = 0$  .

En este caso únicamente encontramos derivadas temporales en el término cinético de manera que el momento conjugado es el mismo que en el caso conmutativo.

(ii)  $\theta_{0i} \neq 0$  .

Este caso es más complicado debido a que tenemos un número infinito de derivadas temporales en el término de interacción. Obviamente se trata de un caso no trivial, dado que el momento conjugado depende del término de interacción. El hecho de que tengamos un número infinito de derivadas en el tiempo sugiere que la teoría es no local en el tiempo y por lo tanto, cabe esperar que exista violación de la causalidad.

### Teorema de Noether

Daré a continuación una breve derivación del Teorema de Noether, extendido al caso de Teorías de campo noconmutativas. Supongamos que tenemos una acción que posee una simetría global continua. Para una transformación infinitesimal podemos escribir

$$S[\Phi] = S[\Phi + \varepsilon \mathcal{F}(\phi)], \quad \text{con } \varepsilon = \text{const.} \quad (1.43)$$

Si ahora tomamos el parámetro  $\varepsilon$  dependiente de las coordenadas  $x$ , podremos definir la corriente  $J$  mediante la relación

$$S[\Phi + \varepsilon(x) \mathcal{F}] - S[\Phi] \equiv - \int J^\mu \left( \Phi(x) \right) \partial_\mu \varepsilon(x) \quad . \quad (1.44)$$

Anteriormente hemos establecido que estamos interesados en variaciones de la acción tal que cualquier variación de los campos alrededor de la trayectoria clásica, dejen a ésta invariante, i.e.,  $\delta S / \delta \Phi = 0$ . En particular, si  $\delta \Phi = \varepsilon(x) \mathcal{F}$  entonces

$$\int J^\mu \left( \Phi(x) \right) \partial_\mu \varepsilon(x) = 0 \quad , \quad (1.45)$$

y después de una integración por partes

$$\int \partial_\mu J^\mu \left( \Phi(x) \right) \varepsilon(x) d^4x = 0 \quad , \quad (1.46)$$

de manera que la corriente  $J^\mu$  es conservada. Este es un resultado general y puede usarse para cualquier teoría noconmutativa. El concepto de corriente conservada es

ligeramente diferente que en el caso conmutativo. Como una consecuencia de las propiedades del producto de Moyal, podemos establecer que

$$\partial_\mu J^\mu = [f, g]_M \quad , \quad (1.47)$$

para ciertas funciones  $f$  y  $g$ . Este resultado parece bastante “natural” dado que en el límite conmutativo ( $\theta \rightarrow 0$ ) el bracket de Moyal se desvanece y recuperamos el resultado clásico  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Por otra parte, si integramos la ecuación anterior sobre las coordenadas del espacio obtenemos

$$\partial_0 \int J^0 d^3x + \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3x = 0 \quad , \quad (1.48)$$

y de aquí podemos decir que, como en el caso conmutativo, la carga  $Q$

$$Q = \int J^0 d^3x \quad , \quad (1.49)$$

es conservada. Es necesario hacer incapié de que esto es así únicamente cuando  $\theta_{0i} = 0$  dado que solo en este caso tiene sentido hablar del concepto de conservación de carga.

## Campo escalar

En esta parte consideraremos una teoría arbitraria con una interacción  $V[\Phi]$ . Se dá por sentado que dicha interacción contiene términos que dependen del producto de Moyal. Como se verá más adelante, consideraremos una interacción de la forma  $\lambda\Phi^4$ , no obstante la discusión que daré a continuación, no depende de la forma explícita de la función Hamiltoniana. Denotemos por  $S$  la acción de nuestra teoría, entonces:

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V[\Phi] \right] \quad . \quad (1.50)$$

Dado que la parte libre de esta acción es cuadrática en los campos y derivadas de estos campos, es conveniente escoger el espacio de Fock y en particular el estado de

vacío para que sean exactamente los mismos que en el caso conmutativo, de manera que los campos pueden ser expandidos en términos de los mismos operadores de creación y aniquilación, es decir

$$\Phi(x) = \sum_k [a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}]e^{i\omega t}. \quad (1.51)$$

Para aplicar el método de cuantización canónica deberemos primero calcular el momento  $\Pi(x)$  conjugado al campo  $\Phi$ , i.e.

$$[\Phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad . \quad (1.52)$$

No obstante, una aplicación directa de este método puede conducirnos a severos problemas. En primer lugar como hemos señalado anteriormente, para la teoría clásica, en el caso  $\theta_{0i} \neq 0$  la teoría muestra problemas relacionados con causalidad. Es por esto que se estudia generalmente el caso  $\theta_{0i} = 0$ . Para este caso el momento conjugado es justamente el mismo que aparece en el caso conmutativo

$$\Pi = \partial_0 \Phi \quad (1.53)$$

En la teoría noconmutativa hay una ambigüedad al aplicar las condiciones de cuantización en el espacio de posiciones. En general, hemos visto que para tratar un espacio no conmutativo, podríamos trabajar en uno conmutativo usual y reemplazar todos los productos entre funciones con productos estrella. Sin embargo las condiciones de cuantización definidas entre los campos y sus momenta conjugados, se calculan en puntos diferentes, mientras que el producto estrella solo tiene sentido entre funciones calculadas en el mismo punto. Podemos escapar de estos problemas si desde el principio trabajamos en el espacio de momentos y aplicamos directamente las condiciones de cuantización en el espacio de momentos:

$$[\tilde{\Phi}(k), \tilde{\Pi}(q)] = i\delta^{(4)}(k - q) \quad , \quad (1.54)$$

Esto es posible porque en el espacio de momentos, la diferencia entre el conmutador usual y el bracket de Moyal es justamente un factor de fase  $e^{ik\theta q}$  el cual no tiene

relevancia en la función  $\delta$  que aparece del lado derecho.

Desde este punto de vista, la cuantización se puede explorar como en el caso conmutativo. Al nivel de la teoría libre todo se mantiene igual y únicamente la interacción guarda un “registro” de la estructura noconmutativa del espacio a través del producto estrella. Esto se manifestará de manera explícita en el capítulo 3 de la tesis cuando observemos el efecto de una interacción noconmutativa en una teoría hamiltoniana.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo **2** comenzamos con algunos argumentos acerca de ciertos aspectos globales de las anomalías gravitacionales noconmutativas. En las secciones **2.1** y **2.2** proporcionamos las características básicas de la gravedad perturbativa noconmutativa así como de las correspondientes reglas de Feynman noconmutativas que provienen del acoplamiento de los fermiones de Weyl a la gravedad. La sección **2.2.1** la dedico al cálculo de lo que he denominado el “análogo noconmutativo” de la anomalía gravitacional axial de Delbourgo-Salam, la cual corresponde a la corrección gravitacional a la anomalía ABJ (axial) en cuatro dimensiones. En la sección **2.3** se discute la anomalía quiral de gauge gravitacional en dos dimensiones. Para este caso, la generalización noconmutativa coincide totalmente con la conmutativa y no existe corrección noconmutativa. La sección **2.4** está dedicada a extender el cálculo de la amplitud a un lazo para la dimensión  $D = 4k + 2$ . Aquí, luego de algunos preliminares, calculamos la anomalía de gauge quiral gravitacional al evaluar directamente la amplitud perturbativa de los diagramas a un lazo en el procedimiento de Schwinger. En esta misma sección se calcula la amplitud para fermiones de spin  $\frac{3}{2}$ . En la sección **2.5** se describe separadamente las anomalías mezcladas entre campos de gauge y campos gravitacionales acoplados con spin  $\frac{1}{2}$  ó  $\frac{3}{2}$  en un espacio noconmutativo.

El capítulo **3** está dedicado a explorar la radiación de un agujero negro en dos dimensiones cuando se introduce una interacción noconmutativa entre los campos escalares que la producen. En la sección **3.1** hago una breve revisión del caso conmutativo. Ahí se introduce los fundamentos de la teoría libre de interacciones. En la sección **3.2** presento la corrección noconmutativa a dicho flujo de radiación.



En esta sección es presentada la versión deformada de la interacción.

La sección **3.3** presenta la corrección noconmutativa del Hamiltoniano de interacción a segundo orden en el parámetro de noconmutatividad  $\Theta$ . Se encuentra una expresión para dicha corrección y se establece que ésta es no trivial. Siguiendo con nuestro enfoque, en la sección **3.4** se sugiere un método que involucra la modificación del equivalente de los diagramas de Feynman para llevar a cabo el cálculo de las amplitudes de los términos encontrados en la sección previa. Se utiliza una diagramática que generaliza la introducida originalmente en las referencias [80] y [82].

La sección **3.5** explora, finalmente, el cálculo del flujo noconmutativo de partículas de un agujero negro. Para ello se utiliza los resultados descritos en las dos secciones anteriores, encontrándose una expresión general para la amplitud noconmutativa. En la sección **3.6** se expone los detalles del cálculo del flujo noconmutativo de partículas salientes en un agujero negro. Se hace un análisis de las divergencias presentes en dicha amplitud, encontrándose que, a diferencia de la contraparte conmutativa, aquí predominan las divergencias ultravioleta.

En el capítulo 4 presento las Conclusiones y Perspectivas de esta tesis.

## Capítulo 2

# Anomalías gravitacionales en la teoría noconmutativa

*“Then shall the Realm of Albion, Come to great confusion...”. ( “Entonces el reino de Albión se verá en una gran confusión...” ). (W. Shakespeare, “La tragedia del rey Lear”, Tercer acto, escena 2)*

La teoría de campos noconmutativa posee efectos novedosos e intrigantes en la teoría cuántica como el recientemente descubierto efecto de mezcla UV/IR en la referencia [15] que tiene, de hecho, su origen en Teoría de cuerdas. Otra sorpresa muy agradable es la profunda relación con la Teoría M [16, 17] (para ver una revisión completa se puede consultar, por ejemplo [18, 19]). Otro efecto importante de la Teoría cuántica de campos lo constituyen las *Anomalías*. Las anomalías de gauge, en particular anomalías quirales de gauge y axiales en teorías de gauge noconmutativas, han sido discutidas en una serie de artículos por diferentes autores [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. En particular, las anomalías de gauge noconmutativas en Teoría de Yang-Mills —noconmutativa— han sido consideradas en las referencias [23, 25, 26, 28, 29] donde se trabaja con diagramas planares con grupo de gauge  $U(N)$ . Para el caso de diagramas no planares ha habido varios trabajos como puede verse en [24, 30, 40]. El análisis puede ser extendido a otros grupos de gauge introduciendo el mapeo de Seiberg-Witten como

puede verse en [34, 36, 37, 38, 39].

Por otra parte, recientemente se ha propuesto varias teorías de gravedad noconmutativa. En particular, en las referencias [41, 42, 43, 44, 45, 46], se analiza diferentes deformaciones de Moyal de la gravitación de Einstein en cuatro dimensiones. Todas esas acciones sin embargo, son no manifiestamente invariantes bajo las transformaciones completas noconmutativas dado que son deformadas de manera no trivial por el producto de Moyal con un parámetro de noconmutatividad constante. No son, por lo tanto, invariantes ante difeomorfismos, en la medida en que el producto de Moyal depende del sistema de coordenadas. Esos productos pueden volverse invariantes ante difeomorfismos sustituyendo el producto de Moyal  $\star_M$  por el producto de Kontsevich  $\star_K$  [47]. En el presente trabajo vamos a asumir que se utiliza el producto de Kontsevich  $\star_K$  aunque se evitará el uso del subíndice  $K$ . Recientemente se ha encontrado otras propuestas noconmutativas que pueden consultarse en las referencias [48, 49]. En la primera de las referencias se construye una acción topológica noconmutativa, manifiestamente invariante  $SO(1,3)$  para los términos theta gravitacionales. Para ciertas condiciones de frontera apropiadas nos da la posibilidad de proporcionar indicios acerca de instantones gravitacionales noconmutativos así como de anomalías gravitacionales de Lorentz noconmutativas. En el último de los artículos se discute un caso dinámico de gravedad de Einstein deformando *a la* Moyal (o Kontsevich) la proyección auto dual de la teoría de Einstein para encontrar una teoría noconmutativa manifiestamente invariante  $SL(2, \mathbf{C})$ .

Las acciones topológicas noconmutativas las cuales son la combinación lineal del número de Euler  $\widehat{\chi}(X)$  y de la signatura  $\widehat{\sigma}(X)$ , siendo acciones invariantes ante  $\widehat{SO(3,1)}$ , son muy importantes dado que describen el rompimiento de la simetría quiral ante la presencia de campos gravitacionales. Debido a las dificultades técnicas que surgen al tratar de hacer noconmutativa a la acción  $\chi(X)$ , se propone una manera de lograr esto al hacer a la acción noconmutativa  $\widehat{\chi}(X)$  la cual es  $\widehat{SL(2, \mathbf{C})}$  invariante, a partir de una versión noconmutativa para la signatura, lo cual es también una acción  $\widehat{SL(2, \mathbf{C})}$  invariante.

Por otra parte, las anomalías de norma locales están asociadas a la falta de in-

variancia de la acción efectiva fermiónica a un lazo  $\Gamma(Q) = \log [\det \mathcal{D}]$ , donde  $e^{-\Gamma} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* e^{-\int_X L}$ , bajo transformaciones de gauge infinitesimales con los campos de materia quirales  $\psi(x)$  y  $\psi^*(x)$  definidos en una representación compleja  $Q$  del grupo de gauge  $G$ .

En el caso de los acoplamientos gravitacionales a la materia, existen diferentes tipos de anomalías gravitacionales, dependiendo del tipo de transformaciones de simetría que se esté analizando. Así, la anomalía de Lorentz (o de automorfismos) está relacionada a la falta de invariancia de gauge de  $\Gamma$  bajo las transformaciones de Lorentz. Cuando el grupo de simetría es el grupo de difeomorfismos  $Diff(X)$  de una variedad de espacio tiempo suave  $X$  y  $\Gamma(Q)$  es no generalmente covariante, entonces tenemos la anomalía de difeomorfismos.

En otro orden de ideas, las correcciones gravitacionales a la anomalía ABJ (Adler-Bell-Jackiw) fueron originalmente calculadas por Delbourgo y Salam [50] y trabajos posteriores relacionados con éste pueden verse en las referencias [51, 52]. Poco tiempo después, las anomalías gravitacionales fueron calculadas en una forma sistemática por Alvarez-Gaumé y Witten [13] (puede verse también [12]). En el presente trabajo no consideraremos anomalías gravitacionales globales aunque el lector interesado puede consultar una excelente exposición en [53].

En la referencia [48] se argumenta acerca de una versión noconmutativa del grupo de Lorentz  $\widehat{SO(4)}$  siguiendo un procedimiento global para calcular anomalías quirales en una teoría de gauge, procedimiento sugerido por Harvey [54], y el cual está basado en la literatura matemática [55]. La aplicación de estas ideas a las transformaciones de difeomorfismos conectadas a la identidad, podrían predecir novedosos efectos gravitacionales noconmutativos, que serían calculadas explícitamente como una corrección noconmutativa de la contribución gravitacional a la anomalía quiral.

En el presente trabajo calculamos anomalías gravitacionales quirales y axiales partiendo de una teoría gravitacional noconmutativa completa y nos enfocamos en el lagrangiano de interacción entre fermiones quirales y gravitones en el espacio tiempo noconmutativo. En general, seguimos la observación de t'Hooft de que las anomalías pueden ser estudiadas en términos de la teoría de campo efectiva de bajas energías y

consideraremos una teoría efectiva de campo noconmutativa describiendo la acción efectiva —a un lazo— de fermiones en un campo de fondo, siendo éste el campo gravitacional noconmutativo (para las anomalías gravitacionales puras) y/o el campo de Yang-Mills noconmutativo (para las anomalías mezcladas). Nos restringiremos al cálculo de diagramas perturbativos a un lazo entre fermiones quirales con gravitones externos y/o gluones en varias dimensiones. Únicamente consideraremos los diagramas planares en este trabajo.

### 2.0.1 Preliminares de Anomalías gravitacionales noconmutativas: Aspectos globales

Antes de proceder al cálculo de las anomalías gravitacionales en el contexto noconmutativo me gustaría hacer algunas consideraciones globales acerca de la naturaleza de dichas anomalías.

Desde una perspectiva topológica, las anomalías gravitacionales locales son obtenidas a través del cálculo de ciertos grupos de homotopía adecuados al grupo de gauge relevante.

En la referencia [48] se dan argumentos acerca de una versión noconmutativa del grupo de Lorentz  $\widehat{SO(4)}$  siguiendo un procedimiento global para calcular anomalías quirales en una teoría de gauge; procedimiento sugerido por Harvey en [54], el cual está basado en la literatura matemática [55]. Su propuesta se fundamenta en asumir que  $\widehat{SO(4)}$  consiste del conjunto dado por el álgebra de operadores ortogonales compactos  $\mathbf{O}_{cpt}(\mathcal{H})$ , definido sobre el espacio de Hilbert real (separable)  $\mathcal{H}$ . La propiedad de compacidad “elimina” en cierta forma el teorema de Kuiper, el cual establece que el conjunto de operadores ortogonales puro  $\mathbf{O}(\mathcal{H})$  posee grupos de homotopía triviales [55]. Esta álgebra tiene subálgebras no triviales las cuales poseen la misma homotopía que  $SO(\infty)$  (hasta una periodicidad de Bott 8), lo que puede dar origen a novedosos efectos topológicos no triviales en gravedad noconmutativa. La anomalía de Lorentz local noconmutativa es detectada con  $\pi_3(\mathbf{O}_{cpt}(\mathcal{H})) = \mathbf{Z}$ . La elección de  $\mathbf{O}_{cpt}(\mathcal{H})$  como una versión de  $\widehat{SO(4)} = SO(\infty)$  es altamente no única,

por tanto hay muchas posibilidades de lograr esto y no existe un procedimiento natural para definir  $\widehat{SO(4)}$  y es ciertamente necesario contar con una manera de calcular más explícitamente la anomalía gravitacional local.

En teorías gravitacionales, el grupo de Lorentz es únicamente una parte del grupo de simetría completo. Por lo tanto, el espacio moduli de la teoría de gravedad pura involucra una estructura del espacio fase más rica la cual consiste del espacio cociente:  $\mathcal{M} = \mathcal{T}/\Gamma_\infty^+$ , donde  $\mathcal{T} = Met(X)/Diff_0^+(X)$  es el espacio de Teichmüller y  $\Gamma_\infty^+$  es el grupo de la clase de mapeos dado por el grupo cociente  $\Gamma_\infty^+ = Diff^+(X)/Diff_0^+(X)$ . Aquí,  $Met(X)$  es el espacio moduli de métricas Riemannianas sobre  $X$ ,  $Diff^+(X)$  es el grupo de todos los difeomorfismos que preservan la orientación sobre  $X$  y  $Diff_0^+(X)$  es el grupo de difeomorfismos que preservan la orientación sobre  $X$  los cuales están conectados a la identidad. Sin embargo, hay una restricción en la dimensionalidad del espacio tiempo en el cual la anomalía de difeomorfismos puede existir. Ésta puede existir únicamente para  $dim X = 4k + 2$  dimensiones dado que solo en esta dimensión el grupo ortogonal  $O(1, D - 1)$  posee representaciones complejas.

Las anomalías gravitacionales locales en el caso usual conmutativo aparecen cuando el grupo de la clase de mapeos es el grupo trivial i.e.,  $\Gamma_\infty^+ = 1$ . Por lo tanto el espacio moduli está dado por  $\mathcal{M} = Met(X)/Diff_0^+(X)$ . Las anomalías gravitacionales globales están relacionadas a la desconexidad de  $\Gamma_\infty^+$ , i.e.  $\pi_0(\Gamma_\infty^+) \neq 1$ . Ahora, el espacio moduli para gravedad noconmutativa puede ser definido por  $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{T}}/\widehat{\Gamma}_\infty^+$  con  $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{Met(X)}/\widehat{Diff_0^+(X)}$  y  $\widehat{\Gamma}_\infty^+ = \widehat{Diff^+(X)}/\widehat{Diff_0^+(X)}$ . Por supuesto que, para poder llevar a cabo algunos cálculos en anomalías, uno debe ser capaz de proveer definiciones adecuadas para  $\widehat{\Gamma}_\infty^+$ ,  $\widehat{Diff^+(X)}$  y  $\widehat{Diff_0^+(X)}$ . Las anomalías gravitacionales locales noconmutativas surgirían cuando  $\pi_2(\widehat{\mathcal{M}}) = \pi_1(\widehat{Diff_0^+(X)}) \neq 1$ , donde  $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{Met(X)}/\widehat{Diff_0^+(X)}$ .

Una vez más, la elección de alguna versión adecuada de  $\widehat{Diff_0^+(X)}$  es con mucho, no única; existen muchas posibilidades para éste y no existe un procedimiento “natural” para definir  $\widehat{Diff_0^+(X)}$  así que se hace necesario una forma más explícita para calcular anomalías gravitacionales locales. En esta tesis evitaré el uso de la

perspectiva topológica y calcularé las anomalías gravitacionales quirales a través del cálculo directo y explícito de diagramas de Feynman a un lazo para fermiones quirales acoplados a gravitones externos y/o campos de gauge. Para lograr esto, usaremos las reglas de Feynman para una gravedad noconmutativa adecuada, dadas en la sección siguiente.

## 2.1 El acoplamiento noconmutativo de Gravedad y Fermiones quirales

En la presente sección daremos un breve repaso del campo gravitacional perturbativo noconmutativo puro y su interacción con fermiones de Weyl noconmutativos. Nuestro propósito es llamar la atención acerca de la estructura relevante de los acoplamientos y las reglas de Feynman, lo cual será necesario para la siguiente sección.

Como ya he mencionado en la introducción, en el momento presente no existe una teoría de gravitación noconmutativa realista y bien definida. En la presente tesis no trabajaremos con una teoría de gravedad noconmutativa específica. Esto obedece a que al final no consideraremos ninguna teoría específica de gravedad pura, sino que estaremos interesados exclusivamente en las interacciones del campo gravitacional noconmutativo linealizado con fermiones quirales. Sin embargo, para ser concretos revisaremos brevemente una propuesta particular de la Gravedad de Einstein (noconmutativa) [42] dada por la acción de Einstein-Hilbert noconmutativa:  $\hat{I}_{EH} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_X d^4x (-e) \star e_\mu^a(x) \star e_\nu^b(x) \star R_{ab}^{\mu\nu}(x)$ , donde  $g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) \star e_\nu^b(x) \eta_{ab}$ , y  $R_{\mu\nu}^{ab}(x) = \partial_\mu \omega_\nu^{ab}(x) - \partial_\nu \omega_\mu^{ab}(x) + [\omega_\mu(x), \omega_\nu(x)]_\star^{ab}$ , con  $\omega_\mu^{ab}(x)$ , siendo la conexión de spin noconmutativa, mientras que el conmutador usual es sustituido por  $[A, B]_\star \equiv A \star B - B \star A$ , el bracket de Moyal. Aquí, el producto  $\star$  se define por  $F \star G(x) \equiv \exp\left(\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) F(y) G(z) \Big|_{y=z=x}$ . En esta primera parte de la tesis tomaremos  $\theta^{0\nu} = 0$ .

La Gravedad perturbativa noconmutativa es definida mediante una expansión perturbativa de la forma:  $I = I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + \mathcal{O}(\kappa^4)$  de la acción de Einstein-Hilbert noconmutativa [45] la cual es generada a través de una expansión de la métrica como sigue:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \kappa h_{\mu\nu} + \kappa^2 h_{\mu}^{\alpha} \star h_{\alpha\nu} - \kappa^3 h_{\mu}^{\alpha} \star h_{\alpha\beta} \star h_{\nu}^{\beta} + \mathcal{O}(\kappa^4)$ .

En la referencia [45] se exponen las reglas de Feynman de esta teoría de Gravedad noconmutativa. En lo que sigue daremos las correspondientes reglas de Feynman que gobiernan el acoplamiento de la métrica linealizada noconmutativa  $h_{\mu\nu}(x)$  a fermiones quirales.

## 2.2 Acoplamiento de Gravedad a Fermiones quirales

A continuación consideremos la teoría de Gravedad en  $4k + 2$  dimensiones. El acoplamiento del campo gravitacional con Fermiones quirales está dado como es usual, por la Lagrangeana

$$I_{int} = \int d^{4k+2}x \det(e) \star e^{\mu a}(x) \star \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \star i \Gamma_a D_{\mu} \left( \frac{1 - \bar{\Gamma}}{2} \right) \psi(x), \quad (2.1)$$

donde  $D_{\mu}$  es la derivada covariante con respecto a la conexión de spin  $\omega_{\mu}^{ab}$  y está dada por  $D_{\mu} \psi(x) = \partial_{\mu} \psi(x) + \frac{1}{2} \omega_{\mu cd} \sigma^{cd} \psi(x)$ , con  $\sigma^{cd} = \frac{1}{4} [\Gamma^c, \Gamma^d]$ ,  $\bar{\Gamma} = \Gamma_1 \dots \Gamma_{4k+2}$  y donde las  $\Gamma$ 's son las matrices de Dirac en  $4k + 2$  dimensiones euclidianas.

Nuestra acción noconmutativa se puede reescribir en dos partes  $I_{int} = I_1 + I_2$  donde

$$I_1 = \frac{1}{2} \int dx \det(e) \star e^{\mu a}(x) \star \bar{\psi}(x) \star i \Gamma_a \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \left( \frac{1 - \bar{\Gamma}}{2} \right) \psi(x) \quad (2.2)$$

e

$$I_2 = \frac{1}{4} \int dx \det(e) \star e^{\mu a}(x) \star \omega_{\mu}^{cd}(x) \star i \bar{\psi}(x) \star \Gamma_{acd} \left( \frac{1 - \bar{\Gamma}}{2} \right) \psi(x), \quad (2.3)$$

donde definimos, de manera usual  $\Gamma_{acd} = \frac{1}{6} (\Gamma_a \Gamma_c \Gamma_d \pm \text{permut.})$ .



La linealización de nuestra acción noconmutativa  $I_{int}$  dada por la ecuación (2.1) nos conduce a la deformación de Moyal de la gravedad lineal dada por la Lagrangeana

$$L_1 = -\frac{1}{4}ih^{\mu\nu}(x) \star \bar{\psi}(x) \star \Gamma_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \left( \frac{1-\bar{\Gamma}}{2} \right) \psi(x), \quad (2.4)$$

y

$$L_2 = -\frac{1}{16}ih_{\lambda\alpha}(x) \star \partial_\mu h_{\lambda\alpha}(x) \star \bar{\psi}(x) \star \Gamma^{\mu\lambda\nu} \left( \frac{1-\bar{\Gamma}}{2} \right) \psi(x). \quad (2.5)$$

Las reglas de Feynman correspondientes pueden deducirse de las Lagrangeanas (2.4) y (2.5) y vienen dadas por las siguientes expresiones

$$-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\Gamma_\mu \left( \frac{1-\bar{\Gamma}}{2} \right) (p+p')_\nu \exp \left( -\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}p_\rho p'_\sigma \right) \quad (2.6)$$

y

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{16}\Gamma^{\lambda\mu\nu} \left( \frac{1-\bar{\Gamma}}{2} \right) \varepsilon_{\nu\alpha}^{(1)} \varepsilon_{\lambda\alpha}^{(2)} \exp \left( \frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}p_\rho p'_\sigma \right) \\ & \times \left[ k_{1\mu} \exp \left( \frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma} \right) - k_{2\mu} \exp \left( \frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\varepsilon_{\mu\alpha}^{(i)}$  son los tensores de polarización del campo del gravitón. Las reglas de Feynman dadas por las ecuaciones (2.6) y (2.7) pueden deducirse de los siguientes diagramas

### 2.2.1 Anomalía gravitacional de Delbourgo-Salam noconmutativa

Las anomalías gravitacionales en cuatro dimensiones fueron originalmente estudiadas por Delbourgo y Salam [50] como una corrección gravitacional a la violación de la simetría global responsable del decaimiento:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Esta idea fue posteriormente desarrollada en diversos trabajos [51, 52]. En esta sección discutiremos

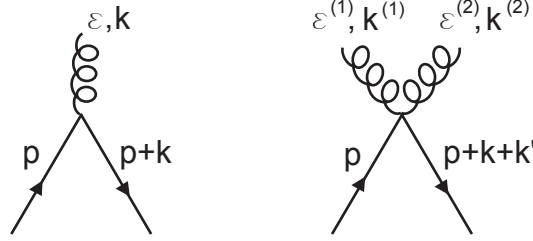


Figura 2.1: Diagramas de Feynman para  $L_1$  y  $L_2$ .

la contraparte noconmutativa. Delbourgo y Salam [50] demostraron que, en el decaimiento anteriormente citado, además del diagrama triangular con tres corrientes; se tiene otro diagrama similar con una corriente  $J^\mu$  de una simetría global y dos tensores  $T_{\mu\nu}$  de energía-momento, diagrama que también es anómalo. La contribución correspondiente a la identidad de Ward anómala está dada por

$$\frac{1}{384\pi^2} R_{\kappa\lambda\rho\sigma} R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Esta es, precisamente, proporcional al invariante de signatura  $\sigma(X)$  —o la primera clase de Pontrjagin— que junto con el número de Euler  $\chi(X)$  son los invariantes topológicos clásicos de una variedad de espacio tiempo  $X$ . Ahora discutiremos en detalle la derivación de la contraparte noconmutativa de la ecuación (2.8). La amplitud de dispersión del proceso en cuatro dimensiones está dada por la expresión

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \int d^4p \{ \Gamma \cdot p, \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu} \} \frac{\exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (p - k_2)_\rho (p + k_1)_\sigma \right)}{[\Gamma \cdot (p + k_1) - M]} \varepsilon_{\rho_1\sigma_1} p^{\rho_1} \Gamma^{\sigma_1} \\ & \times \frac{\exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (p + k_1)_\rho p_\sigma \right)}{(\Gamma \cdot p - M)} \varepsilon_{\rho_2\sigma_2} p^{\rho_2} \Gamma^{\sigma_2} \frac{\exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p_\rho (p - k_2)_\sigma \right)}{[\Gamma \cdot (p - k_2) - M]}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde hemos usado la regla de Feynman (2.6) en cada uno de los vértices del diagrama triangular así como los correspondientes propagadores fermiónicos.

Con el objeto de evaluar esta amplitud, promovemos la integral anterior, de 4 a  $2\ell$  dimensiones, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \int d^{2\ell}p \frac{(\Gamma \cdot (p + k_1) + M)}{[(p + k_1)^2 - M^2]} \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}(p - k_2)_\rho(p + k_1)_\sigma\right) \varepsilon_{\rho_1\sigma_1} p^{\rho_1} \Gamma^{\sigma_1} \frac{(\Gamma \cdot p + M)}{[p^2 - M^2]} \\ & \times \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}(p + k_1)_\rho p_\sigma\right) \frac{(\Gamma \cdot (p - k_2) + M)}{[(p - k_2)^2 - M^2]} \varepsilon_{\rho_2\sigma_2} p^{\rho_2} \Gamma^{\sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p_\rho (p - k_2)_\sigma\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

y de manera usual introducimos los parámetros de Feynman

$$\frac{1}{ABC} \equiv 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(1 - x - y - z)}{(xA + yB + zC)^3}, \quad (2.11)$$

con  $A = (p + k_1)^2 - M^2$ ,  $B = (p - k_2)^2 - M^2$  y  $C = p^2 - M^2$ . Después de una redefinición del momento  $p \rightarrow p' = p + k_1x - k_2y$  encontramos que  $xA + yB + (1 - x - y)C = p'^2 + k_3^2xy - M^2$  y omitiendo la operación de la traza de las matrices de Dirac, encontramos que  $xA + yB + (1 - x - y)C = p'^2 + k_3^2xy - M^2$  y

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx dy dz \delta(1 - x - y - z) \int \frac{d^{2\ell}p}{(p^2 + k_3^2xy - M^2)^3} \\ & \times \text{Tr} \left\{ \{ \Gamma \cdot p, \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu} \} [\Gamma \cdot (p + zk_1 - xk_3) + M] (p + xk_2)^{\rho_1} \Gamma^{\sigma_1} \right. \\ & \times [\Gamma \cdot (p + xk_2 - yk_1) + M] (p - yk_1)^{\rho_2} \Gamma^{\sigma_2} [\Gamma \cdot (p + yk_3 - zk_2) + M] \left. \right\} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aquí hemos redefinido nuevamente  $p' \rightarrow p$  y hemos desarrollado la suma de las contribuciones de las fases en el parámetro noconmutativo  $\Theta$ . Integrando la variable  $z$  y manteniendo únicamente los términos divergentes, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} & 2k_2^{\rho_1} k_1^{\rho_2} \int_0^1 dx dy \theta(1 - x - y) xy \int \frac{d^{2\ell}p}{(p^2 + k_3^2xy - m^2)^3} \\ & \times \text{Tr}(\{ \Gamma \cdot p, \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu} \} \Gamma \cdot p \Gamma^{\sigma_1} \Gamma^{\sigma_2} \Gamma \cdot k_1 \Gamma \cdot k_2) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $\theta(x)$  es la función unitaria de Heaviside. Ahora procedemos a calcular la traza de los productos de matrices gamma usando la propiedad cíclica de la traza así como la identidad  $\text{Tr}(\Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}\Gamma^{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}\Gamma^\alpha\Gamma^\beta) = 2^\ell \delta_{[\kappa}^{[\sigma_1}\delta_{\lambda}^{\sigma_2}\delta_{\mu}^\alpha\delta_{\nu]}^\beta] = 2^\ell \varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  obtenemos finalmente

$$2k_2^{\rho_1}k_1^{\rho_2} \int_0^1 dx dy \theta(1-x-y)xy \int \frac{d^{2\ell}p}{(p^2 + k_3^2 xy - m^2)^3} 2\left(\frac{\ell-2}{\ell}\right) \\ \times \text{Tr}\left[\{\Gamma \cdot p, \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}\}\Gamma^{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}\Gamma \cdot k_1\Gamma \cdot k_2 + \dots\right] \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\right) \quad (2.14)$$

o, de manera alternativa

$$2^{\ell+1}k_2^{\rho_1}k_1^{\rho_2} \int_0^1 dx dy \theta(1-x-y)xy \int \frac{d^{2\ell}p}{(p^2 + k_3^2 xy - m^2)^3} 2\left(\frac{\ell-2}{\ell}\right) \\ \times k_{1\alpha}k_{2\beta}\varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\right). \quad (2.15)$$

En la integración del momento  $p$  usamos la siguiente identidad

$$\int d^{2\ell}p \frac{p^2}{(p^2 + k_3^2 xy - M^2)^3} = \frac{i\pi^\ell}{(k_3^2 xy - M^2)^{3-\ell}} \frac{\Gamma(2-\ell)}{\Gamma(3)} \ell(k_3^2 xy - M^2). \quad (2.16)$$

Entonces podemos reescribir la ecuación 2.15 como

$$2^{\ell+1}(\ell-2)k_2^{\rho_1}k_1^{\rho_2}\varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}k_{1\alpha}k_{2\beta} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\right) \\ \times (4\pi)^{-\ell}\Gamma(2-\ell) \int (k_3^2 xy - M^2)^{\ell-2} ixy \theta(1-x-y) dx dy + \dots \quad (2.17)$$

Desarrollando la expansión de la función gamma  $\Gamma(\varepsilon)$  para valores pequeños de  $\varepsilon$  con  $\varepsilon = 2 - \ell$ , tomando luego el límite  $\ell \rightarrow 2$  y evaluando la integral en  $x$  e  $y$  nos queda

$$-i \frac{k_2^{\rho_1}k_1^{\rho_2}}{12\pi^2} \varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}k_{1\alpha}k_{2\beta} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\right). \quad (2.18)$$

Tomando en consideración la amplitud —invariante de Lorentz— más general, obtenemos

$$-\frac{i}{192\pi^2}\varepsilon_{\rho_1\sigma_1}(k_1)\varepsilon_{\rho_2\sigma_2}(k_2)k_{1\alpha}k_{2\beta}\varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\left(\eta^{\rho_1\rho_2}k_1\cdot k_2-k_1^{\rho_2}k_2^{\rho_1}\right)\varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}\exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}k_{2\rho}k_{1\sigma}\right). \quad (2.19)$$

En el espacio de las coordenadas esta última expresión puede ser reescrita como

$$\varepsilon^{\sigma_1\sigma_2\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\gamma h_{\rho_1\sigma_1}\star\partial_\beta\partial^\gamma h_{\sigma_2}^{\rho_1}-\partial_\alpha\partial^{\rho_2}h_{\rho_1\sigma_1}\star\partial_\beta\partial^{\rho_1}h_{\rho_2\sigma_2}\right)\varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}. \quad (2.20)$$

Lo cual puede expresarse, a la vez —de manera compacta— de la siguiente forma:

$$\frac{1}{384\pi^2}R_{\kappa\lambda\rho\sigma}\star R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}. \quad (2.21)$$

La ec. (2.21) constituye, precisamente, el *invariante de signatura noconmutativo*  $\widehat{\tau}(X) = \int R \star \widetilde{R} d^4x$ . En esta última expresión la tilde sobre  $R$  denota al operador dual de Hodge con respecto a los índices del espacio tangente. Vale la pena confrontar este resultado con la signatura  $\widehat{\sigma}(X)$  de la referencia [48], donde la dualidad de Hodge está asociada a los índices de la tetraeda.

## 2.3 Anomalía gravitacional pura noconmutativa en $D = 2$

En la sección previa hemos introducido las reglas de Feynman para Gravedad cuántica perturbativa noconmutativa, relevantes para calcular las anomalías gravitacionales quirales. Antes de calcular la anomalía gravitacional noconmutativa en  $D = 4k + 2$  dimensiones en esta sección, vamos a familiarizarnos con los detalles del cálculo de la anomalía gravitacional pura en dos dimensiones en el caso noconmutativo. En todo el cálculo seguiremos las convenciones y notación de la referencia [13].

### 2.3.1 Cálculo explícito en dos dimensiones

En dos dimensiones, la acción noconmutativa para un Fermión en presencia de un campo gravitacional está dada por  $I = \int d^2x \det(e) \star e^{\mu a}(x) \star \frac{1}{2}\bar{\psi}(x) \star i\Gamma_a\partial_\mu\psi(x)$ .

“A nivel” linealizado, la Lagrangeana está dada por

$$L_{int} = -\frac{1}{4}h^{\mu\nu}(x) \star i\bar{\psi}(x) \star \Gamma_\mu \partial_\nu \psi(x). \quad (2.22)$$

El correspondiente tensor de energía-momento está, entonces, dado por

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}i\bar{\psi}(x) \star \Gamma_\mu \partial_\nu \psi(x). \quad (2.23)$$

En las coordenadas del cono de luz  $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$ , las matrices de Dirac pueden descomponerse como  $\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 + \Gamma^1)$ , con  $(\Gamma^\pm)^2 = 0$  and  $\Gamma^+ \Gamma^- + \Gamma^- \Gamma^+ = 2$ . En estas coordenadas el tensor de energía-momento tiene la expresión

$$T_{++}(x) = \frac{1}{2}i\bar{\psi}(x) \star \Gamma_+ \partial_+ \psi(x), \quad (2.24)$$

mientras que la acción de interacción (2.22) del campo gravitacional con los fermiones en las coordenadas del cono de luz, se reduce a

$$L_{int} = -\frac{1}{4}ih_{--}(x) \star \bar{\psi}(x) \star \Gamma_+ \partial_+ \psi(x), \quad (2.25)$$

de manera que solo la componente  $h_{--}(x)$  del gravitón está acoplada a la materia quiral descrita por la componente  $T_{++}(x)$  del tensor de energía-momento. La acción efectiva a segundo orden en la métrica perturbada  $h_{\mu\nu}$  está codificada en la función de correlación de dos puntos

$$U(p) = \int d^2x \exp(ip \cdot x) \langle \Omega | T(T_{++}(x) \star T_{++}(0)) | \Omega \rangle, \quad (2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T(T_{++}(x) \star T_{++}(0)) | \Omega \rangle &= -\frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^2 \frac{d^2 q_i}{(2\pi)^2} \prod_{j=1}^2 \frac{d^2 q'_j}{(2\pi)^2} \langle \tilde{\psi}(q_1) \gamma_+ \partial_+ \psi(q'_1) \cdot \tilde{\psi}(q_2) \gamma_+ \partial_+ \psi(q'_2) \rangle \\ &\times \exp(i(q_1 - q'_1)x) \exp(i(q_2 - q'_2)x) \exp\left(i \frac{\Theta_{\rho\sigma}}{2} \sum_{j=1}^3 q_j^\rho q_j'^\sigma\right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

La correspondiente identidad de Ward “ingenua” está dada por  $p_- U(p) = 0$ . Esto debería implicar que  $U(p) = 0$  para todo  $p_-$ , por lo que deberá haber una

anomalía. Entonces podemos calcular  $U(p)$  mediante la evaluación del correspondiente diagrama a un lazo con dos gravitones externos fig.(2.2), lo cual da como resultado

$$\begin{aligned}
U(p) &= -\frac{1}{4} \int \frac{dk_+ dk_-}{(2\pi)^2} (2k+p)_+^2 \frac{k_+ \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} k_\rho p_\sigma\right)}{k_+ k_- + i\varepsilon} \\
&\times \frac{(k+p)_+ \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho k_\sigma\right)}{(k+p)_+ (k+p)_- + i\varepsilon} \delta(p+p') \cdot \exp\left(i(p+p')x\right) \\
&= -\frac{1}{4} \int \frac{dk_+ dk_-}{(2\pi)^2} (2k+p)_+^2 \frac{1}{k_- + i\varepsilon/k_+} \frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right)}{(k+p)_- + i\varepsilon/(k+p)_+} \cdot \delta(p+p') \cdot \exp\left(i(p+p')x\right),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Donde hemos utilizado la regla de Feynman (2.6) para calcular  $U(p)$ .

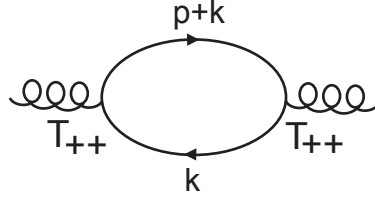


Figura 2.2: Diagrama noconmutativo a un lazo con dos gravitones externos.

En las coordenadas del cono de luz el producto de Moyal queda expresado por  $\exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\Theta^{+-}(p'_+ p_- - p'_- p_+)\right)$ . Ahora, mediante métodos analíticos estándar —integración en el plano complejo— el cálculo de las integrales arroja el resultado

$$\begin{aligned}
U(p) &= \frac{i}{8\pi} \int_{-p_+}^0 dk_+ \frac{(2k+p)_+^2}{p_-} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) \delta(p+p') \\
&= \frac{i}{24\pi} \frac{p_+^3}{p_-} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) \exp\left(i(p+p')x\right) \delta(p+p').
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por lo tanto, la identidad de Ward gravitacional anómala está dada por

$$p_- U(p) = \frac{i}{24\pi} p_+^3 \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma \right) \exp (i(p+p')x) \delta(p+p'). \quad (2.30)$$

El cálculo del diagrama de dos gravitones acoplados con fermiones quirales en la teoría noconmutativa viene dado por la acción efectiva

$$\begin{aligned} L_+^{eff}(h_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{192\pi} \int d^2 p d^2 p' \frac{p_+^3}{p_-} h_{--}(p) \\ &\times \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma \right) h_{--}(p') \exp (i(p+p')x) \delta(p+p'). \end{aligned} \quad (2.31)$$

De manera similar al caso conmutativo, en la presente situación no hay forma de agregar contratérminos genéricos  $\Delta L_+^{eff}$  tales que  $L_+^{eff} + \Delta L_+^{eff}$  sea invariante bajo transformaciones generales de coordenadas.

Así, considerando un fermión de Dirac en 1+1 dimensiones, tendremos entonces que la correspondiente acción  $L_D^{eff}$  será la superposición de  $L_+^{eff}$  y su correspondiente término conjugado  $L_-^{eff}$  resultando

$$\begin{aligned} L_D^{eff}(h_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{192\pi} \int d^2 p d^2 p' \left[ \frac{p_+^3}{p_-} h_{--}(p) \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma \right) h_{--}(p') \right. \\ &\left. + \frac{p_-^3}{p_+} h_{++}(p) \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma \right) h_{++}(p') \right] \exp (i(p+p')x) \delta(p+p'). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta acción no es invariante bajo transformaciones infinitesimales generales de coordenadas  $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ , se puede ver que la métrica  $h_{\mu\nu}$  se transforma como  $\delta h_{\mu\nu}(x) = -\partial_\mu \varepsilon_\nu(x) - \partial_\nu \varepsilon_\mu(x)$  o, en el espacio de momentos

$$\delta h_{++}(p) = -2ip_+ \varepsilon_+, \quad \delta h_{+-}(p) = -ip_- \varepsilon_+ - ip_+ \varepsilon_-, \quad \delta h_{--}(p) = -2ip_- \varepsilon_-. \quad (2.33)$$

No obstante en este caso existe un contratérmino que denotamos por  $\Delta L_D^{eff}$  el cual puede ser agregado a la acción efectiva  $L_D^{eff}$  de tal forma que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas generales



$$\begin{aligned}
\Delta L_D^{eff} = & -\frac{1}{192\pi} \int d^2p d^2p' \left[ \frac{p_+^3}{p_-} h_{--}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{--}(p') \right. \\
& + \frac{p_-^3}{p_+} h_{++}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{++}(p') + 2p_+ p_- h_{++}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{--}(p') \\
& - 4p_+^2 h_{--}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{+-}(p') - 4p_-^2 h_{++}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{+-}(p') \\
& \left. + 4p_+ p_- h_{+-}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) h_{+-}(p') \right] \delta(p+p'). \quad (2.34)
\end{aligned}$$

A pesar de la apariencia poco atractiva de esta última ecuación, es fácil ver que esta acción puede ser reescrita en forma compacta de la siguiente manera

$$\Delta L_D^{eff} = -\frac{1}{192\pi} \int d^2p d^2p' \frac{R(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right) R(p')}{p_+ p_-} \delta(p+p'), \quad (2.35)$$

lo cual —después de una integración en la variable  $p'$ — nos da la corrección usual a la contraparte conmutativa de (2.34).

$$\Delta L_D^{eff} = -\frac{1}{192\pi} \int d^2p \frac{R(p) R(-p)}{p_+ p_-}. \quad (2.36)$$

donde  $R(p)$  es la expresión linealizada de la curvatura escalar noconmutativa la cual puede expresarse como  $R(p) = p_+^2 h_{--} + p_-^2 h_{++} - 2p_+ p_- h_{+-}$ .

Hay una corrección cuántica a la ley de conservación  $T_{+-}(p) = 0$ , la cual es válida clásicamente, debido a la introducción del término  $h_{+-}$  dentro de la Lagrangeana de interacción  $\Delta L_D^{eff}$  y tenemos entonces un valor de expectación de  $T_{+-}$  diferente de cero lo cual da origen a una anomalía gravitacional de la forma

$$\langle 2T_{+-}(p) \rangle = -2 \frac{\delta \Delta L_D^{eff}}{\delta h_{+-}(-p)} = -\frac{1}{24\pi} R(p). \quad (2.37)$$

Debido a la conservación del momento lineal, tenemos del análisis de arriba que  $p' = -p$  a través de  $\delta(p+p')$  y el factor de fase  $\exp\left(-i\Theta^{\rho\sigma} p'_\rho p_\sigma\right)$  es igual a uno, por lo que no existe modificación alguna a la anomalía gravitacional en dos

dimensiones en un espacio noconmutativo. Este resultado contrasta enormemente con lo que sucede en  $D = 4$  dimensiones, como vimos en la sección anterior. Las ideas que se discuten en la siguiente sección ayudarán a esclarecer estos resultados.

## 2.4 Anomalías gravitacionales noconmutativas en $D = 4k + 2$

*“O matter, and impertinency mix’d, Reason in madness”. (!Oh mezcla de buen sentido y de absurdo! !Tanta razón en medio de la locura!). (W. Shakespeare, “La tragedia del rey Lear”, Cuarto acto, escena 6.)*

### 2.4.1 Preliminares

En esta subsección calcularé el diagrama a un lazo de  $\frac{D}{2} + 1 = 2k + 2$  gravitones externos con momentum  $p_\mu^{(i)}$  y polarizaciones  $\varepsilon_{\mu\nu}^{(i)}$  con  $i = 1, \dots, 2k + 2$ . En este cálculo seguiremos la referencia [13] usando la prescripción de Adler de un diagrama equivalente con  $2k + 1$  gravitones externos con una única inserción de un factor axial  $\frac{1}{2}(1 - \bar{\Gamma})$  y  $2k + 1$  vértices no anómalos. En lo que sigue asumiremos que el tensor de polarización  $\varepsilon_{\mu\nu}$  el cual está dado por  $\varepsilon_{\mu\nu} = i(p_\mu \varepsilon_\nu - p_\nu \varepsilon_\mu)$  (donde  $\varepsilon_\mu$  es el parámetro involucrado en la transformación de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu$ ) puede factorizarse de la forma:  $\varepsilon_{\mu\nu}^{(i)} = \varepsilon_\mu^{(i)} \cdot \varepsilon_\nu^{(i)}$ .

Por lo tanto, la amplitud a un lazo es proporcional a:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \propto & \text{Tr} \left[ \bar{\Gamma} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} k_\rho (k - p^{(1)} - \dots - p^{(2k+1)})_\sigma \right) (\not{k} + M) \right. \\ & \times \not{\varepsilon}^{(1)} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (k - p^{(1)})_\rho k_\sigma \right) (\not{k} - \not{p}^{(1)} + M) \not{\varepsilon}^{(2)} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (k - p^{(1)} - p^{(2)})_\rho (k - p^{(1)})_\sigma \right) \\ & \times (\not{k} - \not{p}^{(1)} - \not{p}^{(2)} + M) \not{\varepsilon}^{(3)} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (k - p^{(1)} - p^{(2)} - p^{(3)})_\rho (k - p^{(1)} - p^{(2)})_\sigma \right) \\ & \left. \dots \times \not{\varepsilon}^{(2k+1)} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} (k - p^{(1)} - \dots - p^{(2k+1)})_\rho (k - p^{(1)} - \dots - p^{(2k)})_\sigma \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times (\not{k} - \not{p}^{(1)} - \dots - \not{p}^{(2k+1)} + M) \Big], \quad (2.38)$$

donde hemos utilizado la regla de Feynman (2.6) en cada uno de los vértices no anómalos. En la anterior amplitud hemos omitido  $(2k+1)$  factores de la forma  $\frac{1}{p^2 - M^2}$  en cada uno de los vértices no anómalos.

Ahora, con el objeto de eliminar los productos de las matrices de Dirac que aparecen en la amplitud anterior, requerimos que  $\text{Tr}(\bar{\Gamma} \Gamma_{\mu_1} \Gamma_{\mu_2} \dots \Gamma_{\mu_{4k+2}}) = -2^{2k+1} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{4k+2}}$ . De esta manera podemos factorizar la dependencia en el parámetro de noconmutatividad  $\Theta$

$$\mathcal{A} \propto 2^{2k+1} M R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}), \quad (2.39)$$

donde el término  $R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})$  es un factor cinemático el cual depende únicamente de los momenta externos y de los vectores de polarización

$$R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) = -\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{4k+2}} p_{\mu_1}^{(1)} \varepsilon_{\mu_2}^{(1)} p_{\mu_3}^{(2)} \varepsilon_{\mu_4}^{(2)} \dots p_{\mu_{4k+1}}^{(2k+1)} \varepsilon_{\mu_{4k+2}}^{(2k+1)}, \quad (2.40)$$

lo que —evidentemente— deja a  $R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})$  independiente del parámetro noconmutativo  $\Theta$ .

Utilizando la regla de Feynman (2.6) en cada uno de los  $2k+1$  vértices, tenemos que, para el vértice  $i$ -ésimo hay una inserción de un factor:  $-\frac{1}{4} i \varepsilon_{\mu}^{(i)} (p + p')^{\mu} \frac{1}{p^2 - M^2} \exp\left(-\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} p_{\rho} p'_{\sigma}\right)$ , donde  $p$  es el momento entrante y  $p'$  es el momento saliente. La contribución total está “codificada” en la amplitud  $\mathcal{Z}(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}, \Theta)$ . La amplitud total está entonces dada por

$$I_{\frac{1}{2}} = 2^{2k+1} M^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \cdot \mathcal{Z}(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}, \Theta), \quad (2.41)$$

donde  $\mathcal{Z}$  puede ser reinterpretada como la amplitud para un campo escalar cargado de masa  $M$  y carga  $\frac{1}{4}$  en un lazo acoplado a  $(2k+2)$  fotones de momenta  $p^{(j)}$  y tensores de polarización  $\varepsilon^{(i)}$ , dentro de un espacio tiempo noconmutativo.

Entonces toda la información sobre el parámetro noconmutativo está contenida en la amplitud  $\mathcal{Z}$  y lo que necesitamos es una manera de calcular dicha amplitud

$$\mathcal{Z}(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}, \Theta) = \int d^{4k+2}k \frac{\prod_{j=1}^{2k+2} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} \sum_j p_\rho^{(j)} p_\sigma^{(j+1)}\right) \varepsilon \cdot (p_j + p_{j+1})}{\prod_{j=1}^{2k+2} (p_j^2 - M^2)}. \quad (2.42)$$

Como en el caso conmutativo, este problema puede ser resuelto reduciéndolo al cálculo de la amplitud para un diagrama a un lazo con  $2k + 2$  fotones externos interactuando no conmutativamente con un campo escalar complejo masivo con carga  $\frac{1}{4}$  y con propagadores  $i/(p^2 - M^2)$  con la condición de que el  $i$ -ésimo vértice tenga un factor  $-\frac{1}{4}i\varepsilon_\mu^{(i)}(p + p')^\mu \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma\right)$ , donde  $p$  es el momento y  $\varepsilon_\mu^{(i)}$  son los tensores de polarización [13]. El diagrama correspondiente a este proceso está representado en la figura (2.3).

Este problema fue originalmente discutido por Schwinger [2] para el caso conmutativo y usado por Álvarez-Gaumé y Witten [13] para calcular  $\mathcal{Z}$ . En esta tesis seguiremos la misma estrategia para el caso noconmutativo. En la siguiente subsección daremos los detalles del cálculo explícito de esta interacción residual noconmutativa. Básicamente lo que tenemos es una interacción noconmutativa de éstas en cada vértice no anómalo y encontraremos una solución exacta para dicha interacción, aplicándolas finalmente para el cálculo de  $\mathcal{Z}$ . La figura 2.3 en la página siguiente es útil para el cálculo de esta amplitud.

### 2.4.2 Cálculo explícito de la Interacción residual noconmutativa

Comenzaremos con una teoría para un campo escalar complejo de masa  $M$  acoplado a un campo de gauge abeliano en un espacio noconmutativo. Debido a la bosonización no conmutativa, este sistema será equivalente al modelo de Schwinger. El modelo de Schwinger ha sido discutido en el contexto noconmutativo en diversos artículos [56, 57, 58, 59], no obstante, en el presente trabajo seguiremos un procedimiento diferente. Considere la siguiente acción

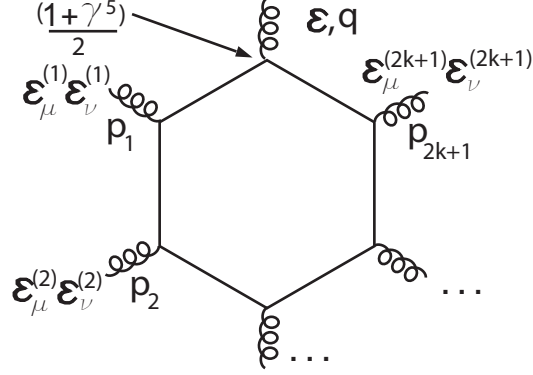


Figura 2.3: Diagrama noconmutativo para  $D = 4k + 2$ .

$$L = \int d^{2p}x (D^\mu \bar{\phi} \star D_\mu \phi + M^2 \bar{\phi} \star \phi), \quad (2.43)$$

con  $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \star \phi$  and  $D_\mu \bar{\phi} = \partial_\mu \bar{\phi} + ie \bar{\phi} \star A_\mu$ . Si utilizamos la definición para el producto estrella  $(f \star g)(x) = f(\xi) e^{\bar{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta g(\eta)}|_{\xi=\eta=x}$ , donde se define  $\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta \equiv \frac{i}{2} \Theta^{\alpha\beta} \overleftarrow{\partial}_\alpha \vec{\partial}_\beta$ . Algunos resultados encontrados por Schwinger [2] fueron usados en la referencia [13] como una herramienta para calcular la anomalía gravitacional en  $4k + 2$  dimensiones para gravitones acoplados a campos de spin  $\frac{1}{2}$ .

El primer término del lado derecho de (2.43) para gravitones acoplados a materia

$$\int d^{2p}x D^\mu \bar{\phi} \star D_\mu \phi = \int \left( \partial^\mu \bar{\phi} + ie \bar{\phi} e^{\bar{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta} A^\mu \right) \left( \partial_\mu \phi - ie A_\mu e^{\bar{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta} \phi \right), \quad (2.44)$$

donde hemos usado la propiedad de ciclicidad de la traza *i.e.*  $\int dx f(x) \star g(x) = \int dx f(x) g(x)$  para todo  $f$  y  $g$ . Expandiendo el lado derecho de esta expresión e integrando por partes, podemos factorizarlo como sigue

$$\int \bar{\phi} \left\{ - \left[ \partial^\mu - ie \left( e^{\bar{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right] \left[ \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\bar{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_\beta} \right) \right] \right\} \phi. \quad (2.45)$$

De manera que la acción original (2.43) resulta ser:

$$L = \int \bar{\phi} \left\{ - \left[ \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right] \left[ \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right] + M^2 \right\} \phi. \quad (2.46)$$

Definamos ahora la función de partición Euclideana para un campo escalar masivo complejo propagándose en un campo electromagnético (constante) de la siguiente forma:

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi][\mathcal{D}\bar{\phi}] \exp(-L), \quad (2.47)$$

entonces la acción efectiva  $\Gamma$  está relacionada a la función de partición en la forma  $Z = e^{-\Gamma}$

$$\Gamma = \text{Tr} \ln \left\{ - \left[ \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right] \left[ \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right] + M^2 \right\}. \quad (2.48)$$

La representación de Schwinger para la función logarítmica puede ser expresada como sigue

$$\Gamma = -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left\{ e^{-s} \left[ - \left( \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right) \left( \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right) + M^2 \right] - e^{-s} \right\}. \quad (2.49)$$

Podemos escribir la intensidad de campo  $F_{\mu\nu}$  del campo electromagnético constante —como es usual en la representación de Schwinger— como una matriz diagonal por bloques y trabajar únicamente con un bloque genérico de dos componentes. Igualmente, tomaremos la siguiente norma:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = Fx^1. \quad (2.50)$$

Debe resaltarse que en esta norma, los órdenes más altos que el primer orden, se desvanecen en la expansión del producto de Moyal. Manteniendo esto en mente podemos calcular la acción efectiva  $\Gamma$  como:

$$\begin{aligned}
\Gamma = & -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sM^2} \exp \left\{ s \left[ (\partial^\mu - ieA^\mu)(\partial_\mu - ieA_\mu) - ie\frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial^\mu\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta + \partial_\alpha A_\mu\partial^\mu\partial_\beta) \right. \right. \\
& ie\frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta A^\mu\partial_\mu + \partial_\beta A^\mu\partial_\alpha\partial_\mu) - e^2 \left( \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(A^\mu\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta - \partial_\alpha\partial_\beta A^\mu A_\mu - \partial_\beta A^\mu\partial_\alpha A_\mu) \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{i}{2} \right)^2 \Theta^{\alpha\beta}\Theta^{\lambda\delta}(\partial_\alpha\partial_\beta A^\mu\partial_\lambda A_\mu\partial_\delta + \partial_\beta A^\mu\partial_\alpha\partial_\lambda A_\mu\partial_\delta + \partial_\beta A^\mu\partial_\lambda A_\mu\partial_\alpha\partial_\delta) \right) \right] \right\} - e^{-s}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Ahora nos enfocamos en el operador exponencial dado por

$$\left[ \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right] \left[ \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right],$$

es necesario únicamente un espacio bidimensional expandido por el bloque correspondiente. Luego de algunas simplificaciones obtenemos que este operador nos da  $\partial_1^2 + \partial_2^2 - ieFx^1\partial_2 + i^2e^2F^2(x^1)^2 + e\Theta F\partial_2^2 - \frac{i}{2}e^2\Theta F^2x^1\partial_2 + \frac{1}{4}e^2\Theta^2F^2\partial_2^2$ . Así que finalmente esto factoriza como

$$\partial_1^2 + \left[ \left( 1 + \frac{e\Theta F}{2} \right) - ieFx^1 \right]^2. \tag{2.52}$$

Ahora, luego de sustituir  $\hat{p}_j = -i\partial_j$  en esta última expresión, obtenemos

$$-\left\{ \hat{p}_1^2 + \left[ \left( 1 + \frac{e\Theta F}{2} \right) \hat{p}_2 - eF\hat{x}^1 \right]^2 \right\}. \tag{2.53}$$

Ahora, con el objeto de encontrar la acción efectiva (2.49) necesitamos calcular, alternativamente

$$I = \text{Tr} \exp \left( -s \left\{ \hat{p}_1^2 + \left[ \left( 1 + \frac{e\Theta F}{2} \right) \hat{p}_2 - eF\hat{x}^1 \right]^2 \right\} \right) \tag{2.54}$$

Considerando el problema en una caja de volumen  $L \times L$  y utilizando la definición de la traza, obtenemos, finalmente

$$I = \left( \int dx_2 \int \frac{dp_2}{2\pi} \right) \text{Tr}_1 \exp \left( -s \left\{ \hat{p}_1^2 + e^2 F^2 \left[ \hat{x}^1 - \left( \frac{1}{eF} + \frac{\Theta}{2} \right) p_2 \right]^2 \right\} \right). \quad (2.55)$$

Así, hemos obtenido la acción efectiva de un oscilador armónico unidimensional. Entonces,  $\left( \frac{1}{eF} + \frac{\Theta}{2} \right) p_2$  con centro efectivo en  $(x_1)_0 = \left( \frac{1}{eF} + \frac{\Theta}{2} \right) p_2$ . La condición de frontera:  $0 \leq p_2 \leq \left( \frac{1}{eF} + \frac{\Theta}{2} \right)^{-1} L$  implica que

$$I = (Vol R^2) \frac{1}{2\pi} \left( \frac{eF}{1 + \frac{\Theta eF}{2}} \right) \text{tr}_y \exp \{ -s(\hat{p}_y^2 + e^2 F^2 \hat{y}^2) \} \quad (2.56)$$

donde  $L = Vol R$ . Esta traza nos proporciona —precisamente— la función de partición de un oscilador armónico ordinario dado por

$$\text{Tr}_y e^{-s(\hat{p}_y^2 + e^2 F^2 \hat{y}^2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sinh(seF)}. \quad (2.57)$$

Obtenemos, finalmente

$$I = (Vol R^2) \frac{1}{4\pi} \left( \frac{eF}{1 + \frac{\Theta eF}{2}} \right) \frac{1}{\sinh(seF)}. \quad (2.58)$$

Entonces la acción efectiva (2.49) está dada por

$$\Gamma \propto - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \prod_{j=1}^p \frac{1}{4\pi} \left( \frac{x_j/2}{1 + \frac{\Theta x_j}{4}} \right) \frac{1}{\sinh(\frac{s x_j}{2})} e^{-s M^2} + \text{constant}, \quad (2.59)$$

donde  $x_j = 2eF$ .

### 2.4.3 Anomalía gravitacional para Campos de spin $\frac{1}{2}$

Usando la ecuación (2.59) concerniente a la amplitud total de la interacción residual, obtenemos

$$\mathcal{Z} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\frac{1}{2} x_j}{\sinh(\frac{s x_j}{2})} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{\Theta x_j}{4}} \right) \exp(-s M^2). \quad (2.60)$$

Luego de una integración en  $s$  obtenemos finalmente



$$\mathcal{Z} = -\frac{1}{(4\pi)^{2k+1}} \frac{1}{M^2} \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{1}{2}x_j)} \left( \frac{1}{1 + \Theta \frac{x_j}{4}} \right). \quad (2.61)$$

Esta ecuación puede también ser reescrita como

$$I_{\frac{1}{2}} = -i \frac{1}{(2\pi)^{2k+1}} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \hat{A}_{\Theta}(X), \quad (2.62)$$

donde

$$\hat{A}_{\Theta}(X) = \prod_{j=1}^{2k+1} \left( \frac{\frac{1}{2}x_j}{\sinh(\frac{1}{2}x_j)} \right) \left( \frac{1}{1 + \Theta \frac{x_j}{4}} \right), \quad (2.63)$$

es el así llamado “roof-genus” noconmutativo. El roof-genus entra en el Teorema de Atiyah-Singer, de manera que, nuestro cálculo conduce —evidentemente— a una deformación noconmutativa del Teorema de Atiyah-Singer.

#### 2.4.4 Anomalía gravitacional para Campos de spin $\frac{3}{2}$

Ahora nos gustaría calcular el diagrama a un lazo de  $2k + 2$  gravitones externos de momento  $p_{\mu}^{(i)}$  y polarizaciones  $\varepsilon_{\mu\nu}^{(i)}$  con  $i = 1, \dots, 2k + 2$  acoplados con Campos de Rarita-Schwinger de spin  $\frac{3}{2}$ . Con el objeto de llevar a cabo este cálculo utilizaremos la prescripción de Adler para encontrar un diagrama equivalente con  $2k+1$  gravitones externos, donde hay una única inserción de un factor axial  $\frac{1}{2}(1 - \bar{\Gamma})$  y  $2k+1$  vértices no anómalos.

Comenzamos con las contribuciones noconmutativas linealizadas de norma fija

$$L_1^{RS} = \frac{1}{4} i h^{\alpha\beta} \star \psi_{\mu} \star \Gamma_{\alpha} \overleftrightarrow{\partial} \left( \frac{1 - \bar{\Gamma}}{2} \right) \psi^{\mu} \quad (2.64)$$

y

$$L_2^{RS} = \frac{1}{2} i G_{\sigma\alpha\nu} \star \bar{\psi}^{\sigma} \star \Gamma^{\nu} \psi^{\alpha}, \quad (2.65)$$

donde  $G_{\sigma\alpha\nu} = (\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu})$ . El análisis de la determinación de la norma involucra la existencia de campos de *ghost* que modifican la amplitud total y que es modificada por  $I_{\frac{3}{2}}(total) = I_{\frac{3}{2}}(gravitino) - I_{\frac{1}{2}}$ .

Usando las reglas de Feynman asociadas a  $L_1^{RS}$  y  $L_2^{RS}$  en cada uno de los  $2k + 1$  vértices, tenemos que, para el  $i$ -ésimo vértice existe la inserción de un factor:  $-\frac{1}{4}i\varepsilon_\mu^{(i)}(p + p')^\mu \frac{1}{p^2 - M^2} \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}p_\rho p'_\sigma\right)$ , donde  $p$  es el momento entrante y  $p'$  es el momento saliente. La contribución completa está “codificada” en la amplitud  $\widehat{\mathcal{Z}}(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}, \Theta)$ . La amplitud total está dada por

$$I_{\frac{3}{2}} = 2^{2k+1}iM^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \cdot \widetilde{\mathcal{Z}}(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}, \Theta), \quad (2.66)$$

donde  $R(\varepsilon^{(i)}p^{(j)})$  es el mismo factor cinemático que (2.40), el cual depende únicamente de los momenta externos y de los vectores de polarización, así que  $\widetilde{\mathcal{Z}}$  puede ser considerada como la amplitud para el acoplamiento de un campo vectorial abeliano noconmutativo —complejo y cargado— en un lazo acoplado a  $2k + 2$  fotones de momenta  $p^{(j)}$  y tensores de polarización  $\varepsilon^{(i)}$  en un espacio tiempo noconmutativo. Esta interacción residual noconmutativa es descrita por las correspondientes interacciones Lagrangeanas

$$L_1^{(res)} = \frac{1}{4}A^\mu \star \bar{\phi}_\sigma \star \partial_\mu \phi^\sigma \quad (2.67)$$

y

$$L_2^{(res)} = \frac{1}{2}G_{\mu\nu} \star \bar{\phi}_\sigma \star \phi^\sigma, \quad (2.68)$$

donde  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{i}{4}[A^\mu, A^\nu]_\star$ . La primera acción (2.67) nos da precisamente la interacción que hemos discutido en la subsección previa y que consiste de  $D$  campos escalares complejos con carga  $\frac{1}{4}$  acoplados a  $2k + 2$  “fotones” noconmutativos. La segunda Lagrangeana (2.68) corresponde a un momento magnético noconmutativo el cual tiene el término usual  $\int d^D x \bar{\phi}^\mu \star (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \star \phi^\nu$  más un término adicional de la forma

$$-\frac{i}{4} \int d^{4k+2}x \bar{\phi}^\mu \star [A_\mu, A_\nu]_\star \star \phi^\nu, \quad (2.69)$$

el cual proviene del término cuadrático de la definición de  $G_{\mu\nu}$ . El término lineal es exactamente el mismo que en el caso de spin  $\frac{1}{2}$  y entonces ambos términos pueden ser reunidos y corresponden con el cálculo de  $\mathcal{Z}$  para el caso de spin  $\frac{1}{2}$  en la subsección previa. De modo que en este caso la única diferencia radica en el término de interacción (2.69). Ahora procederé a calcular dicho término. Utilizaremos la propiedad de ciclicidad de la traza con el objeto de remover el producto  $\star$  que surge del conmutador de Moyal  $[A_\mu, A_\nu]_\star$ . Teniendo esto en mente obtenemos

$$-\frac{i}{4} \int d^{4k+2}x \left\{ \left( \bar{\phi}_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \cdot \left( A^\nu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \phi_\nu \right) - \left( \bar{\phi}_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\nu \right) \cdot \left( A^\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \phi_\nu \right) \right\}. \quad (2.70)$$

Ahora, usando la gauge (2.50) el único término que contribuye es el término de segundo orden en  $\Theta$  en la ecuación (2.70). Reordenando todos los términos e integrando por partes, todos los términos se cancelan idénticamente, lo cual significa que el término cuadrático no contribuye a la amplitud. Entonces, la Lagrangeana que “sobrevive” está dada por

$$L = \int d^{4k+2}x \bar{\phi}^\sigma \star \left\{ - \left[ \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right] \times \left[ \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right] + M^2 - \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \right\} \star \phi_\sigma. \quad (2.71)$$

Así, la acción efectiva se lee como

$$\tilde{\mathcal{Z}} = -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \times \left\{ e^{-s} \left[ - \left( \partial^\mu - ie \left( e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} A^\mu \right) \right) \left( \partial_\mu - ie \left( A_\mu e^{\overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta} \right) \right) + M^2 - \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \right] - e^{-s} \right\}. \quad (2.72)$$

Todos los términos exponenciales se factorizan y podemos ver que el problema se reduce al mismo del cálculo para spin  $\frac{1}{2}$  de la subsección previa más la contribución del factor  $\text{tr} \exp \left( -\frac{1}{2} s F_{(j)}^{\mu\nu} \right) = 2 \cosh(sx_j)$ .

Por lo tanto, obtenemos la amplitud  $\tilde{Z}$  mediante la consideración de la contribución ghost y esto da

$$\tilde{Z} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\frac{1}{2}x_j}{\sinh(\frac{sx_j}{2})} \right) \left( \frac{1}{1 + \Theta \frac{x_j}{4}} \right) \left( -1 + \sum_{i=0}^{2k+1} 2 \cosh(x_i) \right) \exp(-sM^2). \quad (2.73)$$

Después de una integración sobre la variable  $z$  obtenemos, finalmente que

$$\tilde{Z} = - \frac{1}{(4\pi)^{2k+1}} \frac{1}{M^2} \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{1}{2}x_j)} \left( \frac{1}{1 + \Theta \frac{x_j}{4}} \right) \left( -1 + \sum_{i=0}^{2k+1} 2 \cosh(x_i) \right). \quad (2.74)$$

De modo que la amplitud total para los campos de Rarita-Schwinger está dada por

$$I_{\frac{3}{2}}(total) = -i \frac{1}{(2\pi)^{2k+1}} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{1}{2}x_j)} \left( \frac{1}{1 + \Theta \frac{x_j}{4}} \right) \left( -1 + \sum_{i=0}^{2k+1} 2 \cosh(x_i) \right). \quad (2.75)$$

De esta forma, la amplitud total para los campos de Rarita-Schwinger es también modificada por el factor dependiente de  $\Theta$  justamente como en el caso de campos de spin  $\frac{1}{2}$  de la subsección previa.

## 2.5 Anomalías noconmutativas mezcladas

### 2.5.1 Anomalías mezcladas para Campos de spin $\frac{1}{2}$

En esta subsección se calculará la contribución de las anomalías mixtas, las cuales incluyen, no únicamente el acoplamiento de fermiones quirales a la gravedad sino también la contribución de los campos de gauge no abelianos. Las anomalías de gauge noconmutativas para el caso de los campos de Yang-Mills han sido calculadas en varios artículos, véase por ejemplo [23, 25, 26, 28, 29] para diagramas planares con grupo de norma  $U(N)$ .

Consideraremos un espacio tiempo noconmutativo de dimensión par  $D = 2n$  y calcularemos amplitudes a un lazo para  $r$  gluones externos y  $n + 1 - r$  gravitones externos. Ahora nos concentraremos en los diagramas anómalos noconmutativos con  $n + 1 - r$  par. Un resultado reciente concerniente al cálculo de las anomalías de gauge quirales en la Teoría de Yang-Mills en una dimensión par de espacio tiempo ha sido desarrollada a través del uso de la condición de consistencia de Wess-Zumino en la referencia [26]. En el presente trabajo aplicamos el procedimiento de [25]. Para el caso de diagramas no planares se ha desarrollado cierto trabajo previo en [24, 40, 30]. Este análisis puede ser extendido a otros grupos de gauge a través de la introducción del mapeo de Seiberg-Witten como puede verse en las referencias [34, 36, 37, 38, 39].

Antes de proceder a evaluar los diagramas que tienen una contribución importante, revisemos primeramente algunas ideas relevantes de la Teoría de Yang-Mills noconmutativa. Consideremos, para empezar una Teoría de Gauge con conexión hermítica, invariante bajo la simetría del grupo de Lie  $\mathbf{G}$ , con campos de gauge  $A_\mu$  y transformaciones de gauge:  $\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu]$ , con  $\lambda = \lambda^i T_i$ , donde  $T_i$  son los generadores del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  del grupo  $\mathbf{G}$ , en la representación adjunta. En la Teoría de Yang-Mills noconmutativa, el producto de funciones en la variedad de espacio tiempo es promovido al producto de Moyal. Las transformaciones dadas arriba son generalizadas para la teoría noconmutativa como  $\delta_\lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_\star$ , donde los conmutadores en este caso son definidos como  $[A, B]_\star \equiv A \star B - B \star A$ . Debido a la noconmutatividad, un conmutador genérico toma valores en lo que se denomina el Álgebra envolvente universal (o como se conoce en el idioma inglés: *Universal Enveloping Algebra*)  $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \mathbf{R})$  del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  en la representación  $\mathbf{R}$  (para más detalles, véase por ejemplo [60]). En particular,  $[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_\star$  toma valores en el álgebra envolvente universal  $\mathcal{U}(su(N), \mathbf{ad})$  del álgebra de Lie  $su(N)$  (donde, por cierto,  $\mathbf{G} = SU(N)$ ) en la representación adjunta  $\mathbf{ad}$ . Por lo tanto,  $\hat{\lambda}$  y los campos de gauge  $\hat{A}_\mu$  tomarán también valores en esta álgebra. Escribamos por ejemplo  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^I T_I$  y  $\hat{A} = \hat{A}^I T_I$ , entonces,

$$[\widehat{\Lambda}, \widehat{A}_\mu]_\star = \{\widehat{\Lambda}^I, \widehat{A}_\mu^J\}_\star [T_I, T_J] + [\widehat{\Lambda}^I, \widehat{A}_\mu^J]_\star \{T_I, T_J\}, \quad (2.76)$$

donde  $\{A, B\}_\star \equiv A \star B + B \star A$  es el anticonmutador noconmutativo y los índices  $I, J, K$  etcétera, corren sobre el número de generadores del álgebra envolvente. Entonces todos los productos de los generadores  $T_I$  serán necesarios con el objeto de cerrar el álgebra  $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \mathbf{ad})$ . Su estructura puede ser obtenida mediante el cálculo sucesivo de los conmutadores y anticonmutadores comenzando a partir de los generadores de  $\mathcal{G}$ , hasta que el álgebra quede “cerrada”,

$$[T_I, T_J] = if_{IJ}{}^K T_K, \quad \{T_I, T_J\} = d_{IJ}{}^K T_K. \quad (2.77)$$

La intensidad de campo está definida como  $\widehat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widehat{A}_\nu - \partial_\nu \widehat{A}_\mu - i[\widehat{A}_\mu, \widehat{A}_\nu]_\star$ , y por tanto toma valores en  $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \mathbf{ad})$ .

De este modo, las anomalías axiales en  $2n$  dimensiones pueden ser obtenidas mediante el cálculo de la amplitud asociada al diagrama a un lazo con  $r$  gluones externos y  $n + 1 - r$  gravitones externos. En el caso noconmutativo a cada vértice de gluón le tenemos que insertar un término de la forma:

$$-i\Gamma^\mu T_L^I \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}\right) \delta(p_1 + p_2 + k), \quad (2.78)$$

donde  $T_L^I$  es el generador del álgebra envolvente  $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \mathbf{R})$  en la representación  $\mathbf{R}$  proporcionada por los fermiones izquierdos. El factor de la teoría de grupo asociada con un diagrama dado es:  $\text{Tr}(T_L^{I_1} \cdot T_L^{I_2} \cdots T_L^{I_r})$ . Luego de que este factor es extraído, en cada vértice de gluón tendremos un factor dado por

$$-i\Gamma^\mu \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}\right) \delta(p_1 + p_2 + k). \quad (2.79)$$

Por otra parte en cada vértice de gravitón, tenemos que insertar el factor

$$-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\Gamma_\mu\left(\frac{1-\bar{\Gamma}}{2}\right)(p+p')_\nu \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu} p_\mu p'_\nu\right).$$

El álgebra de matrices  $\Gamma$  de Dirac puede ser desarrollada y entonces tenemos que la traza no distingue los vértices del gravitón y del gluón. Por lo tanto, el factor

cinemático  $R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})$  es exactamente el mismo que antes. Luego de esto, el vértice del gravitón corresponde al de un campo escalar masivo complejo de carga  $\frac{1}{4}$  interactuando con “fotones”, lo cual da origen a una teoría efectiva noconmutativa de campos escalares cargados, acoplados a fotones externos del mismo tipo del que fue descrito en la sección previa. Luego de hacer los cálculos pertinentes del álgebra de Dirac y de la traza en los índices de grupo para el vértice del gluón (2.78) tenemos  $-i \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}p_{1\rho}p_{2\sigma}\right)$ . Este vértice noconmutativo restante corresponde al acoplamiento de un campo escalar a los mencionados escalares complejos masivos. Por lo tanto, los diagramas restantes están constituidos de campos escalares externos y fotones acoplados con campos escalares complejos, con los propagadores usuales  $i/(p^2 - M^2)$ , los cuales obedecen interacciones noconmutativas.

De manera similar a lo que ocurre en el caso conmutativo, ahora tenemos que restringir la fórmula de la traza a la traza simétrica dado que la noconmutatividad “respeta” la simetría bajo permutaciones de las líneas externas como puede verse en la referencia [61]. Por tanto, el factor  $\mathcal{Z}'$  es dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'(\Theta) = & -\text{STr}\left[T_L^{I_1}T_L^{I_2}\dots T_L^{I_r}\exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}\sum_{\ell=1}^{r-1}p_{1\rho}^\ell p_{2\sigma}^\ell\right)\right] \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^r \int \frac{ds}{s} \prod_{j=1}^{2k+1} \left[\frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{sx_j}{2})} \frac{1}{(1+\Theta\frac{x_j}{4})}\right] \exp(-sM^2), \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde la derivada establece, como en el caso conmutativo, que el vértice  $-i \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}p_{1\rho}p_{2\sigma}\right)$  puede ser obtenido a través de una derivada con respecto a la masa al cuadrado  $M^2$ , *i.e.*  $\frac{i}{p^2-M^2}(-i)\frac{i}{p^2-M^2} = \frac{\partial}{\partial M^2}\left[\frac{i}{p^2-M^2}\right]$ . Aquí  $\text{STr}$  es la traza simetrizada en el factor correspondiendo a la amplitud de gauge y es construida mediante la inserción, en cada vértice, de un factor:  $-i\Gamma^\mu \exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\rho\sigma}\ell_\rho^{(j)}\ell_\sigma^{(j+1)}\right)$ . Entonces la traza simetrizada está dada por

$$\text{Tr}\left[T_L^{I_1}T_L^{I_2}\dots T_L^{I_r}\right] \left\{ \cos \frac{\ell^{(1)}\Theta\ell^{(2)}}{2} \cdot \cos \frac{\ell^{(3)}\Theta\ell^{(4)}}{2} \dots \cos \frac{\ell^{(r-1)}\Theta\ell^{(r)}}{2} + \text{las permutaciones} \right\},$$

donde  $\ell^{(i)}\Theta\ell^{(i+1)} \equiv \Theta^{\rho\sigma}\ell_\rho^{(i)}\ell_\sigma^{(i+1)}$ .

Por ejemplo, para  $r = 4$  tenemos que

$$\text{Tr}[T_L^{I_1} T_L^{I_2} T_L^{I_3} T_L^{I_4}] \left\{ \cos \frac{\ell^{(1)} \Theta \ell^{(2)}}{2} \cdot \cos \frac{\ell^{(3)} \Theta \ell^{(4)}}{2} + \cos \frac{\ell^{(1)} \Theta \ell^{(3)}}{2} \cdot \cos \frac{\ell^{(2)} \Theta \ell^{(4)}}{2} \right. \\ \left. + \cos \frac{\ell^{(1)} \Theta \ell^{(4)}}{2} \cdot \cos \frac{\ell^{(2)} \Theta \ell^{(3)}}{2} \right\}.$$

Luego de una integración en  $s$  obtenemos finalmente que la mezcla total de la anomalía está dada por

$$I'_{\frac{1}{2}} = -\text{STr} \left[ T_L^{I_1} T_L^{I_2} \dots T_L^{I_r} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} \sum_{\ell=1}^{r-1} p_{1\rho}^\ell p_{2\sigma}^\ell \right) \right] \\ \times \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\frac{1}{2} x_j}{4\pi \sinh(\frac{1}{2} x_j)} \frac{1}{(1 + \Theta \frac{x_j}{4})}. \quad (2.81)$$

La interpretación de la anomalía de gauge es justo como en el caso de la anomalía de gauge quiral en la teoría de Yang-Mills. En el caso del grupo de norma  $U(N)$ , como se describió en la referencia [26], la noconmutatividad impone condiciones más restrictivas para la cancelación de la anomalía. Así, para que una teoría de gauge noconmutativa esté libre de anomalías, dicha teoría deberá ser, necesariamente, no quiral. En cuatro dimensiones, las teorías de campos de norma quirales noconmutativas con grupo  $U(N)$ , con materia; son libres de anomalías; pero esto ya no puede ser cierto en dimensiones mayores. Por ejemplo en el caso presente de  $D = 4k + 2$  dimensiones, se ha demostrado [26] que para la materia adjunta, la anomalía quiral no se desvanece y es precisamente  $2N$  veces la anomalía en la representación fundamental.

### 2.5.2 Anomalía mezclada para Campos de spin $\frac{3}{2}$

En una forma totalmente análoga al caso de las anomalías mezcladas noconmutativas de campos de gauge y gravitacionales acoplados a campos de materia quirales y complejos de spin  $\frac{1}{2}$ , podemos calcular las anomalías mezcladas para el caso de spin  $\frac{3}{2}$ . Entonces tenemos



$$\begin{aligned}
\tilde{Z}'(\Theta) &= -\text{STr} \left[ \tilde{T}_L^{I_1} \tilde{T}_L^{I_2} \dots \tilde{T}_L^{I_r} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} \sum_{\ell=1}^r p_{1\rho}^\ell p_{2\sigma}^\ell \right) \right] \\
&\times \left( \frac{\partial}{\partial M^2} \right)^r \int \frac{ds}{s} \prod_{j=1}^{2k+1} \left[ \frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{sx_j}{2})} \frac{1}{(1 + \Theta \frac{x_j}{4})} \right] \left( -1 + \sum_{i=0}^{2k+1} 2 \cosh(x_i) \right) \exp(-sM^2).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Luego de una integración en  $s$  se tiene, finalmente que

$$\begin{aligned}
I'_{\frac{3}{2}} &= -\text{STr} \left[ \tilde{T}_L^{I_1} \tilde{T}_L^{I_2} \dots \tilde{T}_L^{I_r} \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} \sum_{\ell=1}^r p_{1\rho}^\ell p_{2\sigma}^\ell \right) \right] \\
&\times \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\frac{1}{2}x_j}{4\pi \sinh(\frac{1}{2}x_j)} \frac{1}{(1 + \Theta \frac{x_j}{4})} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2 \cosh(x_i) \right),
\end{aligned} \tag{2.83}$$

donde  $\text{STr}$  denota la traza como fue definida en la subsección previa, es decir es construída mediante la inserción, en cada vértice, de un factor:  $-i\Gamma^\mu \exp \left( -\frac{i}{2} \Theta^{\rho\sigma} \ell_\rho^{(j)} \ell_\sigma^{(j+1)} \right)$ .

## Capítulo 3

# Efectos de la interacción noconmutativa $\lambda\Phi_{\star}^4$ en la evaporación de un hoyo negro en dos dimensiones.

*“Mi distinguido señor, en este mundo no es tan fácil poner en claro estas cosas evidentes. Siempre he encontrado que estas cosas evidentes son las más enredadas de todas”. (H. Melville, “Moby Dick”, cap. LXXXV).*

### 3.0.3 Antecedentes de la radiación de agujeros negros

Desde la segunda mitad de la década de los 70's, se ha escrito una gran cantidad de trabajos sobre la cuantización de campos libres en espacios de fondo curvos. En esos años la motivación fundamental para considerar tales campos era la creciente evidencia de que éstos podían emitir radiación en la cercanía de un campo de gravedad muy intenso [62]. No obstante, los trabajos relacionados con campos interactuantes no han sido tan numerosos. En la ref. [65] puede verse uno de los trabajos más detallados sobre campos cuánticos interactuantes en espacios curvos. Una de las di-

ficultades que surgen en esta área es que los cálculos de las teorías perturbativas se complican notablemente. Paralelamente queda el problema de definir los estados de vacío en diferentes regiones de dichos espacios curvos. Para una revisión moderna de la radiación de Hawking y campos cuánticos en espacios curvos pueden consultarse las referencias [63] y [93].

Por otra parte, en los últimos años se ha notado un creciente interés en los efectos de la geometría noconmutativa en diferentes modelos cosmológicos. Esto es porque la cosmología podría proporcionar una posible manera de probar teorías más allá del modelo estándar de la física de partículas. Un ejemplo de esto puede verse en [66]. Ahí se señala la posibilidad de que una geometría noconmutativa podría inducir fluctuaciones en el proceso de inflación, modificando las relaciones de dispersión a distancias cortas. En este trabajo la gravedad no es afectada por la noconmutatividad, manteniéndose como un “expectador”.

Asimismo, ha habido novedosos intentos de explorar las consecuencias de la noconmutatividad en un espacio tiempo de Schwarzschild. La idea de la noconmutatividad en las coordenadas del espaciotiempo ha estado en la literatura desde hace años [67].

En [68] se obtiene el horizonte de eventos de un agujero negro en un espacio tiempo noconmutativo, desarrollando un cálculo perturbativo a segundo orden. Debido a que este tipo de agujero negro es no rotante, no se presentan correcciones a primer orden en el parámetro de noconmutatividad [69]. En algunos de los trabajos recientes, los efectos del espaciotiempo noconmutativo son codificados en algunas propiedades de un agujero negro de Schwarzschild como son el área del horizonte de eventos y la temperatura de Hawking. La desviación de esas propiedades de sus valores usuales depende del parámetro de noconmutatividad [70].

Recientemente se ha estudiado algunos modelos cosmológicos en los cuales tanto la gravedad como los campos de materia son noconmutativos. Esto es descrito en el famoso modelo de Connes-Lott [71]. Otra discusión de la materia noconmutativa propagándose en un espaciotiempo dinámico noconmutativo (linealizado) puede verse en la referencia [72]. Aquí son calculadas las anomalías gravitacionales

en varias dimensiones, incluyendo el cálculo de la cancelación de anomalías en supergravedad en diez dimensiones.

Motivado por esta línea de razonamiento, en el presente capítulo estudiaré el efecto de la noconmutatividad en el flujo de radiación en un agujero negro de Schwarzschild obtenido al considerar una interacción del tipo  $\lambda\Phi_\star^4$  en los campos escalares de materia. De esta parte del trabajo de tesis recientemente se ha aceptado para su publicación el artículo [73].

### 3.1 Radiación en un agujero negro bidimensional con interacción $\lambda\Phi^4$

El descubrimiento de que en el horizonte de eventos de un agujero negro se emite radiación es atribuido generalmente a Stephen Hawking [62]. Existe, sin embargo, evidencia de que *Yakov Zeldovich* e *Igor Novikov* tenían un modelo bastante desarrollado de la solución desde 1971, como puede verse en la referencia [74]. Como refiere Kip Thorne en este libro, una de las limitantes —en el caso de Zeldovich— para hallar la respuesta correcta, se debió a que en ese tiempo no se contaba con una teoría sobre las leyes que rigen los campos cuánticos en espacios curvos. En la segunda mitad de la década de los años 70 esta situación cambió drásticamente. A partir de entonces y hasta la fecha, el número de trabajos sobre la cuantización en espacios curvos se ha incrementado notablemente. Una revisión detallada y actual de este tópico puede verse en [75]

En su trabajo sobre la radiación de agujeros negros publicado en 1975 [62], Hawking consideró un modelo de campos de materia no interactuantes dentro de una geometría clásica (descrita por la métrica de Schwarzschild). El ejemplo más simple que uno podría considerar es el de una partícula neutra de spin cero con masa  $m$  descrita por un campo real de Klein-Gordon la cual se propaga en la región I del diagrama de Penrose (fig. A.1) del espacio tiempo de Schwarzschild extendido. Este campo satisface la ecuación

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - m^2\Phi = 0, \quad (3.1)$$

donde

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu((-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) \quad . \quad (3.2)$$

En ausencia de interacciones entre los campos de materia, el agujero negro emitirá partículas con una temperatura  $T = 1/8\pi M$  [62]. El estado de esta radiación será de un flujo de partículas salientes a la temperatura citada. La pregunta que surge a continuación es si dicha emisión permanece inalterada cuando se toman en cuenta las autointeracciones entre los campos. Ahora, para un agujero negro inmerso en un baño térmico a la temperatura  $T = 1/8\pi M$ , existen argumentos (ver por ejemplo [76] para anticipar que la radiación seguirá siendo térmica. Esto no es del todo inesperado. El lector interesado puede consultar la referencia [77] (éste es uno de los primeros trabajos en tratar el tema). Por el principio del balance detallado uno puede esperar que los decaimientos u otros procesos causados por la interacción sean compensados precisamente por sus inversos cuando los flujos entrantes y salientes son ambos de naturaleza térmica y están a la misma temperatura. Si la emisión de un agujero negro fuese no térmica en el interior de un baño térmico, la segunda ley de la termodinámica podría ser violada, i.e. el agujero negro emitiría radiación no térmica de baja entropía mientras absorbe radiación térmica de alta entropía resultando en un decremento neto de entropía en el sistema completo. Sin embargo, cuando el agujero negro no se encuentra en equilibrio con sus alrededores —y por tanto el flujo entrante no tiene la misma temperatura que el agujero negro— uno no espera, obviamente, que el flujo saliente sea térmico. Consideremos por ejemplo el caso en que la masa del agujero negro se mantenga constante. Las densidades de energía de las radiaciones entrante y saliente son entonces las mismas. Si la radiación entrante es no térmica (baja entropía) entonces la radiación saliente puede ser también no termal, la única restricción termodinámica es que su entropía sea al menos tan grande como la de la radiación entrante. Para una revisión actualizada sobre la radiación de agujero negro puede consultarse [78].

Para un agujero negro en cuatro dimensiones rodeado por el vacío, la densidad de energía de la radiación emitida decrece a medida en que se expande en el exterior del agujero negro. Para un flujo de partículas en equilibrio térmico la temperatura de equilibrio está determinada por la densidad. Para un campo no interactuante, sin embargo, el espectro emitido permanece térmico con la temperatura original del agujero negro, una temperatura que es demasiado alta para una densidad de energía siempre decreciente.

Cualquier interacción del campo tendría como efecto una distorsión del espectro y un decremento de la energía media de los “cuantos” emitidos. Esta dilución de la densidad de energía que ocurre en cuatro dimensiones, no sucede en un modelo bidimensional de agujero negro. Aún en la presencia de interacciones, un flujo saliente de naturaleza térmica permanecerá en equilibrio consigo mismo. Sin embargo, los flujos entrante y saliente pueden interactuar entre sí. Podemos considerar ambos flujos como dos baños térmicos separados entre sí. Si están a la misma temperatura de  $T = 1/8\pi M$ , están en equilibrio y el balance detallado se puede aplicar para mantener la naturaleza térmica del espectro.

La presencia de un agujero negro rompe la invariancia translacional y por lo tanto, la conservación de momento, de manera que es de esperar que ocurran interacciones entre las partículas entrantes y salientes.

Birrel y Davies [79] han investigado la emisión de partículas para un modelo de Thirring bidimensional y encontraron que: ...“para el modelo de Thirring al menos, la radiación emitida es de naturaleza térmica aún en la presencia de interacciones”. Este resultado sorprendente parece ser consecuencia de la invariancia conforme del modelo de Thirring. Dado que cualquier espacio bidimensional es conformalmente plano, existe un análogo conforme de la conservación de momento lo cual previene cualquier interacción entre los flujos salientes y entrantes.

Para encontrar justificación física para el último enunciado, se ha propuesto introducir una interacción del tipo  $\lambda\Phi^4$  para un campo escalar sin masa en presencia de un agujero negro bidimensional como puede verse en el trabajo [80].

En la presente tesis examinaremos dicho enfoque. Tratando de mantener esta

tesis como un trabajo “autocontenido”, daré a continuación una breve introducción al enfoque utilizado en esta referencia. Luego de la introducción procederé a explicar como puede “deformarse” el producto entre operadores en la interacción. En esencia, se propone reemplazar el producto usual entre los operadores que representan al campo escalar en la interacción  $\lambda\Phi^4$  por una nueva interacción de la forma  $\lambda\Phi^4_\star = \lambda\Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi$  y ver el efecto que produce esta nueva interacción en el flujo de partículas salientes.

Como hemos visto anteriormente los campos escalares sin masa  $\Phi$  satisfacen la ecuación de “onda”

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right)=0, \quad (3.3)$$

Por otra parte, la métrica de un agujero negro bidimensional (ver apéndice) está dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dudv, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde  $u$  y  $v$  se definen en el Apéndice A como  $u = t - r^*$ ,  $v = t + r^*$  y  $r^*$  es la coordenada “tortuga” definida en el apéndice:

$$r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (3.5)$$

Ahora consideremos la solución de la ec.(3.3). Podemos, expresar estos campos de la forma

$$\Phi(u, v) = \Phi_{\mathbf{O}}(u) + \Phi_{\mathbf{I}}(v), \quad (3.6)$$

donde  $\Phi_{\mathbf{O}}$  y  $\Phi_{\mathbf{I}}$  son campos que dependen de las coordenadas  $u$  y  $v$  respectivamente. Los subíndices indican que se trata de campos salientes ( $\mathbf{O}$ ) o entrantes ( $\mathbf{I}$ ) como se verá enseguida. Con el objeto de cuantizar el campo, se expanden estas soluciones en

modos normales así como usando operadores de creación y destrucción “apropiados” para estos modos. La expansión más simple viene dada en términos de las ondas planas

$$\chi_\omega = N \frac{e^{-i\omega v}}{(2|\omega|)^{1/2}} \quad , \quad (3.7)$$

para los modos entrantes, y

$$\psi_\omega = N \frac{e^{-i\omega u}}{(2|\omega|)^{1/2}} \quad , \quad (3.8)$$

para los modos salientes. De manera que las componentes en la ec.(3.6) pueden expandirse

$$\Phi_{\mathbf{I}} = \sum_{\omega>0} (b_\omega \chi_\omega + b_\omega^\dagger \chi_\omega^*) \quad , \quad (3.9)$$

$$\Phi_{\mathbf{O}} = \sum_{\omega>0} (C_\omega \psi_\omega + C_\omega^\dagger \psi_\omega^*) \quad . \quad (3.10)$$

En lo que resta de la tesis adoptamos esta convención para los campos que representan partículas entrantes y salientes, respectivamente. En las ecuaciones (3.7) y (3.8) hemos introducido el parámetro  $N$  el cual es un factor de normalización que no depende de la frecuencia.

Para dar significado a estas expresiones debemos interpretar cada uno de los operadores. Definiremos el estado de vacío de los estados de campos entrantes como aquél estado  $|s\rangle$  para el cual

$$b_\omega |s\rangle = 0 \quad , (\omega > 0) \quad . \quad (3.11)$$

Los estados correspondientes  $|s'\rangle$  definidos con el operador  $C_\omega$  representan el vacío para estados de partículas salientes, i.e.,

$$C_\omega |s'\rangle = 0, \quad (\omega > 0). \quad (3.12)$$



Como es usual,  $|s\rangle$  and  $|s'\rangle$  están relacionadas a través de una transformación de *Bogoliubov*. En esos términos, el flujo térmico de partículas salientes del agujero negro con frecuencia  $\omega$  corresponde al valor de expectación del operador de número  $C_\omega^\dagger C_\omega$ , i.e.

$$\frac{dF}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{tr}(\rho C_\omega^\dagger C_\omega) \quad , \quad (3.13)$$

donde  $\rho$  es la matriz de densidad. Ésta se construye de la siguiente forma:

$$\rho = \rho_O \otimes \rho_I \quad ,$$

donde

$$\rho_O = |0\rangle\langle 0| \quad , \quad (3.14)$$

$$\rho_I = \bigotimes_{\omega} \sum_{n_\omega} e^{-n_\omega \omega \beta'} |n_\omega\rangle_I \langle n_\omega|_I \quad , \quad (3.15)$$

y  $|n_\omega\rangle_I$  es el estado de  $n$  “cuantos” en el modo entrante con energía  $\omega$  a temperatura  $\beta'$ .

Ahora examinaremos qué es lo que sucede cuando introducimos un término de *autointeracción* para el campo escalar  $\Phi$ . En particular estamos interesados en el valor esperado del flujo de partículas salientes. Utilizando el cuadro de interacción, la matriz de densidad evoluciona [81] a través de una matriz  $S$  de manera que

$$\rho(t) = S(t)\rho(0)S^\dagger(t) \quad , \quad (3.16)$$

donde  $\rho(0)$  la matriz de densidad inicial y  $S$  es una matriz de evolución que definiremos en la siguiente sección.

## 3.2 Correcciones noconmutativas al Flujo de radiación

*“Hay algunas empresas en que el método adecuado es un desorden cuidadoso”. (H. Melville, “Moby Dick”, cap. LXXXII)*

A continuación introducimos una autointeracción noconmutativa para los campos en nuestro modelo de agujero negro bidimensional. La interacción será del tipo  $\lambda\Phi_\star^4 \equiv \lambda\Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi$ . El significado de la operación  $\star$  será, asimismo explicado en esta sección. Las coordenadas  $u$  y  $v$  dependen de las coordenadas canónicas noconmutativas  $(r, t)$  de la forma usual  $u = t - r^*$  y  $v = t + r^*$  donde la coordenada  $r^*$  se definió previamente. Por lo tanto los campos  $\Phi$  dependen de las coordenadas noconmutativas  $x^\mu = (r, t)$ , i.e.  $[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}$ . Entonces promovemos todos los productos de las funciones de los modos normales en productos estrella [18]. Es natural entonces definir el producto de Moyal

$$(\Phi_1 \star \Phi_2)(x) \equiv \left[ e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_{\xi\mu}\partial_{\eta\nu}} \Phi_1(x + \xi)\Phi_2(x + \eta) \right]_{\xi=\eta=0}, \quad (3.17)$$

donde  $\Theta^{\mu\nu} = \Theta\varepsilon^{\mu\nu}$  es la matriz determinada por el parámetro noconmutativo  $\Theta$ .

Ahora introducimos la interacción noconmutativa, modificando las ecuaciones para  $S(t)$  dadas en [80] como sigue

$$S^*(t) = \text{T exp} \left[ -i \int^t H_I^*(t') dt' \right], \quad (3.18)$$

donde el Hamiltoniano noconmutativo  $H_I^*(t)$  está dado por

$$\begin{aligned} H_I^*(t) &= \int \frac{\lambda}{4} \Phi_1 \star \Phi_2 \star \Phi_3 \star \Phi_4 \, dr \\ &= \frac{\lambda}{4} \int dr \left( \Phi(x_1) \star \Phi(x_2) \right) \left( \Phi(x_3) \star \Phi(x_4) \right) \\ &= \frac{\lambda}{4} \int dr e^{-\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_1 \Theta^{12} \overrightarrow{\partial}_2} e^{-\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_3 \Theta^{34} \overrightarrow{\partial}_4} \Phi(x_1) \Phi(x_2) \Phi(x_3) \Phi(x_4). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Consideremos ahora el diagrama de la siguiente página que representa la interacción  $\lambda\Phi_\star^4$  de los campos escalares. El término de interacción (figura( 3.1)) debe ser simétrico bajo la permutación de cualquier par de campos. Por lo tanto deberemos simetrizar la última expresión [18, 61] para obtener

$$\frac{\lambda}{12} \int dr F(\Theta) \cdot \Phi(x_1) \Phi(x_2) \Phi(x_3) \Phi(x_4), \quad (3.20)$$

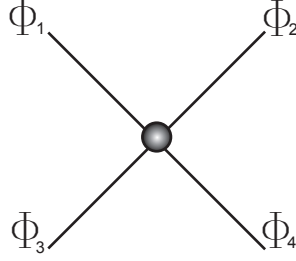


Figura 3.1: Representación gráfica de la interacción noconmutativa entre los campos.

donde

$$F(\Theta) = \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_2}{2} \cos \frac{\partial_3 \Theta \partial_4}{2} + \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_3}{2} \cos \frac{\partial_2 \Theta \partial_4}{2} + \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_4}{2} \cos \frac{\partial_2 \Theta \partial_3}{2}. \quad (3.21)$$

donde se introdujo la notación  $\partial_i \Theta \partial_j \equiv \overleftarrow{\partial}_i \Theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j$ . Por lo que, a nivel de la interacción, la corrección noconmutativa únicamente introduce un factor de fase  $F(\Theta)$  dado por los términos de los cosenos. Este factor es el que se introduce en el vértice de la interacción —fig.(3.1)—.

Al mismo tiempo, vemos de la ec.(3.18), que la corrección noconmutativa al Hamiltoniano de interacción, se refleja también en la evolución de la matriz de densidad. Procediendo de manera análoga a la sección 3.1 tenemos que el flujo de partículas ec.(3.13) se verá como

$$\begin{aligned} \frac{dF^*}{d\omega}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{tr} \left( \rho(t) \star C_\omega^\dagger C_\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{tr} \left( S^*(t) \rho(0) S^{*\dagger}(t) C_\omega^\dagger C_\omega \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $S^*(t) = 1 + S_1^*(t) + S_2^*(t) + \dots$ . Debido al hecho de que  $\rho(0)$  y  $C_\omega$  son independientes de las coordenadas locales  $r$  y  $t$  y que  $S^*(t)$  depende únicamente de  $t$ , el producto de Moyal no aparece en la ec. (3.22).

Calculando  $S^*$  a segundo orden en el parámetro  $\lambda$  y demandando que  $S^*S^{\dagger} = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dF^*}{d\omega}\right|_2(\omega) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger} [C_{\omega}^{\dagger} C_{\omega}, S_1^*] \right| \alpha \right\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha} (n_{\omega\beta} - n_{\omega\alpha}) \left| \left\langle \beta \left| S_1^* \right| \alpha \right\rangle \right|^2,\end{aligned}\quad (3.23)$$

donde usamos el hecho que  $\{|\alpha\rangle\}, \{|\beta\rangle\}$  son conjuntos de estados ortogonales y completos del campo  $\Phi$ . Son seleccionados de manera tal que serán eigenestados del operador de número para cada uno de los modos de  $\Phi$ . Aquí  $p_{\alpha}$  denota las funciones de probabilidad térmicas para los estados  $|\alpha\rangle$  en la matriz de densidad  $\rho(0)$ . Además  $n_{\omega\alpha}$  y  $n_{\omega\beta}$  representan el número de “cuantos” salientes de energía  $\omega$  en los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$ , respectivamente. La expresión:  $|\langle\beta|S_1^*|\alpha\rangle|^2$  representa la probabilidad de transición del sistema, que, iniciando en el estado  $|\alpha\rangle$  evoluciona hasta un estado final  $|\beta\rangle$  bajo la interacción noconmutativa y, finalmente,  $n_{\omega\beta} - n_{\omega\alpha} \equiv \Delta n_{\omega}$  es la diferencia en el número de partículas salientes de energía  $\omega$  durante el proceso.

En la derivación de la ec. (3.23) hemos usado el hecho de que

$$S_1^* + S_1^{\dagger} = 0, \quad (3.24)$$

$$S_1^* \star S_1^{\dagger} + S_2^{\dagger} + S_2^* = 0. \quad (3.25)$$

Aquí,  $S_1^*$  sólo depende de la coordenada  $t$ , por lo que el producto de Moyal, en este caso, se reduce al producto usual.

Por otra parte si introducimos la ecuación (3.21) en  $S_1^*$  y  $S_1^{\dagger}$ , tenemos que las correcciones noconmutativas empiezan a segundo orden en el parámetro  $\Theta$ . Entonces las correcciones noconmutativas provienen del término de interacción noconmutativo  $\lambda\Phi_{\star}^4$ . Los campos escalares pueden ser expandidos en modos ortogonales cuya base está dada por las ondas planas en la ec. (3.8)

Los intentos de calcular correcciones usando la exponencial completa se ven impedidos por el hecho de que los campos escalares contienen, a su vez, funciones

exponenciales —ecs.(3.7, 3.8)— por lo que se presentan derivadas a todos los órdenes. Como un cálculo exacto no es posible adoptamos aquí una expansión perturbativa en  $\Theta \ll 1$ . Para ser concretos calculamos la corrección noconmutativa de orden más bajo, la cual será cuadrática en  $\Theta$ .

De manera que ahora el producto de los campos en la interacción  $S_1^*(t)$  queda

$$S_1^*(t) = -\frac{i}{4} \int^t \lambda \left( \Phi_1 \star \Phi_2 \star \Phi_3 \star \Phi_4 + \text{permutaciones} \right) dr' dt', \quad (3.26)$$

aquí “permutaciones” denota la suma de todas las permutaciones que provienen de la ec. (3.20), la cual es manifestamente simétrica en el intercambio de cualquier par de campos (véase ec. (3.30) más adelante).

En la siguiente sección calcularemos la primera corrección noconmutativa distinta de cero, la cual es una corrección a segundo orden en la expansión de productos de Moyal para el Hamiltoniano de interacción  $H_I^*$ . Por lo tanto podemos escribir

$$H_I^* = H_I + H_I^{NC}[\Theta^2] + \mathcal{O}[\Theta^4], \quad (3.27)$$

donde  $H_I^{NC}[\Theta^2]$  estará dado por la ec. (3.44) (ver más adelante). Si sustituímos esta última expresión en  $S_1^*$  obtenemos

$$S_1^* = S_1 + S_1^{NC}[\Theta^2] + \mathcal{O}[\Theta^4], \quad (3.28)$$

con  $S_1$  denotando la acción conmutativa usual descrita en la referencias [80, 82]. Aquí  $S_1^{NC}[\Theta^2]$  está dada por

$$S_1^{NC}[\Theta^2] = -i \int H_I^{NC}[\Theta^2] dt. \quad (3.29)$$

En la siguiente sección vamos a considerar las correcciones noconmutativas al flujo de partículas salientes de un agujero negro.

### 3.3 Corrección a segundo orden noconmutativa al Hamiltoniano $H_I^*$

Hemos mencionado que la corrección noconmutativa al Hamiltoniano de interacción a primer orden en el parámetro de noconmutatividad  $\Theta$  puede ser calculada y desaparece. Para ver que esto es así tomemos la interacción  $\lambda\Phi_\star^4$  con los productos de los campos simetrizados de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \int dr \lambda \Phi_\star^4 &= \frac{\lambda}{6} \int dr \left( \Phi_1 \star \Phi_2 \cdot \Phi_3 \star \Phi_4 + \Phi_1 \star \Phi_2 \cdot \Phi_4 \star \Phi_3 + \Phi_2 \star \Phi_1 \cdot \Phi_3 \star \Phi_4 \right. \\ &+ \Phi_2 \star \Phi_1 \cdot \Phi_4 \star \Phi_3 + \Phi_1 \star \Phi_3 \cdot \Phi_2 \star \Phi_4 + \Phi_1 \star \Phi_3 \cdot \Phi_4 \star \Phi_2 \\ &+ \Phi_3 \star \Phi_1 \cdot \Phi_2 \star \Phi_4 + \Phi_3 \star \Phi_1 \cdot \Phi_4 \star \Phi_2 + \Phi_1 \star \Phi_4 \cdot \Phi_2 \star \Phi_3 \\ &+ \left. \Phi_1 \star \Phi_4 \cdot \Phi_3 \star \Phi_2 + \Phi_4 \star \Phi_1 \cdot \Phi_2 \star \Phi_3 + \Phi_4 \star \Phi_1 \cdot \Phi_3 \star \Phi_2 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por supuesto, esta ecuación es equivalente a la ec. (3.20).

Sabemos que los productos de Moyal dependen de  $\Theta^{\mu\nu}$  el cual es antisimétrico y por lo tanto los términos como  $\Phi_1 \star \Phi_2 \cdot \Phi_3 \star \Phi_4$  y el correspondiente  $\Phi_1 \star \Phi_2 \cdot \Phi_4 \star \Phi_3$  en la expresión dada arriba, son el negativo uno de otro a primer orden en  $\Theta$ , y por lo tanto se cancelan. Igualmente ocurre para el resto de los pares de términos de la expresión dada arriba. Concluimos que la corrección noconmutativa al flujo de partículas —ec. (3.21)— tendrá una primera corrección distinta de cero a segundo orden en  $\Theta$ .

La amplitud noconmutativa  $\langle \beta | S_1^* | \alpha \rangle$  dada en la ec.(3.23) para el flujo de radiación saliente a segundo orden en  $\lambda$  puede calcularse de varias formas. Una de ellas es usando una representación diagramática. En la siguiente sección veremos esto. Veremos que aparecen términos que contienen elementos de matriz de  $S_1$  y de  $S_1^{NC}$  a segundo orden en  $\Theta$ . Hay que resaltar que para calcular las correcciones noconmutativas al flujo de partículas salientes a todos los órdenes en  $\Theta$ , podemos utilizar una vez más los diagramas propuestos originalmente por [80]. Dichos diagramas se verán modificados por la interacción noconmutativa como ya se mencionó

en la sección previa —véase la figura 3.1 y ecs.(3.20 y 3.21)—. La mayor parte de los términos pueden ser calculados de manera directa, aún cuando los pasos intermedios son laboriosos.

De la ecuación 3.21 se tiene que

$$\cos\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right)^2\right] + \mathcal{O}[\Theta^4]. \quad (3.31)$$

y usando la expansión en serie de potencias para la función  $\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

para el primer sumando de la expresión entre corchetes de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right) &= \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)^4 + \dots\right] \\ &\times \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right)^4 + \dots\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial_1\Theta\partial_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\partial_3\Theta\partial_4}{2}\right)^2\right] + \mathcal{O}[\Theta^4] \end{aligned} \quad (3.32)$$

y desarrollando los términos de la forma

$$\begin{aligned} (\partial_1\Theta\partial_2)^2 &\equiv (\overleftarrow{\partial}_{\mu 1}\Theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_{\nu 2})^2 \\ &= \Theta^2(\overleftarrow{\partial}_1\overrightarrow{\partial}_2 - \overleftarrow{\partial}_2\overrightarrow{\partial}_1)^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

con resultados similares para  $(\partial_3\Theta\partial_4)^2$ , etcétera. Sustituyendo la última expresión en la ec.(3.21) tenemos que, la primera contribución noconmutativa no nula viene dada por

$$-\frac{\Theta^2}{8}\Phi(x_1)\left[\overleftarrow{\partial}_r^2\overrightarrow{\partial}_t^2 - 2\overleftarrow{\partial}_r\overleftarrow{\partial}_t\overrightarrow{\partial}_r\overrightarrow{\partial}_t + \overleftarrow{\partial}_t^2\overrightarrow{\partial}_r^2\right]\Phi(x_2)(\Phi(x_3)\Phi(x_4)), \quad (3.34)$$

donde los  $\Phi(x_i) = \Phi_{\mathbf{I}}(x_i) + \Phi_{\mathbf{O}}(x_i)$  fueron dados anteriormente. Para calcular los términos que aparecen en la última ecuación usaremos que

$$\partial_t^2 \psi_{\omega_i} = -\omega_i^2 \psi_{\omega_i} , \quad (3.35)$$

$$\partial_r \partial_t \psi_{\omega_i} = \omega_i^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \psi_{\omega_i} , \quad (3.36)$$

$$\partial_r^2 \psi_{\omega_i} = i\omega_i \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(i\omega_i - \frac{2M}{r^2}\right) \psi_{\omega_i} , \quad (3.37)$$

para los modos salientes —con expresiones análogas para los complejos conjugados  $\psi_{\omega_i}^*$ —. De manera similar tenemos que

$$\partial_t^2 \chi_{\omega_i} = -\omega_i^2 \chi_{\omega_i} , \quad (3.38)$$

$$\partial_r \partial_t \chi_{\omega_i} = -\omega_i^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \chi_{\omega_i} , \quad (3.39)$$

$$\partial_r^2 \chi_{\omega_i} = i\omega_i \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(i\omega_i + \frac{2M}{r^2}\right) \chi_{\omega_i} , \quad (3.40)$$

para los modos entrantes  $\chi_{\omega_i}$  —con expresiones análogas para los complejos conjugados  $\chi_{\omega_i}^*$ —. A continuación evaluaremos las derivadas que aparecen en la ec.(3.34), por ejemplo, para el primer término, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) \overleftarrow{\partial}_r^2 \overrightarrow{\partial}_t^2 \Phi(x_2) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \left\{ \omega_1^2 \Phi(x_1) \omega_2^2 \Phi(x_2) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2M}{r^2} \left[ (\omega_1 \Phi(x_1)) (\omega_2^2 \Phi(x_2)) - 2\omega_1 (b_1^\dagger \chi_1^* + C_1 \psi_1) (\omega_2^2 \Phi(x_2)) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.41)$$

De manera similar calculamos el término que contiene las derivadas cruzadas

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) 2 \overleftarrow{\partial}_r \overleftarrow{\partial}_t \overrightarrow{\partial}_r \overrightarrow{\partial}_t \Phi(x_2) &= \\ -2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \left\{ [\omega_1^2 \Phi(x_1) - 2\omega_1^2 \Phi_{\mathbf{I}}(x_1)] [\omega_2^2 \Phi(x_2) - 2\omega_2^2 \Phi_{\mathbf{I}}(x_2)] \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Procediendo de manera análoga con el último término de la ec.(3.34) obtenemos

$$\Phi(x_1) \overleftarrow{\partial}_t^2 \overrightarrow{\partial}_r^2 \Phi(x_2) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \left\{ \omega_1^2 \Phi(x_1) \omega_2^2 \Phi(x_2) \right.$$



$$-i\frac{2M}{r^2}\left[\left(\omega_1^2\Phi(x_1)\right)\left(\omega_2\Phi(x_2)\right)-2\omega_1^2\Phi(x_1)\omega_2\left(b_2^\dagger\chi_2^*+C_2\psi_2\right)\right]\Big\}, \quad (3.43)$$

Si ahora sumamos todas las contribuciones anteriores y sustituímos en la ec.(3.21) la corrección noconmutativa al Hamiltoniano queda

$$\begin{aligned} H_I^{NC}(\Theta^2) &= -\int dr \frac{\lambda\Theta^2}{96}\Phi(x_1)\left[\overleftarrow{\partial}_r^2\overrightarrow{\partial}_t^2-2\overleftarrow{\partial}_r\overleftarrow{\partial}_t\overrightarrow{\partial}_r\overrightarrow{\partial}_t+\overleftarrow{\partial}_t^2\overrightarrow{\partial}_r^2\right]\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)+\text{permut.} \\ &= -\int dr \frac{\lambda\Theta^2}{24}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\sum_{\omega_1,\omega_2}\left\{\omega_1^2\Phi_I(x_1)\omega_2^2\Phi_O(x_2)+\omega_1^2\Phi_O(x_1)\omega_2^2\Phi_I(x_2)\right. \\ &\quad \left.+i\frac{M}{r^2}\left[\omega_1\left(b_1^\dagger\chi_1^*+C_1\psi_1\right)\left(\omega_2^2\Phi(x_2)\right)+\left(\omega_1^2\Phi(x_1)\right)\omega_2\left(b_2^\dagger\chi_2^*+C_2\psi_2\right)\right]\right\}\Phi(x_3)\Phi(x_4)+\text{permut.} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Y procediendo de manera similar para el término  $\Phi(x_3)(\partial_3\Theta\partial_4/2)^2\Phi(x_4)$  queda una ecuación igual pero con  $x_1 \rightarrow x_3$  y  $x_2 \rightarrow x_4$ . Aún falta simetrizar, es decir sumar los términos que provienen de  $\cos(\partial_1\Theta\partial_3/2)\cos(\partial_2\Theta\partial_4/2)+\cos(\partial_1\Theta\partial_4/2)\cos(\partial_2\Theta\partial_3/2)$ . Esta es la primera corrección noconmutativa no nula de  $H_I^*$ .

### 3.4 Construcción de los diagramas de la teoría noconmutativa

Para construir diagramas que tienen una correspondencia uno a uno con las diferentes contribuciones a la amplitud  $\langle\beta|S_1^*|\alpha\rangle$ , vamos a utilizar algunas reglas útiles. A continuación daré algunos detalles sobre este método. El lector interesado puede consultar la referencia [80]. Todos los diagramas consisten de un vértice con cuatro líneas convergiendo, o bien dos líneas y un lazo. Las reglas son las siguientes:

1. Se escribe la interacción  $\Phi_\star^4$  ordenado normalmente dentro de la amplitud  $\langle\beta|S_1^*|\alpha\rangle$ . Esta regla se obtiene de la expresión 3.21.
2. Para cada término  $C_\omega\psi_\omega$  dibújese una línea con una flecha apuntando (de izquierda a derecha) hacia el vértice. Esto representa una partícula saliente en el estado inicial.

3. Para cada término  $C_\omega^\dagger \psi_\omega^*$  dibújese una línea con una flecha apuntando (de izquierda a derecha) hacia afuera del vértice. Esto representa una partícula saliente en el estado final.

4. Para cada término  $b_\omega \chi_\omega$  dibújese una línea con una flecha apuntando (de derecha a izquierda) hacia el vértice. Esto representa una partícula entrante en el estado inicial.

5. Para cada término  $b_\omega^\dagger \chi_\omega^*$  dibújese una línea apuntando (de derecha a izquierda) hacia afuera del vértice. Esto representa una partícula entrante en el estado final.

6. Para los términos  $\chi_{\omega_1}^* \star \chi_{\omega_2} \delta_{\omega_1, \omega_2}$  ó  $\psi_{\omega_1}^* \star \psi_{\omega_2} \delta_{\omega_1, \omega_2}$  obtenidos en el ordenamiento normal de  $\Phi$ , dibújese un lazo unido al vértice.

Los diferentes diagramas utilizados de acuerdo a la presencia de partículas entrantes y/o salientes y en los estados inicial y/o final se representan en la figura 3.2 dada en la siguiente página.

Para encontrar las diferentes contribuciones al flujo de partículas  $\frac{dF^*}{d\omega}|_2$  que provienen de los diversos diagramas descritos arriba, seguiremos los siguientes reglas:

(i) Se forman los elementos de matriz entre los estados  $\langle \beta |$  y  $|\alpha \rangle$  de los cuatro operadores  $b$ 's y  $C$ 's en forma normalmente ordenada para las cuatro “patas” del diagrama.

(ii) Se multiplica por  $(i/4) \int dr dt$  las funciones que provienen de cada una de las cuatro patas del diagrama.

(iii) Se multiplica por un factor entero que es el número de veces que se repite dicho término en el ordenamiento normal de  $\langle \beta | \lambda \Phi_\star^4 | \alpha \rangle$ . En la evaluación de éste, está presente el factor de simetrización  $\left[ \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_2}{2} \cos \frac{\partial_3 \Theta \partial_4}{2} + \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_3}{2} \cos \frac{\partial_2 \Theta \partial_4}{2} + \cos \frac{\partial_1 \Theta \partial_4}{2} \cos \frac{\partial_2 \Theta \partial_3}{2} \right]$ .

(iv) Tómesese el cuadrado del resultado de los pasos anteriores.

(v) Multiplíquese el resultado del inciso (iv) por  $\Delta n_\omega p_\alpha / \pi$  y tómesese la suma sobre todos los estados  $|\alpha \rangle$  y  $|\beta \rangle$ .

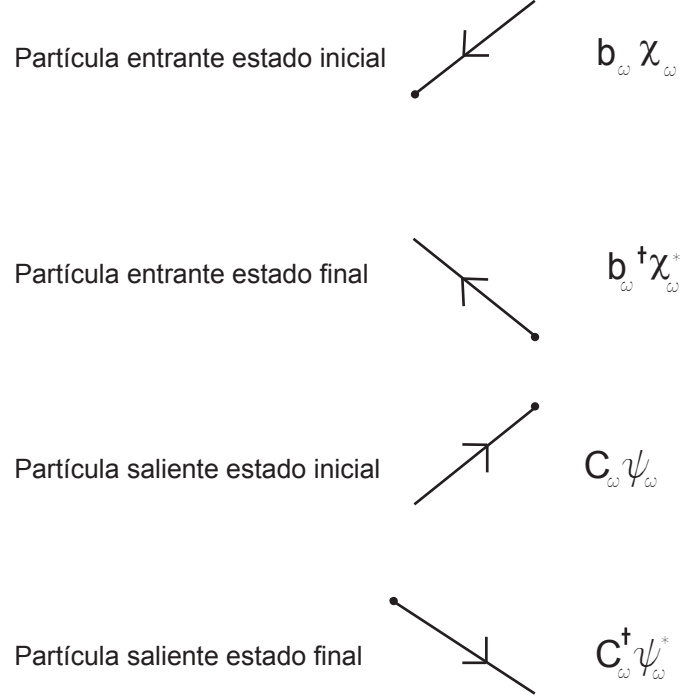


Figura 3.2: Diagramas básicos para representar la interacción.

(vi) Se suma finalmente sobre todos los valores de  $\omega_i$  diferentes de  $\omega$ .

Un detalle que vale la pena mencionar es que únicamente consideraremos la contribución de diagramas que en los cuales  $|\Delta n_{\omega}| = 1$ . La razón es la siguiente: Las integrales de las funciones de modo contienen términos de la forma

$$\int e^{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t} dt \approx \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \quad , \quad (3.45)$$

Este es el principio de conservación de la energía. Esto restringe a  $|\Delta n_{\omega}|$  a los valores 0, 1, 2 ó 3 ya que  $|\Delta n_{\omega}| = 4$  violaría la conservación de energía a menos que  $\omega = 0$ .  $|\Delta n_{\omega}| = 0$  no contribuye al flujo de partículas y  $|\Delta n_{\omega}| = 2$  ó 3 han sido evaluados en la referencia [80] y se encuentra que sus contribuciones no cambian los resultados obtenidos. De manera que todos los diagramas con  $\Delta n_{\omega} = +1$  representan los

inversos de los procesos en los que  $\Delta n_\omega = -1$ . De hecho la relación entre ambos diagramas es muy simple pues podemos obtener uno del otro mediante una reflexión respecto al eje vertical y, finalmente, invirtiendo el sentido de todas flechas.

Es posible ver [80] que los únicos diagramas que contribuyen a la amplitud  $\left. \frac{dF^\star}{d\omega} \right|_2(\omega)$  son los que se enumeran en la figura 3.3 de la siguiente página, los cuales pueden calcularse explícitamente usando las expresiones (3.23) ó (3.23).

La mayor parte de los diagramas —con excepción del No.10— tienen cuatro patas externas y convergen en un vértice. En la siguiente sección veremos cómo es que se utiliza esta diagramática.

### 3.5 Cálculo del flujo noconmutativo de partículas

En esta sección daremos las correcciones noconmutativas al flujo de partículas salientes. Por ejemplo, para el caso del diagrama No.1 (y su reflexión), si seguimos las reglas descritas en la sección previa, la contribución al flujo da como resultado la siguiente amplitud

$$\begin{aligned}
& \frac{2(12)^2}{16\pi} \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha \left( \left| \left\langle \beta \left| C_\omega^\dagger C_1 C_2 b_3 \right| \alpha \right\rangle \right|^2 - \left| \left\langle \beta \left| C_1^\dagger C_2^\dagger b_3^\dagger C_\omega \right| \alpha \right\rangle \right|^2 \right) \\
& \times \left| \int dr dt \lambda \left[ \psi_1^* \star \psi_2^* \cdot \psi_\omega \star \chi_3^* + \psi_1^* \star \psi_2^* \cdot \chi_3^* \star \psi_\omega + \psi_2^* \star \psi_1^* \cdot \psi_\omega \star \chi_3^* \right. \right. \\
& \quad + \psi_2^* \star \psi_1^* \cdot \chi_3^* \star \psi_\omega + \psi_1^* \star \psi_\omega \cdot \psi_2^* \star \chi_3^* + \psi_1^* \star \psi_\omega \cdot \chi_3^* \star \psi_2^* \\
& \quad + \psi_\omega \star \psi_1^* \cdot \psi_2^* \star \chi_3^* + \psi_\omega \star \psi_1^* \cdot \chi_3^* \star \psi_2^* + \psi_1^* \star \chi_3^* \cdot \psi_2^* \star \psi_\omega \\
& \quad \left. \left. + \psi_1^* \star \chi_3^* \cdot \psi_\omega \star \psi_2^* + \chi_3^* \star \psi_1^* \cdot \psi_2^* \star \psi_\omega + \chi_3^* \star \psi_1^* \cdot \psi_\omega \star \psi_2^* \right] \right|^2, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

donde el último factor representa las contribuciones noconmutativas del diagrama

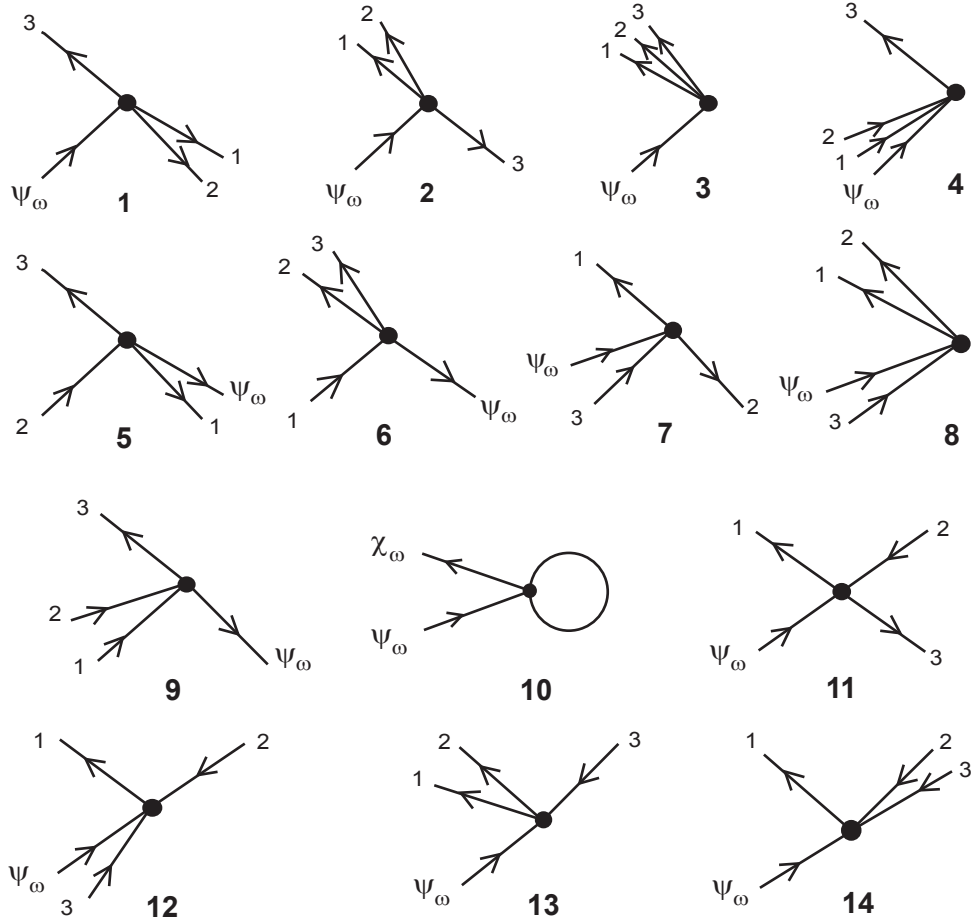


Figura 3.3: Diagramas planares de la teoría noconmutativa que contribuyen al flujo.

No. 1 descrito en la fig.(3.3) así como su “reflexión”. Si sumamos únicamente sobre aquellos subestados  $|\alpha_2\rangle$  que no tienen energías  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ú  $\omega_3$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{18}{\pi} \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\omega_3} \sum_{\alpha_1} p_{\alpha_1} \left( \left| \left\langle \beta \left| C_\omega^\dagger C_1 C_2 b_3 \right| \alpha_1 \right\rangle \right|^2 - \left| \left\langle \beta \left| C_1^\dagger C_2^\dagger b_3^\dagger C_\omega \right| \alpha_1 \right\rangle \right|^2 \right) \\
 & \times \left| \int dr dt \lambda F(\Theta) \cdot \psi_1^* \psi_2^* \psi_\omega \chi_3^* \right|^2, \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

donde  $F(\Theta)$  está dado por la ec. (3.21). La función de probabilidad térmica  $p_{\alpha_1}$  está dada por

$$p_{\alpha_1} = \left(1 - e^{-\beta\omega}\right) \left(1 - e^{-\beta\omega_1}\right) \left(1 - e^{-\beta\omega_2}\right) \left(1 - e^{-\beta'\omega_3}\right) \exp \left[ -\beta \left( k\omega + k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \right) - \beta' k_3\omega_3 \right]. \quad (3.48)$$

Finalmente, evaluando los elementos de matriz nos da

$$\begin{aligned} & \frac{18}{\pi} \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\omega_3} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} k(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) \exp \left[ -\beta \left( k\omega + k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \right) - \beta' k_3\omega_3 \right] \\ & \times \left( e^{(\beta-\beta')\omega_3} - 1 \right) \left| \int dr dt \lambda F(\Theta) \cdot \psi_1^* \psi_2^* \psi_\omega \chi_3^* \right|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por razones de brevedad omitiré en esta sección los detalles del este cálculo. El lector interesado puede consultarlos en [82]. En la expresión anterior, por ejemplo, cada una de las sumas sobre  $k$  y  $k_i$  se evalúa usando apropiadamente la serie geométrica, de manera que la amplitud anterior queda

$$\frac{18}{\pi} g(\omega) \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\omega_3} \left( g(\omega_1) + 1 \right) \left( g(\omega_2) + 1 \right) \left( g'(\omega_3) + 1 \right) \left( e^{(\beta-\beta')\omega_3} - 1 \right) \mathcal{H}_\star(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3.50)$$

donde

$$g(\omega_i) = \left( e^{\beta\omega_i} - 1 \right)^{-1}, \quad g'(\omega_j) = \left( e^{\beta'\omega_j} - 1 \right)^{-1}, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{H}_\star(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left| \int dr dt \lambda F(\Theta) \cdot \psi_1^* \psi_2^* \psi_\omega \chi_3^* \right|^2, \quad (3.52)$$

con  $i, j = 1, 2$ .

La contribución conmutativa usual [80] al flujo de radiación del diagrama descrito arriba viene dada por

$$\frac{9}{2\pi L^2} \frac{g(\omega)}{\omega} \sum_{\omega_1, \omega_2} \sum_{\omega_3} \frac{g(\omega_1) + 1}{\omega_1} \frac{g(\omega_2) + 1}{\omega_2} \frac{g'(\omega_3) + 1}{\omega_3} \left( e^{(\beta-\beta')\omega_3} - 1 \right) H(2\omega_3) \delta_{\omega, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \quad (3.53)$$

donde

$$H(\omega) = \left| \int dr \lambda e^{i\omega r^*} \right|^2 . \quad (3.54)$$

donde usamos el hecho de que  $N = L^{-1/2}$  en ecs. (3.7,3.8). La integral radial  $H(\omega)$  involucra a las dependencias radiales de las funciones de “modo” que provienen de las  $\psi$ 's y  $\chi$ 's de la interacción  $\Phi^4$  (conmutativa).

Ahora procederemos a evaluar  $H(\omega)$ . Se observa un comportamiento divergente para este término cuando  $\omega$  tiende a cero si dejamos que  $\lambda$  sea distinta de cero (para valores de  $r$  arbitrarios). Para regularizar esta divergencia hacemos un corte en la interacción para grandes distancias. Para el agujero negro  $\lambda$  toma la siguiente dependencia espacial [80]

$$\lambda = \lambda_{bh}, \quad \text{para } 2M < r < K \quad (3.55)$$

$$\lambda = 0, \quad \text{para } r > K \quad (3.56)$$

donde  $K \gg 2M$ . Para ver el comportamiento asintótico de  $H(\omega)$  consideremos la expresión [83] para el cuadrado de la función gamma de argumento imaginario

$$\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y} , \quad (3.57)$$

donde  $\Gamma(z)$  se define por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt .$$

Es posible ver que  $H(\omega)$  se puede expresar de esta forma. Para convencernos de que así es, reescribimos  $r^* = r^*(r)$  (tal como se definió en la sección 3.1) y se hace el cambio de variable  $\rho = r - 2M$  en la ec.(3.54) de manera que,  $H(\omega)$  se puede reescribir —usando la identidad (3.57)— como:

$$\begin{aligned} H(\omega) &\simeq \lambda_{bh}^2 \frac{\beta}{2\omega} \left[ \sinh \frac{\beta\omega}{4} \right]^{-1}, \quad \omega \gg \frac{1}{K}, \\ H(\omega) &\simeq \lambda_{bh}^2 K^2, \quad \omega \ll \frac{1}{K}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

así que  $H(\omega)$  tiende a  $\frac{1}{\omega^2}$  en el límite cuando  $\omega \rightarrow 0$ . La divergencia para valores grandes de  $K$  a bajas frecuencias se dá porque —para una dimensión espacial— la densidad de partículas no decrece al incrementar la distancia, de manera que la interacción entre los varios modos continúa con la misma intensidad para distancias arbitrariamente grandes.

Regresemos ahora a la evaluación de la contribución de  $dF/d\omega|_2$  a partir de los diagramas relevantes (que incluyen a los diagramas “inversos”). Para evaluar las sumas sobre las frecuencias, vamos al límite continuo, haciendo tender  $L$  a infinito y reemplazando las sumas por integrales de la forma

$$\sum_{\omega_i} \rightarrow \frac{L}{\pi} \int_{\pi/L}^{\Lambda} d\omega_i \ ,$$

donde  $\Lambda$  es un *corte ultravioleta* introducido para regular cualquier divergencia ultravioleta que pueda ocurrir. Volveremos a este punto más adelante. Todos los diagramas dados en la figura (3.3), salvo el diagrama No.10 tienen expresiones similares a la dada por la ecuación (3.53).

En lo que resta de esta sección haré algunos comentarios acerca de la regularización de las divergencias infrarojas en el flujo  $dF/d\omega|_2$ . Para empezar, es necesario remarcar que para la parte conmutativa estándar del diagrama No.1 dada anteriormente, las divergencias en el infrarojo están dadas por integrales de la forma [80]

$$(A_1 L + B_1 \ln L + C_1)(A_2 L + B_2 \ln L + C_2) \ , \quad (3.59)$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  son funciones que dependen de  $\omega$  exclusivamente. Para ver que esto es así hacemos la expansión en serie de Taylor para cada factor de la ecuación (3.53) y posteriormente se integra término a término reagrupando en potencias de  $L$ . Por ejemplo, para obtener el término “líder” de la ec.(3.59) — $A_1(\omega)A_2(\omega)L^2$ — basta que hagamos tender a cero a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  simultáneamente en la ec.(3.53) como  $\omega_1 = \omega_2 = \pi/L$  ( $L \rightarrow \infty$ ). De esta forma obtenemos

$$\frac{9}{2\pi^3} \left( \frac{g(\omega)}{\omega} \right) \left( \frac{g'(\omega) + 1}{\omega} \right) (e^{(\beta - \beta')\omega} - 1) H(2\omega) \left( \frac{L}{\beta\pi} \right)^2$$



Con mucho, el término que diverge como  $L^2$ , para  $L \rightarrow \infty$ , es el que tiene el peor comportamiento en el infrarojo, los siguientes términos son de la forma:  $L \ln L$  y  $L$  respectivamente. Esto ha sido ya comentado por Leahy en [82]. Discutiré este método con mayor detalle en la subsección **3.6.2**.

A continuación estudiaremos el comportamiento de las distintas contribuciones a las divergencias en esta amplitud, para ello analizaremos la parte noconmutativa a segundo orden en el parámetro  $\Theta$  del diagrama No.1 . En vista de que el resto de los diagramas de cuantropatas tienen contribuciones similares a la amplitud  $dF^*/d\omega|_2$ , solo revisaré en detalle este caso.

Posteriormente estudiaremos las divergencias introducidas por el diagrama de lazo (No. 10).

### 3.6 Contribución del término de interferencia a la amplitud $\frac{dF^*}{d\omega}$

En la sección **3.3** hemos revisado la corrección noconmutativa a segundo orden para la interacción  $H_I^*$ . Vimos que ésta constituye la primera corrección no trivial al Hamiltoniano. Puede verse de las ecs.(3.23 y 3.28), que el flujo noconmutativo toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{dF^*}{d\omega} \Big|_2(\omega) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \left\{ \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger} [N_{\omega}, S_1] \right| \alpha \right\rangle + \Theta^2 \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} [N_{\omega}, S_1] \right| \alpha \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \Theta^2 \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger} [N_{\omega}, S_1^{NC}] \right| \alpha \right\rangle + \Theta^4 \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} [N_{\omega}, S_1^{NC}] \right| \alpha \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Notamos inmediatamente que el primer término del lado derecho en esta última ecuación  $\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \alpha | S_1^{\dagger} [N_{\omega}, S_1] | \alpha \rangle$  es exactamente la amplitud —conmutativa usual— calculada originalmente por Leahy y Unruh [80].

A continuación evaluaremos la contribución de los términos a segundo orden en el parámetro  $\Theta$ . Para esto notamos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} [N_\omega, S_1] \right| \alpha \right\rangle &= \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} N_\omega S_1 \right| \alpha \right\rangle - \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} S_1 N_\omega \right| \alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} \right| \beta \right\rangle \left\langle \beta \left| N_\omega S_1 \right| \alpha \right\rangle - \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} \right| \beta \right\rangle \left\langle \beta \left| S_1 N_\omega \right| \alpha \right\rangle \\
&= n_{\omega\beta} \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} S_1 \right| \alpha \right\rangle - n_{\omega\alpha} \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} S_1 \right| \alpha \right\rangle. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

y de manera análoga:

$$\left\langle \alpha \left| S_1^\dagger [N_\omega, S_1^{NC}] \right| \alpha \right\rangle = n_{\omega\beta} \left\langle \alpha \left| S_1^\dagger S_1^{NC} \right| \alpha \right\rangle - n_{\omega\alpha} \left\langle \alpha \left| S_1^\dagger S_1^{NC} \right| \alpha \right\rangle, \tag{3.62}$$

por lo que al sumar los resultados anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} [N_\omega, S_1] \right| \alpha \right\rangle + \left\langle \alpha \left| S_1^\dagger [N_\omega, S_1^{NC}] \right| \alpha \right\rangle &= n_{\omega\beta} \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} S_1 + S_1^\dagger S_1^{NC} \right| \alpha \right\rangle \\
&- n_{\omega\alpha} \left\langle \alpha \left| S_1^{\dagger NC} S_1 + S_1^\dagger S_1^{NC} \right| \alpha \right\rangle. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

de manera que para encontrar el término de interferencia basta calcular el valor de expectación de la matriz (real)  $S_1^{\dagger NC} S_1 + S_1^\dagger S_1^{NC}$ . De la ec.(3.44) se puede ver que los elementos de matriz de  $S_1^{NC}$  no son los mismos que los de  $S_1$ . Anticipamos que tendremos menos procesos que puedan representarse por medio de los diagramas descritos en la sección **3.4**. Podemos, sin embargo evaluar uno de ellos y analizar el tipo de divergencias que presenta. Esto es precisamente lo que haremos en la siguiente subsección.

### 3.6.1 Diagrama noconmutativo a segundo orden en $\Theta$

En esta subsección analizaré la corrección noconmutativa a la amplitud  $dF^*/d\omega$  proveniente de la “interferencia” entre las matrices  $S_1^{NC}$  y  $S_1$ . Para ello usaremos el procedimiento revisado previamente en las secciones **3.4** y **3.5**. Para ver los

diagramas que contribuyen a la interferencia tomemos los términos que aparecen en el segundo renglón entre corchetes en la ec.(3.44). De aquí y de las ecs.(3.63) y (3.29) podemos ver que el conmutador  $[C_\omega^\dagger C_\omega, S_1^{NC}]$  viene dado por

$$\begin{aligned}
& \int dr dt \frac{i\lambda\Theta^2}{24(1-2M/r)^2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \left\{ \omega_1^2 \omega_2^2 \left[ C_\omega^\dagger C_\omega, \left( \Phi_I(x_1) \Phi_O(x_2) + \Phi_O(x_1) \Phi_I(x_2) \right) \Phi_3 \Phi_4 \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[ C_\omega^\dagger C_\omega, \frac{-iM}{r^2} \left[ \omega_1 \left( b_1^\dagger \chi_1^* + C_1 \psi_1 \right) \left( \omega_2^2 \Phi(x_2) \right) + (1 \leftrightarrow 2) \right] \Phi_3 \Phi_4 \right] \right\} + \text{permut.}, \\
& = \int dr dt \frac{i\lambda\Theta^2}{24(1-2M/r)^2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \omega_1^2 \omega_2^2 \left\{ \left( \Phi_I(x_1) (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) + (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) \Phi_I(x_2) \right) \Phi_3 \Phi_4 \right. \\
& \quad \left. + \left( \Phi_I(x_1) \Phi_O(x_2) + \Phi_O(x_1) \Phi_I(x_2) \right) \left( \Phi_3 (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) + (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) \Phi_4 \right) \right\} \\
& \quad + \Re[C_\omega^\dagger C_\omega, S_1^{NC}] + \text{permutations} \tag{3.64}
\end{aligned}$$

donde usé la notación dada en la referencia [82]:  $\Phi_\omega^- \equiv \psi_\omega^* C_\omega^\dagger$  y  $\Phi_\omega^+ \equiv \psi_\omega C_\omega$ . Una vez más usé la palabra *permutaciones* para denotar el uso de la ec. (3.30). Además  $\Re[C_\omega^\dagger C_\omega, S_1^{NC}]$  corresponde a la parte real de dicho conmutador. La razón para no escribirlo explícitamente es porque  $S_1$  es antihermítico, y cuando sumamos ambas contribuciones del lado izquierdo de la ec. (3.63), dicho término se desvanece.

Ahora procederé a evaluar una de las contribuciones de la ecuación (3.64). Tomamos por ejemplo el término:

$$\frac{i\Theta^2}{24} \int dr dt \lambda \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_I(x_1) \Phi_O(x_2) \Phi_3 (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) + \text{permut.}$$

descomponiendo los campos usando las funciones de modo y la diagramática descrita en la subsección **3.4** puede verse que algunos de los términos que surgen en este producto son  $C_\omega^\dagger b_1 C_2 C_3$  y  $b_1^\dagger C_2^\dagger C_3^\dagger C_\omega$ . Para que su contribución a la amplitud sea diferente de cero, debemos multiplicarlos por los correspondientes productos de operadores provenientes de  $S_1^\dagger$ . Por ejemplo, para el término  $\Theta^2 \langle \alpha | S_1^\dagger [N_\omega, S_1^{NC}] | \alpha \rangle$  dado anteriormente, la expresión correspondiente será

$$\left\langle \alpha \left| \frac{\Theta^2}{96} \int dr' dt' \lambda \Phi'^4 \int dr dt \lambda \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \sum_{\omega_1, \omega_2} \omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_I(x_1) \Phi_O(x_2) \Phi_3(\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) + \text{perm.} \right| \alpha \right\rangle. \quad (3.65)$$

El vértice noconmutativo está contenido en el término de interacción dado por  $[C_\omega^\dagger C_\omega, S_1^\star]$ . Recordadndo la expansión  $S_1^\star = S_1 + S_1^{NC}[\Theta^2] + \mathcal{O}[\Theta^4]$  el diagrama noconmutativo 1 con el vértice relleno, puede ser resuelto en diagramas estándar de Leahy y Unruh [80, 82], pero incluyendo derivadas de orden más alto (ver figura 3.4 más adelante). En el siguiente diagrama hemos ilustrado esto a segundo orden en  $\Theta$ :

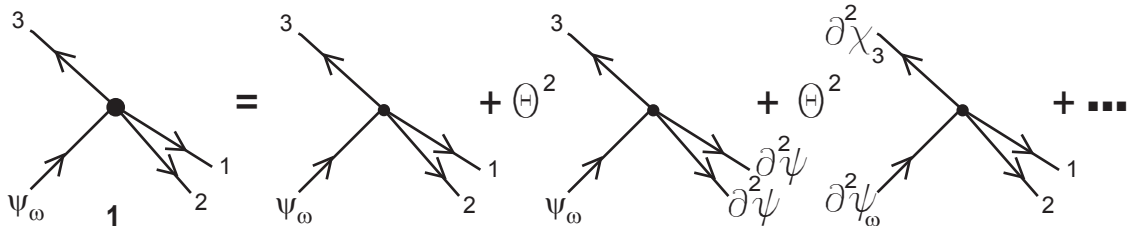


Figura 3.4: Diagrama No.1 noconmutativo a segundo orden en  $\Theta$ .

Es posible ver que el resultado anterior se puede calcular como en la sección 3.5, donde la “información” de la noconmutatividad está contenida en los productos estrella de las funciones de modo. La siguiente amplitud puede calcularse usando el diagrama noconmutativo 3.4 intercambiando las funciones de modo  $\chi_3$  por  $\psi_1$  y viceversa. Repitiendo el procedimiento descrito en la subsección 3.4 para el término de arriba, encontramos la siguiente expresión para esa amplitud

$$\frac{\Theta^2}{96\pi L^2} \frac{g(\omega)}{\omega} \sum_{\omega_1} \sum_{\omega_2} \sum_{\omega_3} \omega_1 \left( g(\omega_1) + 1 \right) \omega_2 \left( g(\omega_2) + 1 \right) \frac{g'(\omega_3) + 1}{\omega_3} \left( e^{(\beta - \beta')\omega_3} - 1 \right) \tilde{H}(2\omega_3) \delta_{\omega, 1+2+3}, \quad (3.66)$$

donde  $g(\omega_i)$  y  $g'(\omega_i)$  fueron definidos anteriormente en la ec.(3.51) y  $\tilde{H}(\omega)$  ahora tiene la siguiente expresión:

$$\tilde{H}(\omega) = \int \lambda^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \exp \left[ i\omega(r^* - r'^*) \right] dr dr'. \quad (3.67)$$

Un aspecto importante que hay que remarcar es que cerca del horizonte de eventos del hoyo negro la función  $\tilde{H}(\omega)$  no se desvanece, lo cual sí ocurre en el caso conmutativo. Para ver esto recordemos que la expresión usual de  $H(\omega)$  —ec.(3.54)— cuando  $r$  tiende a  $2M$  es

$$\left| \int_{2M}^K dr \lim_{r \rightarrow 2M} \lambda e^{i\omega r^*} \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^K dr^* \lim_{r \rightarrow 2M} \lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{i\omega r^*} \right|^2,$$

donde se usa que  $dr/dr^* = (1 - 2M/r)$ . Lo cual tiene la interpretación de que la interacción —conmutativa usual— de los campos, se desvanece en el horizonte de eventos [82]. No ocurre así con la corrección noconmutativa. Tomemos por ejemplo la contribución de la amplitud noconmutativa dada por ec.(3.65)

$$\frac{\Theta^2 \lambda^2}{96\pi} \int dt dt' \int dr^* dr'^* \left(1 - \frac{2M}{r'}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left\langle \alpha \left| \Phi'^4 \sum_{\omega_1, \omega_2} \omega_1^2 \omega_2^2 \Phi_I \Phi_O \Phi_3 (\Phi_\omega^- - \Phi_\omega^+) \right| \alpha \right\rangle, \quad (3.68)$$

podemos notar que no desaparece en el horizonte de eventos. Procediendo como en el caso conmutativo previo vemos que esto puede ser explicado si vemos la contribución de  $\tilde{H}(\omega)$  a la amplitud noconmutativa en el límite cuando  $r \rightarrow 2M$  y  $r' \rightarrow 2M$  in ec. (3.67) tenemos que

$$\int_{-\infty}^K \lim_{r' \rightarrow 2M} dr'^* \lambda \left(1 - \frac{2M}{r'}\right) e^{-i\omega r'^*} \left\{ \int_{-\infty}^K dr^* \lim_{r \rightarrow 2M} \lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^{i\omega r^*} \right\}, \quad (3.69)$$

lo cual en general no se cancela. En general este límite depende de las sucesiones con las que nos “aproximemos” al punto  $r = 2M, r' = 2M$ . Si tomamos los límites iterados tendremos que  $\tilde{H}(\omega)$  diverge. Una manera de evitar esta divergencia sería elegir  $\lambda$  de manera apropiada para eliminar el término  $(1 - 2M/r')^{-1}$ . Sin embargo dicho procedimiento no tiene una justificación física clara. Una situación similar ha sido ya revisada en [80] para el caso de un espacio plano.

Lo anterior nos permite afirmar que en el horizonte de eventos existe una contribución noconmutativa del flujo de partículas proveniente de la interferencia entre las matrices  $S_1$  (interacción conmutativa) y  $S_1^{NC}[\Theta^2]$  (corrección noconmutativa a segundo orden en  $\Theta$ ). La única manera de “apagar” el efecto de esta interacción noconmutativa en el horizonte de eventos es tomar el parámetro de no conmutatividad igual a cero ( $\Theta \rightarrow 0$ ). Esto es, que los efectos de la interacción noconmutativa están presentes en todo el espacio-tiempo —incluido el horizonte de eventos—. En base a estas consideraciones, cabe esperar un comportamiento divergente del flujo de partículas justo en el horizonte de eventos proveniente de la corrección puramente noconmutativa  $\Theta^4 \langle \alpha | S_1^{\dagger NC} [N_\omega, S_1^{NC}] | \alpha \rangle$ . Este comportamiento divergente proviene de términos proporcionales a las integrales radiales  $\tilde{H}(\omega)$  en el límite cuando  $r$  tiende a  $2M$ .

Casi todos los diagramas descritos en la figura 3.3 (con excepción del diag. 10) tienen contribuciones similares a la dada en la ec.(3.66). Es claro entonces que los términos divergentes que provienen de  $S_1$  y  $S_1^{NC}$  tienen diferente comportamiento en el infrarojo y que una renormalización como la que se intenta en la subsección 3.6.4 únicamente remueven las divergencias infrarojas del tipo  $L^2$  que provienen de los diagramas conmutativos así como algunas divergencias ultravioleta del tipo  $\ln \Lambda$  y no tiene efecto sobre los que provienen de la expansión de  $S_1^*$  a órdenes mayores en  $\Theta$ .

### 3.6.2 Comportamiento de las divergencias presentes en el término $\langle \alpha | S_1^{\dagger} S_1^{NC} + S_1^{\dagger NC} S_1 | \alpha \rangle$

En esta parte discutiré el comportamiento de las distintas divergencias que surgen al evaluar el flujo noconmutativo a diversos órdenes en  $\Theta$ .

Hemos visto que la corrección conmutativa usual al flujo de partículas [80] está plagada de divergencias infrarrojas. El análisis de dichas divergencias surge al hacer una expansión en series de Taylor de la amplitud  $\langle \alpha | S_1^{\dagger} [N_\omega, S_1] | \alpha \rangle$ . Para ello es conveniente recordar algunas expresiones útiles [82] :

$$\begin{aligned}
\frac{g(\omega_i)}{\omega_i} &= \frac{1}{\beta\omega_i^2} - \frac{1}{2\omega_i} + \dots \\
\frac{g(\omega_i) + 1}{\omega_i} &= \frac{1}{\beta\omega_i^2} + \frac{1}{2\omega_i} + \dots \\
\tilde{H}(2\omega - 2\omega_i) &= \tilde{H}(2\omega) - \omega_i \frac{d\tilde{H}}{d\omega}(2\omega) + \dots \\
\left(1 - e^{[(\beta-\beta')(\omega-\omega_i)]}\right) &= \left(1 - e^{[(\beta-\beta')\omega]}\right) + (\beta - \beta')e^{[(\beta-\beta')\omega]}\omega_i + \dots \\
\frac{g'(\omega - \omega_i) + 1}{\omega - \omega_i} &= \frac{g'(\omega) + 1}{\omega} \left[1 + \left(\frac{\beta'}{e^{\beta'\omega} - 1} + \frac{1}{\omega}\right)\omega_i + \dots\right] \quad (3.70)
\end{aligned}$$

con  $i = 1, 2$ . Sustituyendo estas expresiones en la ec.(3.66) y haciendo  $\omega_3 = \omega - \omega_1 - \omega_2$ , podemos ver que, a diferencia del caso conmutativo, aquí no tenemos una contribución para el término “líder” (aquel que posee el “peor” comportamiento en el infrarrojo). La primera contribución del flujo noconmutativo toma la forma

$$\frac{\Theta^2}{\pi L^2} \frac{g(\omega)}{\omega} \frac{1}{\beta^2} \frac{g'(\omega) + 1}{\omega} \left(e^{(\beta-\beta')\omega} - 1\right) \tilde{H}(2\omega) \quad (3.71)$$

donde usamos que  $\lim_{\omega_i \rightarrow 0} \omega_i \left(g(\omega_i) + 1\right) = 1/(\beta)$ . Esta última expresión se desvanece cuando tomamos el límite continuo (i.e  $L \rightarrow \infty$ ). De donde podemos anticipar que la corrección no conmutativa al flujo debida a la interferencia  $S_1^{NC}$  y  $S_1$  no presentará divergencias infrarrojas. Para calcular el resto de las divergencias de esta contribución es necesario pasar al límite continuo, sustituyendo las sumas infinitas sobre las frecuencias  $\omega_i$  por integrales en las expresiones dadas en la ec.(3.70). Para el caso de la corrección introducida por el término cuártico en  $\Theta$ :  $\Theta^4 \langle \alpha | S_1^{\dagger NC} [N_\omega, S_1^{NC}] | \alpha \rangle$  es posible anticipar —usando las ecuaciones (3.70)— que no se presentarán divergencias infrarrojas sino ultravioleta puras.

Por ejemplo tomemos la ecuación 3.66 que aparece al considerar la interferencia  $S_1^{\dagger NC} S_1$ . Para encontrar las diferentes divergencias que caracterizan esta contribución procederemos de la siguiente forma:

(a) Tomamos  $\omega_1 \neq \omega_2$ . En este caso tenemos que, al pasar al límite continuo la expresión anterior toma la forma

$$\frac{\Theta^2}{96\pi L^2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{g(\omega)}{\omega} \int_{\pi/L}^{\Lambda} \int_{\pi/L}^{\Lambda} d\omega_1 d\omega_2 \omega_1 (g(\omega_1)+1) \omega_2 (g(\omega_2)+1) \frac{g'(\omega - \omega_1 - \omega_2) + 1}{\omega - \omega_1 - \omega_2} \\ \left( e^{(\beta-\beta')(\omega-\omega_1-\omega_2)} - 1 \right) \tilde{H}(2\omega - 2\omega_1 - 2\omega_2), \quad (3.72)$$

donde usamos la conservación de energía  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ . Sustituyendo las expansiones de Taylor para cada factor dadas en 3.70 podemos ver que la primera de las divergencias ultravioleta que se presenta es

$$\frac{\Theta^2}{\pi^4} \frac{g(\omega)}{\omega} \left(\frac{\Lambda}{\beta}\right)^2 \frac{g'(\omega) + 1}{\omega} \left( e^{(\beta-\beta')\omega} - 1 \right) \tilde{H}(2\omega) = \frac{\Theta^2}{\pi^4} F(\omega) \Lambda^2, \quad (3.73)$$

donde  $\Lambda$  es el corte ultravioleta elegido anteriormente. Las divergencias restantes son también ultravioleta.

(b) Ahora  $\omega_1 = \omega_2$ . Ambas partículas salientes tienen la misma frecuencia y por tanto la estadística se modifica. Para ver que esto es así analicemos el factor  $p_\alpha$

$$p_\alpha = (1 - e^{-\beta\omega})(1 - e^{-\beta\omega_1})(1 - e^{-\beta'\omega_3}) \times \exp \left[ -\beta(k\omega + k_1\omega_1) - \beta'k_3\omega_3 \right], \quad (3.74)$$

Procediendo de manera similar al caso anterior puede verse [82] que la contribución al flujo noconmutativo de partículas cuando  $\omega_1 = \omega_2$  está dado por

$$\frac{\Theta^2}{96\pi L^2} \frac{g(\omega)}{\omega} \sum_{\omega_1} \sum_{\omega_3} \frac{g'(\omega_3) + 1}{\omega_3} 2g^2(\omega_1) e^{2\beta\omega_1} \left( e^{(\beta-\beta')\omega_3} - 1 \right) \tilde{H}(2\omega_3) \delta_{\omega, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \quad (3.75)$$

una vez más transformamos las sumas en integrales y usamos la conservación de energía para quitarnos una variable  $\omega = 2\omega_1 + \omega_3$  con lo cual obtenemos

$$\frac{\Theta^2}{96\pi L^2} \left(\frac{L}{\pi}\right) \frac{g(\omega)}{\omega} \int_{\pi/L}^{\Lambda} d\omega_3 \ 2g^2(\omega - \omega_3/2) e^{2\beta(\omega - \omega_3)/2} \frac{g'(\omega_3) + 1}{\omega_3} \left( e^{(\beta-\beta')\omega_3} - 1 \right) \tilde{H}(2\omega_3) \quad (3.76)$$

Esta última expresión no posee divergencias infrarrojas o ultravioleta al tomar el límite cuando  $\omega_3$  tiende a cero.



Se puede concluir que los términos proporcionales a  $\Lambda$ ,  $\Lambda^2$ , etcétera, provenientes de la interferencia son los dominantes en este caso. Estas divergencias ultravioleta puras aparecen a diferentes órdenes de magnitud en el parámetro de no conmutatividad y no es claro que puedan ser renormalizados.

### 3.6.3 Corrección noconmutativa del diagrama de lazo

A continuación revisaré la corrección noconmutativa del diagrama No. 10 de la figura 3.3. Este diagrama es importante porque posee tanto divergencias infrarojas como ultravioletas. Estamos interesados en la parte de  $\Phi^4_\star$  que se acopla a un estado caracterizado por tener un campo entrante ( $\Phi_I$ ) y uno saliente ( $\Phi_O$ ) dados por las ecuaciones (3.9) y (3.10) respectivamente. Analicemos la expansión de  $\Phi^4_\star$  de la siguiente forma

$$\Phi^4_\star = (\Phi_I + \Phi_O)_\star^4 = \Phi_{I\star}^4 + 4\Phi_{I\star}^3 \star \Phi_O + 6\Phi_{I\star}^2 \star \Phi_{O\star}^2 + 4\Phi_I \star \Phi_{O\star}^3 + \Phi_{O\star}^4, \quad (3.77)$$

si tomamos el término  $\Phi_I \star \Phi_{O\star}^3$  y hacemos uso de las propiedades del producto  $\star$  que revisamos en el capítulo 1 de esta tesis, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_I \star \Phi_{O\star}^3 &= \Phi_I \star \Phi_O (\Phi_{O\star})^2 \\ &= \Phi_I \star \Phi_O \left( C_\omega^2 \psi_\omega^2 + C_\omega C_\omega^\dagger \psi_\omega \star \psi_\omega^* + C_\omega^\dagger C_\omega \psi_\omega^* \star \psi_\omega + C_\omega^{\dagger 2} \psi_\omega^2 \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

cuando se tomen los valores de expectación de los campos tendremos que  $\langle \alpha | C_\omega^2 | \alpha \rangle = 0 = \langle \alpha | C_\omega^{\dagger 2} | \alpha \rangle$  quedando

$$\Phi_I \star \Phi_{O\star}^3 \rightarrow \Phi_I \star \Phi_O \left( C_\omega C_\omega^\dagger \psi_\omega \star \psi_\omega^* + C_\omega^\dagger C_\omega \psi_\omega^* \star \psi_\omega \right). \quad (3.79)$$

Procediendo de manera similar con  $\Phi_{I\star}^3 \star \Phi_O$  se puede ver que

$$\Phi_{I\star}^3 \star \Phi_O \rightarrow \left( b_\omega b_\omega^\dagger \chi_\omega \star \chi_\omega^* + b_\omega^\dagger b_\omega \chi_\omega^* \star \chi_\omega \right) \Phi_I \star \Phi_O. \quad (3.80)$$

Entonces la parte de  $\Phi_\star^4$  que contiene el término  $\Phi_I \star \Phi_O$  está dada por

$$\Phi_I \star \Phi_O = 12 \sum_{\omega_1} (\chi_{\omega_1}^\star \star \chi_{\omega_1} + \psi_{\omega_1}^\star \star \psi_{\omega_1}) \quad , \quad (3.81)$$

donde el factor de 12 representa todas las combinaciones en que puede presentarse dicho estado. Haciendo actuar el producto  $\star$  en las funciones de modo que aparecen dentro de la suma, se puede ver que la ecuación anterior queda

$$\Phi_I \star \Phi_O = 12 \sum_{\omega_1} (\chi_{\omega_1}^\star \chi_{\omega_1} + \psi_{\omega_1}^\star \psi_{\omega_1}) \quad , \quad (3.82)$$

donde la última igualdad se da porque  $(\chi_{\omega_1}^\star \star \chi_{\omega_1} + \psi_{\omega_1}^\star \star \psi_{\omega_1}) \equiv (\chi_{\omega_1}^\star \chi_{\omega_1} + \psi_{\omega_1}^\star \psi_{\omega_1})$ . Puede verificarse esta igualdad a cada orden en el parámetro de noconmutatividad.

Es decir que las correcciones noconmutativas introducidas en el diagrama No.10 son provenientes exclusivamente de la energía de los campos que están en las patas externas  $\Phi_I, \Phi_O$ . De manera tal que la ecuación (3.82) contiene a orden cero en  $\Theta$ , el resultado obtenido por Leahy [80]

$$\Phi_I \Phi_O = 12 \sum_{\omega_1} \frac{1}{L\omega_1} \quad . \quad (3.83)$$

En el paper citado [80] se ve que insertando esta expresión en la ecuación para el flujo (conmutativo) de partículas salientes  $dF/d\omega|_2$  —ec.(3.53)— y tomando el límite continuo en la suma

$$\sum_{\omega_1} \frac{1}{L\omega_1} \rightarrow \frac{L}{\pi} \int_{\pi/L}^{\Lambda} \frac{1}{L\omega_1} d\omega_1 \quad ,$$

se tiene que la contribución puramente conmutativa del diagrama No. 10 (y su inverso) al flujo saliente es

$$\left( \frac{-36\lambda^2}{\pi^3} \right) \left( \frac{g(\omega)}{\omega} \right) \left( \frac{g'(\omega) + 1}{\omega} \right) H(2\omega) [1 - \exp((\beta - \beta')\omega)] (\ln \Lambda + \ln L/\pi)^2 \quad . \quad (3.84)$$

el cual puede reescribirse como

$$\frac{36\lambda^2}{\pi^3} f(\omega)(\ln \Lambda + \ln L/\pi)^2 .$$

No obstante, es posible agregar al hamiltoniano de interacción  $H_I$  de la ec.(3.19) un término [80] de la forma  $\delta m^2 \Phi^2$  tal que su contribución a  $dF/d\omega|_2$

$$f'(\omega) \left[ 12 \frac{\delta m^2}{\pi^2} (\ln \Lambda + \ln L/\pi) + 4 \frac{(\delta m^2)^2}{\pi} \right] , \quad (3.85)$$

donde  $f'(\omega)$  tiene la misma forma que en la ec.(3.84) (salvo por un factor constante). De manera que se puede elegir  $\delta m^2$  tal que se remuevan todos los términos proporcionales a este último resultado. Esto remueve las divergencias ultravioleta descritas arriba así como las infrarojas más difíciles (i.e. las que se comportan como  $L^2$ ). Aún quedan términos de la forma  $L$ ,  $KL$  y  $\ln L$ . Se puede intentar regularizar las restantes divergencias infrarojas y ultravioletas, lo que representa una enorme cantidad de cálculo debido a que los restantes términos de la ec. (3.59) contienen una gran cantidad de factores. Esto ha sido ya discutido en [80] y lo mencionaré en las conclusiones de esta tesis.

Tomemos nuevamente el diagrama no.10 noconmutativo, considerando la contribución del proceso que contiene a la interacción de los campos  $\Phi_I \star \Phi_O$ .

$$\Phi_I \star \Phi_O \stackrel{12}{=} \sum_{\omega_1} (\chi_{\omega_1}^* \star \chi_{\omega_1} + \psi_{\omega_1}^* \star \psi_{\omega_1}) = \Phi_I \star \Phi_O \stackrel{12}{=} \sum_{\omega_1} \frac{1}{L\omega_1} , \quad (3.86)$$

Las correcciones noconmutativas que provienen del término  $\Phi_I \star \Phi_O$  pueden ser desarrolladas. A primer orden en  $\Theta$  este último término queda

$$(\Phi_I \star \Phi_O) = \frac{\Theta}{2} \omega^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} (\Phi_I \Phi_O) , \quad (3.87)$$

y para  $r \gg 2M$  se comporta como  $\Theta \omega^2/2$ . Esta última corrección noconmutativa depende exclusivamente de la energía  $\omega$  de las patas externas del diagrama No.10 noconmutativo, por lo que está caracterizada por un diagrama planar. Las divergencias que presenta esta expresión son similares a las encontradas en la ec.(3.84).

### 3.6.4 Renormalización de la masa

Es posible agregar un término de masa de la forma  $\lambda \delta m^2 \Phi_\star^2$  al Hamiltoniano para transformarlo en

$$\begin{aligned} H_I^\star &= \int dr \frac{\lambda}{4} (\Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi + \delta m^2 \Phi \star \Phi + \text{permut.}), \\ &= \int dr \frac{\lambda}{4} (\Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi + \delta m^2 \Phi^2 + \text{permut.}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

por las propiedades del producto  $\star$ . Dicho término no afecta las soluciones del campo libre. Se propaga en la matriz  $S_1$  y no modifica a  $S_1^{NC}$ . Cuando se introduce el término de masa dado en esta última ecuación, el flujo de partículas (conmutativo usual)  $\langle \alpha | \Phi'^4 [C_\omega^\dagger C_\omega, \Phi^4] | \alpha \rangle$  se vé modificado por la adición de los siguientes términos:

$$4\delta m^2 \left( \langle \alpha | \Phi'^2 [C_\omega^\dagger C_\omega, \Phi^4] | \alpha \rangle + \langle \alpha | \Phi'^4 [C_\omega^\dagger C_\omega, \Phi^2] | \alpha \rangle \right) + (4\delta m^2)^2 \langle \alpha | \Phi'^4 [C_\omega^\dagger C_\omega, \Phi^2] | \alpha \rangle . \quad (3.89)$$

El primer término ya ha sido evaluado con anterioridad. Para evaluar los restantes términos se procede de manera análoga a las secciones previas. Es posible ver que los términos que son proporcionales al término de masa tienen una contribución al flujo de partículas de la forma

$$g(\omega) \left( g'(\omega) + 1 \right) \left( \frac{H(2\omega)}{\omega^2} \right) \left( 1 - \exp(\beta - \beta')\omega \right) ,$$

donde las funciones  $g(\omega)$  y  $g'(\omega)$  fueron definidas anteriormente y  $H(2\omega)$  tiene la misma estructura que antes. Es posible elegir  $\delta m^2$  tal que se remuevan todos los términos proporcionales a este último resultado. No obstante esto solamente remueve las divergencias infrarojas más difíciles (i.e. las que se comportan como  $L^2$ ) así como las ultravioleta. La discusión sobre el comportamiento de las divergencias que están presentes en los diagramas incluídos anteriormente, podría repetirse para el resto de los diagramas noconmutativos que provienen del Hamiltoniano de interacción (3.19) y (3.30).

En la sección de conclusiones y perspectivas analizaré brevemente estos resultados.



# Capítulo 4

## Conclusiones y Perspectivas

En la presente tesis hemos estudiado las anomalías gravitacionales axiales y quirales en el contexto de la teoría de campos noconmutativa. Una faceta interesante es que éstas son generalizaciones de altas dimensiones naturales de los estudios de anomalías axiales y de gauge en teorías de gauge noconmutativas. Con el objeto de calcular los efectos noconmutativos hemos usado una linealización de una deformación noconmutativa de la teoría de Einstein [45], pero en principio, podríamos usar una teoría noconmutativa de gravedad. Esta deformación noconmutativa de la gravedad lineal ha sido acoplada a fermiones quirales noconmutativos, asumiendo que ambos, tanto la gravedad como los campos de materia, son deformados con el mismo parámetro de deformación  $\Theta$ . Así, nos enfocamos en la interacción de fermiones quirales y el campo gravitacional. Hemos proporcionado las reglas de Feynman de esta teoría noconmutativa, en particular (2.6) fue la regla necesaria para determinar las anomalías asociadas a los diagramas planares. Anomalías procedentes de diagramas no planares no fueron consideradas en el presente trabajo. La única modificación aparece en los vértices de los diagramas de Feynman y usamos éstos para calcular una serie de procesos que involucran a las anomalías gravitacionales.

Luego de discutir las reglas de Feynman, hemos calculado la contribución noconmutativa a la anomalía axial (ABJ) gravitacional lo que conduce al decaimiento del pión en dos fotones. Esta extensión noconmutativa de la anomalía de Delbourgo-

Salam es obtenida a través del uso adecuado del método de la regularización dimensional, encontrándose que éste da precisamente una deformación noconmutativa de la signatura  $\widehat{\tau}(X)$  lo cual es precisamente el análogo de espacio tiempo a la signatura del grupo desarrollada en la referencia [48].

Como en el caso conmutativo usual, la anomalía de Delbourgo-Salam noconmutativa, no destruye el difeomorfismo o la invariancia de norma de Lorentz local a nivel cuántico. No obstante, la noconmutatividad puede afectar también esas simetrías de gauge así como las transformaciones de Lorentz y las simetrías de difeomorfismos son afectadas en las teorías de campo noconmutativas.

En el caso bidimensional de la anomalía quiral gravitacional pura, hemos calculado la anomalía de difeomorfismos y hemos encontrado que la noconmutatividad no afecta a la acción efectiva  $\Gamma(Q)$  y, por la tanto la anomalía es la misma que en el caso conmutativo usual obtenido en la referencia [13]. Esto es también llevado a cabo en el caso general de  $D = 4k + 2$  dimensiones. Ahí, la anomalía fue obtenida encontrando primero una interacción residual noconmutativa de un campo escalar complejo con un campo de gauge  $U(1)$ . Aquí, como es usual en el caso conmutativo, para cada vértice de acoplamiento hemos trasladado la interacción del gravitón y del fermión quiral, al problema del vértice de un campo escalar complejo acoplado con fotones externos no dinámicos. La acción efectiva es calculada usando una versión noconmutativa bidimensional del modelo de Schwinger. Encontramos una deformación noconmutativa de la acción efectiva dada por las expresiones (2.62) y (2.63). El cálculo de la anomalía para un lazo de fermiones de spin  $\frac{3}{2}$  fue también desarrollada obteniéndose la correspondiente corrección noconmutativa, la cual está dada por la expresión (2.75).

Las anomalías mezcladas fueron también calculadas dentro de este contexto y aquí también encontramos correcciones noconmutativas dadas por (2.81) y por (2.83) para campos de spin  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$  respectivamente.

Existen numerosos tópicos interesantes concernientes a los resultados de este trabajo. Uno de ellos consiste en la aplicación a las diferentes teorías de supergravedad que provienen de las teorías de cuerdas. Sería muy interesante calcular las anomalías

gravitacionales y de gauge de los campos de  $p$ -formas antisimétricos en un fondo no-conmutativo y revisar las condiciones para la cancelación de estas anomalías noconmutativas en supergravedad tipo I y tipo II en diez dimensiones. Antes de intentar resolver estos problemas uno debería, quizá, primeramente plantear el problema de crear una teoría adecuada de una extensión noconmutativa en una teoría de gauge para potenciales de grado más alto y en dimensiones mayores.

Otro problema interesante es el cálculo de anomalías gravitacionales debidas a diagramas no planares siguiendo las referencias [24, 30, 40]. En la presente tesis nos limitamos al cálculo de anomalías de gauge quirales para el grupo  $U(N)$ . Es tentador desde mi punto de vista, extender el cálculo a otros grupos de gauge utilizando el mapeo de Seiberg-Witten como se ha hecho en diferentes trabajos en este sentido [34, 36, 37, 38, 39]. Sería también muy interesante aplicar el mapeo de Seiberg-Witten para el sector gravitacional como se discutió en [42, 43, 48, 49].

Por otra parte, se ha estudiado el efecto de una interacción en un modelo de agujero negro bidimensional. Es bien conocido, a partir de la segunda mitad de la década de 1970, que un agujero negro emite radiación. Este es un resultado ligado al nombre de figuras tan importantes como Zeldovich, Novikov y Unruh [84]. Precisamente Unruh y Leahy [80] fueron los primeros en darse cuenta que si se introduce una interacción de la forma  $\lambda\Phi^4$ , se modifica la naturaleza térmica de la radiación emitida por el agujero negro. Su resultado, sin embargo, está “plagado” de divergencias, principalmente infrarojas. En esta tesis se generaliza los resultados para la expresiones que determinan el tipo de interacción de los campos escalares —ecuaciones (3.18) y (3.19)— y del flujo de radiación —ec.(3.23)—.

En la presente tesis se introdujo una modificación en el producto de operadores, promoviéndose dichos productos en productos “Moyal”. De esta manera se modificó la expresión de la interacción del tipo  $\lambda\Phi^4$  a una interacción noconmutativa  $\lambda\Phi^{\star 4}$  —ver ecs. (3.19) y (3.30)—.

En el cálculo del flujo noconmutativo de partículas se hizo necesario modificar los diagramas “de Feynman”, las cuales se representan gráficamente en la figura (3.3). Éstos diagramas incluyen, de manera natural, a los encontradas por Leahy y



Unruh [80].

Una vez que se introduce dicha modificación, la interacción contiene términos proporcionales al parámetro de noconmutatividad  $\Theta$ , lo cual es de esperarse. En el desarrollo puede verse que se recupera el resultado conmutativo estándar cuando se permite que  $\Theta \rightarrow 0$ . Se hizo el cálculo explícito de la corrección a segundo orden al Hamiltoniano de interacción, ec.(3.44) encontrándose que al ser introducido en la matriz  $S_1^*$  obtenemos la modificación noconmutativa correspondiente —ec.(3.28)— del resultado reportado por [80]. Con esa información se estimó la contribución al flujo noconmutativo a segundo orden en  $\Theta$  proveniente del término de “interferencia” entre las matrices  $S_1^{\dagger NC}[\Theta^2]$  y  $S_1$ . Para ello se eligió uno de los términos de dicha interferencia y se calculó explícitamente su contribución. Se encontró de esa forma una corrección noconmutativa a segundo orden en  $\Theta$  —ver ec. (3.66)— al resultado reportado en el artículo de Leahy y Unruh [80]. Encontramos que la noconmutatividad introduce, por una parte, un cambio en el comportamiento de las divergencias presentes en dicha amplitud. Para ello se desarrolló cada factor de la expresión citada anteriormente en series de Taylor y se integró sobre las energías, de la manera usual. Se vió que la primera de las divergencias ultravioleta es de la forma  $\frac{\Theta^2}{\pi^4} F(\omega) \Lambda^2$  como se ve de la ec.(3.73). El resto de las divergencias son también potencias en el parámetro de corte  $\Lambda$ . En el caso de las correcciones noconmutativas a órdenes mayores en  $\Theta$ , las divergencias presentes en las amplitudes correspondientes presentan todas un comportamiento ultravioleta más acentuado. Esto es debido a la presencia de factores de la forma

$$\int_{\pi/L}^{\Lambda} \omega_i^n d\omega_i = \frac{\Lambda^{n+1}}{n+1},$$

en las amplitudes correspondientes.

Adicionalmente, se encontró que la noconmutatividad tiene el efecto de introducir un flujo distinto de cero en todo el espacio, particularmente en el horizonte de eventos, como puede verse de la expresión ec.(3.67). Esto llama la atención dado que el flujo conmutativo usual se desvanece justo en el horizonte de eventos y para valores de  $r$  mayores que  $2M$  comienza a aparecer gradualmente [82]. Esto es otro

efecto puramente noconmutativo. En la referencia [85] puede verse una discusión similar (ahí se deforma la interacción entre los campos introduciendo el así llamado oscilador armónico deformado). El método de deformación (*q-deformation*) que se sigue en dicho artículo difiere del usado en esta tesis, no obstante encontramos varias coincidencias. La primera de ellas es que el flujo noconmutativo se desvía del espectro térmico usual encontrado por Hawking [62].

Por otra parte, la modificación a la contribución del diagrama de lazo noconmutativo No.10 de la fig.(3.3), produce exclusivamente diagramas planares. Esto puede explicarse porque el efecto de la noconmutatividad solamente se refleja en las “patas externas” de dicho diagrama noconmutativo como puede verse en la ec.(3.82).

## 4.1 Perspectivas

Uno de los problemas más interesantes que surgen en esta tesis —y con mayores implicaciones en física-matemática— consiste en conectar nuestros resultados dados por las ecuaciones (2.62), (2.63) y (2.75) con el teorema del índice de Atiyah-Singer para las familias de operadores elípticos y proporcionar fórmulas explícitas para éstas anomalías noconmutativas en términos de polinomios invariantes los cuales describen clases características de Pontrjagin y de Chern. Los resultados obtenidos en la presente tesis representan buenas expectativas de que dicha continuación es, ciertamente, posible. Esto se deja para un trabajo futuro. Por otra parte, una descripción en términos de la condición de consistencia de Wess-Zumino como se ha hecho en el trabajo de [26] vale la pena para el caso de gravedad. Con el objeto de llevar a cabo esto, la referencia [88] sería una fuente muy importante.

Finalmente, sería muy interesante también, encontrar un enfoque global al estudio de las anomalías, incluyendo anomalías globales gravitacionales (como se propone en [53]) y comparar esto con los resultados dados recientemente por Perrot [89] en el cálculo anomalías gravitacionales noconmutativas, usando diferentes herramientas globales. Este enfoque, no obstante, va más allá de los propósitos del presente trabajo.

Por otra parte, en relación con los resultados del capítulo 3, recientemente se ha propuesto una novedosa derivación de la radiación de agujero negro por Robinson y Wilczek [90]. En esta referencia se estudia la relación entre la radiación saliente de un agujero negro y la cancelación de anomalías gravitacionales en el horizonte de eventos. En dicho artículo se propone que la fuente de la anomalía se localiza precisamente en el horizonte de eventos. Esta región es importante porque ahí la geometría es no singular pero es donde las ecuaciones se simplifican. Analicemos lo siguiente: La radiación saliente de un agujero negro surge cuando se considera la cuantización de la materia en un espacio tiempo de fondo que contiene un horizonte de eventos. Se encuentra entonces que el espectro del número de ocupación de los modos del campo cuantizado, en el vacío corresponde al de un cuerpo negro a una temperatura dada por la gravedad superficial del horizonte. La derivación de Hawking [62] es bastante física pero descansa en algunas hipótesis como la no interacción entre los campos. En el enfoque de Wilczek se pone énfasis en la cancelación de anomalías gravitacionales. En la primera parte de esta tesis, se revisó el caso más simple que surge al considerar un campo escalar quirral en  $D = 2$  dimensiones. En ese caso vimos que la anomalía queda como en la ec. (2.37)

$$\langle 2T_{+-}(p) \rangle = -2 \frac{\delta \Delta L_D^{eff}}{\delta h_{+-}(-p)} = -\frac{1}{24\pi} R(p),$$

o equivalentemente

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi\sqrt{-g}} \epsilon^{\beta\delta} \partial_\delta \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\alpha.$$

Hay muchos ejemplos en la física donde las anomalías se han conectado a la existencia de flujo de corrientes, como se ha explicado en los primeros capítulos de la tesis. Sin embargo no hay muchas publicaciones en donde se explore la relación entre la radiación de agujero negro y la no conservación del tensor de energía-momento. Hace ya varios años Christensen y Fulling [91] demostraron que es posible usar una anomalía en simetría conforme para derivar importantes constricciones de los tensores de energía-momento de los campos cuánticos en el background de un agujero

negro. Dicha anomalía aparece como una contribución a la traza  $T^\alpha_\alpha$  del tensor de energía-momento en una teoría en la cual dicho tensor, clásicamente, se anula. En un artículo muy reciente [92] Wilczek *et al* retoman este enfoque y al mismo tiempo extienden su análisis, descrito arriba, para el caso de radiación de partículas cargadas en un agujero negro del tipo Reissner-Nordstrom (R-N). Para ello consideran anomalías de gauge así como gravitacionales en el horizonte de eventos. Demuestran que para evitar el rompimiento de covariancia general y de invariancia de gauge a nivel cuántico, el flujo total de carga y energía en cada onda parcial de un campo cuántico cargado en un agujero negro R-N debe ser igual al un cuerpo negro (1+1) dimensional a la temperatura de Hawking. El enfoque de dichos trabajos es muy cercano al que he seguido en la presente tesis. De hecho tanto la primera parte de la tesis, que trata con anomalías en teorías que involucran la interacción de gravedad con materia, como el capítulo 3, donde se explora la radiación de un agujero negro debida a un campo escalar interactuante, pueden ser estudiados como tópicos relacionados. Este es, precisamente el enfoque de Wilczek. Como una extensión de las ideas desarrolladas en esta tesis, es posible deformar la geometría del espacio de fondo e investigar la modificación que surja al promover los productos usuales en productos de Moyal. Esto generalizará, en primer lugar, los resultados descritos en [90] y [92]. Este proyecto, sin embargo, queda como una investigación a desarrollar en un futuro próximo.



## Apendice A

# Fundamentos geométricos de agujeros negros

A continuación describiremos la geometría de un agujero negro estacionario. Esta sección es una revisión breve de resultados bien conocidos y no pretende ser un estudio detallado. Una revisión detallada acerca de agujeros negros clásicos puede verse en [93]. La interacción entre el campo gravitacional y el campo electromagnético está determinada por las ecuaciones de Einstein-Maxwell acopladas. En la norma de Lorentz ( $\nabla^a A_a = 0$ ) son:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - R_\nu^\mu A_\mu = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

y

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.2})$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento electromagnético

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \quad . \quad (\text{A.3})$$

La solución de agujero negro estacionario sujeta a la restricción de que los parámetros momento angular, carga eléctrica y masa tomen valores definidos, es descrita por la

métrica de Kerr:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad , \quad (\text{A.4})$$

aquí el potencial vectorial electromagnético toma la forma

$$A_a = -\frac{Qr}{\Sigma} ((dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a) \quad , \quad (\text{A.5})$$

donde  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr$ .  $Q$ ,  $M$  y  $a$  son los tres parámetros de la familia de soluciones y puede verse que corresponden a la carga eléctrica, la masa y el momento angular por unidad de masa del agujero negro  $a = J/M$ . Cuando  $Q = 0$  tenemos que  $A_a = 0$  y la métrica del espaciotiempo se reduce a la familia de soluciones de Kerr en el vacío. Para  $a = 0$  recuperamos las soluciones de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 \\ + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (\text{A.6})$$

y, por supuesto, cuando  $Q = a = 0$  obtenemos la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (\text{A.7})$$

la cual constituye el ejemplo mejor conocido de un agujero negro estático. Debido a su simplicidad, revisaré este caso a continuación.

La métrica de Schwarzschild describe, obviamente, un espaciotiempo de cuatro dimensiones, sin embargo, debido a la simetría esférica, podemos analizar únicamente la región bidimensional descrita en términos de las coordenadas  $r$  y  $t$  y suprimir de la métrica de Schwarzschild la dependencia angular. Así, nos enfocamos en un modelo 1 + 1 dimensional donde ahora la métrica queda

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 ,$$

La métrica anterior puede reescribirse en una forma más simple en términos de la nueva coordenada  $r^*$  definida por

$$r^* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) , \quad (\text{A.8})$$

tal que  $dr^*/dt = (1 - 2M/r)^{-1}$  de manera que ahora

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dr^{*2}) ,$$

Como estamos interesados en explorar la estructura causal en las “cercanías” del agujero negro, es usual en este punto introducir las coordenadas nulas  $\{u, v\}$  definidas como  $u = t - r^*$  y  $v = t + r^*$  de modo que ahora la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv , \quad (\text{A.9})$$

donde ahora tenemos a  $r$  definida implícitamente como función de  $u$  y  $v$  por

$$r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) = r^* = \frac{(v - u)}{2} , \quad (\text{A.10})$$

tal que el elemento de línea  $ds^2$  se puede reescribir como

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} \exp \frac{-r}{2M} \exp \frac{v - u}{4M} dudv . \quad (\text{A.11})$$

Una vez más definimos coordenadas nulas dadas ahora por:

$$U = -\exp \left( \frac{-u}{4M} \right) , \quad (-\infty < U < 0) ,$$

y

$$V = \exp \left( \frac{v}{4M} \right) , \quad (0 < V < \infty) ,$$

en términos de las cuales la métrica queda



$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dU dV \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) (-dT^2 + dX^2) \quad , \quad (\text{A.13})$$

donde  $U = T - X$  y  $V = T + X$ . La relación entre las coordenadas “nuevas”  $(T, X)$  y las “originales”  $(t, r)$  está dada por

$$X^2 - T^2 = -UV = \exp\left(\frac{v-u}{4M}\right) = \exp\left(\frac{r^*}{2M}\right) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad , \quad (\text{A.14})$$

y

$$\frac{X+T}{X-T} = \frac{V}{-U} = \exp\left(\frac{u+v}{4M}\right) = \exp\left(\frac{t}{2M}\right) \quad , \quad (\text{A.15})$$

o, equivalentemente

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) = X^2 - T^2 \quad ,$$

y

$$\frac{t}{2M} = 2 \arctan \frac{T}{X} = \ln \frac{1 + \frac{T}{X}}{1 - \frac{T}{X}} \quad . \quad (\text{A.16})$$

En estas nuevas coordenadas la singularidad de las componentes de la métrica en  $r = 2M$  ha desaparecido y consecuentemente el espacio puede ser extendido permitiendo que los valores de  $U$  y  $V$  no tengan restricciones.

Otra representación de este espacio tiempo puede obtenerse mapeando  $U$  y  $V$  a unas coordenadas nulas cuyos valores se restrinjan a intervalos finitos como

$$U = \tan \frac{1}{2} \tilde{U} \quad ,$$

y

$$V = \tan \frac{1}{2} \tilde{V} \quad ,$$

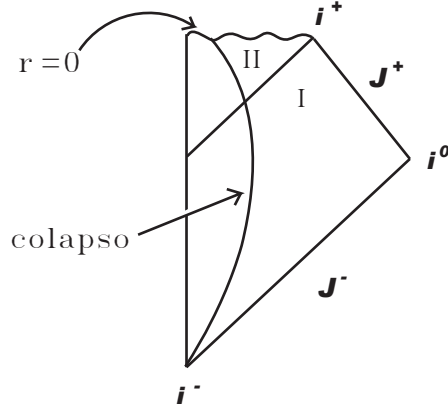


Figura A.1: Diagrama de Penrose para un agujero negro de Schwarzschild.

El diagrama que representa a esta última región se conoce como *diagrama de Penrose* quien fue el primero en señalar la conveniencia de trabajar con estas regiones “conformalmente” equivalentes:

En este diagrama el horizonte de eventos está localizado en  $r = 2M$  que es precisamente la línea que separa las regiones I y II. La singularidad en  $r = 0$  sí que constituye una singularidad “verdadera”, por ejemplo, la curvatura escalar  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$  es infinita en este punto. Sin embargo, gracias a la “nueva” geometría, es posible asignar al exterior del agujero negro una región (región I) como puede verse en la figura A.1. En este diagrama  $\mathbf{I}^+$ ,  $\mathbf{I}^-$  se denominan futuro cronológico y pasado cronológico respectivamente; análogamente  $\mathbf{J}^+$  y  $\mathbf{J}^-$  son el infinito nulo futuro y el infinito nulo pasado respectivamente. En realidad el diagrama de Penrose completo contiene otras regiones que no incluimos en esta figura. Sin embargo para nuestros propósitos basta con la región descrita arriba. Ahora el horizonte de eventos puede visualizarse de una manera más simple. Divide el espacio tiempo en dos regiones I y II que están desconexas. Es ésta la región de interés para analizar la radiación de agujero negro.



# Bibliografía

- [1] J. Steinberger, “On the Use of Subtraction Fields and the Lifetimes of Some Types of Meson Decay”, Phys. Rev. **76**, (1949), 1180.
- [2] J. Schwinger, Phys. Rev. D **82** (1951) 664.
- [3] S. Adler, “Physical Review”, **177**, (1969), 2426.
- [4] S. Adler y W. Bardeen. Phys. Rev **182** , (1969), 1517.
- [5] R. Jackiw y C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, (1976), 172.
- [6] M.F. Atiyah e I.M. Singer Ann. Math. **87**, (1968), 485.
- [7] C. Nash y S. Sen, “Topology and Geometry for Physicists”, Academic Press, New York, 1983.
- [8] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1733.
- [9] R. Stora, “Algebraic Structure and Topological Origin of Anomalies” in: Recent Progress in Gauge Theories, 1983 Cargése Lectures, NATO ASI series, Plenum Press, New York.
- [10] B. Zumino, “Chiral Anomalies and Differential Geometry”, in: Relativity, Groups and Topolgy, 1983 Les Houches Lectures, North-Holland, Amsterdam.
- [11] O. Alvarez, I.M. Singer y B. Zumino, Comm. Math. Phys. **96**, (1984), 409.

- [12] L. Alvarez-Gaumé y P. Ginsparg, “The Topological Meaning of Nonabelian Anomalies”, Nuc. Phys. B **243** (1984) 449; The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies”, Ann. Phys. **161** (1985) 423.
- [13] L. Alvarez-Gaumé y E. Witten, “Gravitational Anomalies”, Nucl. Phys. B **234** (1983) 269.
- [14] M.B. Green y J.H. Schwarz Phys. Lett. **149B** (1984) 117.
- [15] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk y N. Seiberg, “Noncommutative Perturbative Dynamics”, JHEP **0002** (2000) 020, hep-th/9912072.
- [16] N. Seiberg y E. Witten, JHEP **9909:032** (1999).
- [17] A. Connes, M. R. Douglas, y A. Schwarz, JHEP **9802:003** (1998).
- [18] M.R. Douglas y N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002), 977; R.J. Szabo, “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces”, Phys. Rept. **378** (2003) 207.
- [19] R.J. Szabo, “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces”, hep-th/0109162.
- [20] P. Presnajder, “The Origin of Chiral Anomaly and the Noncommutative Geometry”, J. Math. Phys. **41** (2000) 2789-2804, hep-th/9912050.
- [21] M.T. Grisaru y S. Penati, “Noncommutative Supersymmetric Gauge Anomaly”, Phys. Lett. B **504** (2001) 89-100, hep-th/0010177.
- [22] F. Ardalan y N. Sadooghi, Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 3151.
- [23] J.M. Gracia-Bondia y C.P. Martin, “Chiral Gauge Anomalies on Noncommutative  $\mathbf{R}^4$ ”, Phys. Lett. B **479** (2000) 321.
- [24] F. Ardalan y N. Sadooghi, “Anomaly and Nonplanar Diagrams in Noncommutative Gauge Theories”, Int. J. Mod. Phys. A **17** (2002) 123, hep-th/0009233.

- [25] L. Bonora, M. Schnabl t A. Tomasiello, “A Note on Consistent Anomalies in Noncommutative Yang-Mills Theories”, Phys. Lett. B **485** (2000) 311, hep-th/0002210.
- [26] L. Bonora y A. Sorin, “Chiral Anomalies in Noncommutative YM Theories”, Phys. Lett. B **521** (2001) 421, hep-th/0109204.
- [27] E. Langmann y J. Mickelsson, “Anomalies and Schwinger Terms in Noncommutative Gauge Field Theory Models”, J. Math. Phys. **42** (2001) 4779, hep-th/0103006.
- [28] C.P. Martin, “Chiral Gauge Anomalies on Noncommutative Minkowski Space-time”, Mod. Phys. Lett. A **16** (2001) 311.
- [29] K. Intriligator y J. Kumar, “ $\star$ -Wars Episode I: The Phantom Anomaly”, hep-th/0107199.
- [30] T. Nakajima, “Conformal Anomalies in Noncommutative Gauge Theories”, hep-th/0108158.
- [31] T. Nakajima, “UV/IR Mixing and Anomalies in Noncommutative Gauge Theories”, hep-th/0205058.
- [32] P. Aschieri, B. Jurco, P. Schupp y J. Wess, “Noncommutative GUT’s Standard Model and CPT”, hep-th/0205214.
- [33] C.P. Martin, “The Covariant Form of the Gauge Anomaly on Noncommutative  $\mathbf{R}^{2N}$ ”, Nucl. Phys. B **623** (2002) 150-164, hep-th/0110046.
- [34] R. Banerjee y S. Ghosh, “Seiberg-Witten Map and the Axial Anomaly in Noncommutative Field Theory”, Phys. Lett. B **533** (2002) 162-167, hep-th/0110177.
- [35] N. Sadooghi y M. Mohammadi, “On the Beta Function and Conformal Anomaly of Noncommutative QED with Adjoint Matter Fields”, hep-th/0206137.

- [36] C.P. Martin, “The Gauge Anomaly and the Seiberg-Witten Map”, hep-th/0211164.
- [37] R. Banerjee, “Anomalies in Noncommutative Gauge Theories, Seiberg-Witten Transformation and Ramond-Ramond Couplings”, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 613, hep-th/0301174.
- [38] F. Brandt, C.P. Martin y F. Ruiz Ruiz, “Anomaly Freedom in Seiberg-Witten Noncommutative Gauge Theories”, JHEP (2003) **0307:068**, hep-th/0307292.
- [39] F. Brandt, “Seiberg-Witten Maps and Anomalies in Noncommutative Yang-Mills Theories”, hep-th/0403143.
- [40] A. Armoni, E. Lopez y S. Theisen, “Nonplanar Anomalies in Noncommutative Theories and the Green-Schwarz Mechanism”, JHEP **0206:050** (2002), hep-th/0203165.
- [41] A.H. Chamseddine, Commun. Math. Phys. **218** (2001) 283.
- [42] A.H. Chamseddine, Phys. Lett. B **504** (2001) 33.
- [43] A.H. Chamseddine, “Invariant Actions for Noncommutative Gravity”, hep-th/0202137.
- [44] J.W. Moffat, Phys. Lett. B **491** (2000) 345; Phys. Lett. B **493** (2000) 142.
- [45] J.W. Moffat, “Perturbative Noncommutative Quantum Gravity”, hep-th/0008089.
- [46] M.A. Cardella y D. Zanon, “Noncommutative Deformation of Four-dimensional Einstein Gravity”, hep-th/0212071.
- [47] M. Kontsevich, “Deformation Quantization of Poisson Manifolds I”, q-alg/9709040.

- [48] H. Garcia-Compeán, O. Obregón, C. Ramirez, y M. Sabido, “Noncommutative Topological Theories of Gravity”, Phys. Rev. D **68** (2003) 045010, hep-th/0210203.
- [49] H. Garcia-Compeán, O. Obregón, C. Ramirez, y M. Sabido, “Noncommutative Self-dual Gravity”, Phys. Rev. D **68** (2003) 044015, hep-th/0302180.
- [50] R. Delbourgo y A. Salam, “The Gravitational Correction to PCAC”, Phys. Lett. **40B** (1972) 381.
- [51] T. Eguchi y P.G.O. Freund, “Quantum Gravity and World Topology”, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1251.
- [52] R. Delbourgo, “A Dimensional Derivation of the Gravitational PCAC Correction”, J. Phys. A: Math. Gen. **10** (1977) L237.
- [53] E. Witten, Commun. Math. Phys. **100** (1985) 197.
- [54] J.A. Harvey, “Topology of the Gauge Group in Noncommutative Gauge Theory”, hep-th/0105242.
- [55] N.H. Kuiper, Topology **3** (1965) 19; R.S. Palais, Topology **3** (1965) 271.
- [56] H. Grosse y J. Madore, “A Noncommutative Version of the Schwinger Model”, Phys. Lett. B **283** (1992) 218.
- [57] H. Grosse y P. Presnajder, “A Noncommutative Regularization of the Schwinger Model”, Lett. Math. Phys. **46** (1998) 61; “A Treatment of the Schwinger Model within Noncommutative Geometry”, hep-th/9805085.
- [58] A.P. Balachandran y S. Vaidya, “Instantons and Chiral Anomaly in Fuzzy Physics”, Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 17, hep-th/9910129.
- [59] B. Ydri, “Noncommutative Chiral Anomaly and the Dirac-Ginsparg-Wilson Operator”, JHEP **0308** (2003) 046, hep-th/0211209.



- [60] B. Jurco, S. Schraml, P. Schupp y J. Wess, *Eur. Phys. J. C* **17** (2000) 521; B. Jurco, P. Schupp y J. Wess, *Nucl. Phys. B* **604** (2001) 148; J. Wess, *Commun. Math. Phys.* **219** (2001) 247; B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp y J. Wess, *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 383; X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess y M. Wohlgenannt, *Eur. Phys. J. C* **23** (2002) 363.
- [61] A. Micu y M.M. Sheikh-Jabbari, “Noncommutative  $\Phi^4$  Theory at Two Loops”, *JHEP* **0101** (2001) 025, hep-th/0008057.
- [62] S.W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes”, *Commun. math. Phys.* **43** (1975) 199.
- [63] G.W. Gibbons, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, Eds. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1980).
- [64] R. M. Wald, “The History and Present Status of Quantum Field Theory in Curved Spacetime,” arXiv:gr-qc/0608018.
- [65] N.D. Birrel y J.G. Taylor, “Analisis of Interacting Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, *J. Math. Phys.* **21**, (1980), 1740.
- [66] C.S. Chu, B.R. Greene y G. Shiu, “Remarks on Inflation and Noncommutative Geometry”, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, (2001), 2231.
- [67] H. Snyder, *Phys. Rev. D* **71** (1947) 38.
- [68] F. Nasserri, “Event Horizon of Schwarzschild Black Hole in Noncommutative Spaces”, hep-th/0508122 v2.
- [69] F. Nasserri, “Schwarzschild Black Hole in Noncommutative Spaces”, hep-th/0508051, aceptado para su publicación en *Gen. Rel. Grav.*
- [70] P. Nicolini, “A Model of Radiating Black Hole in Noncommutative Geometry”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) L631, hep-th/0507266

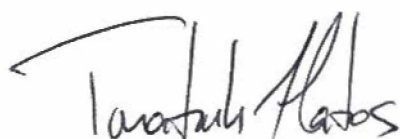
- [71] F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele and G. Sparano, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 2907 (1996), gr-qc/9503040.
- [72] S. Estrada-Jimenez, H. García-Compeán and C. Soto-Campos, “Gravitational anomalies in noncommutative field theory,” hep-th/0404095. Enviado a Phys. Rev. D.
- [73] H. García-Compeán and C. Soto-Campos, “Noncommutative Effects in the Black Hole Evaporation in Two Dimensions,” hep-th/0606071. (**Aceptado para su publicación en Phys. Rev. D**, con fecha 9 de Noviembre de 2006).
- [74] K.S. Thorne, “Black Holes and Time Warps”, Norton, New York, 1994.
- [75] N.D. Birrell y P.C. Davies, “Quantum Fields in Curved Space”, Cambridge University Press, Great Britain, 1982.
- [76] G. Gibbons y M. Perry, Phys. Rev. Lett. **36**, (1976) 985.
- [77] W.G. Unruh, “Notes on Black Hole Evaporation”, Phys. Rev. D **14** (1976) 870.
- [78] T. Jacobson, “Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect”, gr-qc/0308048
- [79] N.D. Birrell y P.C. Davies, “Massless Thirring model in curved space: Thermal states and conformal anomaly”, Phys. Rev. D **18**, (1978) 4408.
- [80] D.A. Leahy y W.G. Unruh, “Effects of a  $\lambda\Phi^4$  interaction on black-hole evaporation in two dimensions”, Phys. Rev. D **28**, (1983) 694.
- [81] N.N. Bogoliubov y D.V. Shirkov, (1976), “Introduction to the Theory of Quantized Fields”, John Wiley and Sons, New York.
- [82] D.A. Leahy, Ph.D Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada. Disponible en “University Microfilms International”.

- [83] Abramowitz, M. y Stegun, I.A. (1970) “Handbook of Mathematical Functions”, National Bureau of Standards, Washington, D.C.
- [84] Zel’dovich, Ya.B. y Pitaevsky, L.P., Commun. Math. Phys. **23** (1971) 185.
- [85] X. Zhang, “Black hole evaporation based upon a  $q$ -deformation description”, hep-th/0407037.
- [86] X. Calmet y M. Wohlgenannt, “Effective Field Theories on Noncommutative Space-time”, Phys. Rev. D **68** (2003) 025016, hep-ph/0305027.
- [87] O. Bertolami y A. Guisado, “Noncommutative Scalar Field Coupled to Gravity”, gr-qc/0207124 v3.
- [88] X. Calmet y M. Wohlgenannt, “Effective Field Theories on Non-Commutative Space-Time”, Phys. Rev. D **68** (2003) 025016, hep-ph/0305027.
- [89] D. Perrot, “In the Topological Interpretation of Gravitational Anomalies”, J. Geom. Phys. **39** (2001) 82, math-ph/0006003.
- [90] S. P. Robinson y F. Wilczek “A Relationship Between Hawking Radiation and Gravitational Anomalies” , Phys. Rev. Lett. **95**, 011303, (2005) [arXiv: gr-qc/0502074].
- [91] S. Christensen y S. Fulling, Phys. Rev. D (**15**), (1977), 2088.
- [92] S. Iso, H. Umetsu y F. Wilczek, “Hawking Radiation from Charged Black Holes via Gauge and Gravitational Anomalies”, (2006), [arXiv: hep-th/0602146].
- [93] R. M. Wald, “General Relativity”, The University of Chicago Press, 1984.

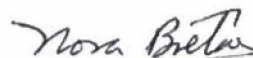
El Jurado designado por el Departamento de Física, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

"Aspectos de la teoría cuántica de campos noconmutativa  
en espacios curvos"

que presenta Carlos Arturo Soto Campos para su examen final de doctor en ciencias en la especialidad de física, el día veintitrés del mes de noviembre del año dos mil seis.



Tonatiuh Matos Chassin



Nora Eva Bretón Báez



Héctor Hugo García Campeán



Abdel Pérez Lorenzana



Cupatitzio Ramírez Romero