

## 封面文章

## 旋转声学黑洞的超辐射与霍金辐射数值研究\*

陆琨 陈乐丰 葛先辉†

(上海大学理学院物理系, 上海 200444)

(2025 年 4 月 30 日收到; 2025 年 5 月 27 日收到修改稿)

本文基于类比引力模型, 对声学黑洞的超辐射和霍金辐射现象进行数值研究. 通过求解特定声学度规背景下标量场的径向方程, 计算不同频率下的反射系数、透射系数和霍金辐射功率谱. 数值结果验证了超辐射的存在, 即当入射声波频率低于声学黑洞的特定频率阈值  $m\Omega_H$  时, 反射波被放大. 同时, 计算结果与能量守恒关系一致, 验证了数值方法的可靠性. 关于霍金辐射, 本研究计算了其功率谱随频率的变化. 观察到在超辐射临界频率附近, 霍金辐射功率谱出现显著增强, 这主要是由于玻色-爱因斯坦统计分布函数在包含旋转效应的指数项趋于零时分母接近于零, 以及频率依赖的透射概率共同作用导致的. 随着频率进一步升高, 功率谱呈现出非线性变化, 这反映了频率因子、透射概率以及包含旋转效应的玻色-爱因斯坦统计分布的综合影响. 本工作为理解声学黑洞的量子效应提供了数值支持, 并为未来的理论和实验研究提供了参考.

**关键词:** 声学黑洞, 超辐射, 霍金辐射, 数值计算

**PACS:** 04.70.Dy, 05.30.Jp, 02.70.-c

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250582

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250582

## 1 引言

黑洞是广义相对论预言的极端天体, 其强大的引力场使得光线也无法逃脱. 霍金<sup>[1]</sup>于 1974 年提出的黑洞辐射理论, 指出黑洞并非完全“黑”, 而是会以黑体谱的形式向外辐射能量, 这一发现引发了对量子引力理论的深入思考, 并催生了诸多基本物理问题的讨论. 然而, 直接观测天体黑洞的霍金辐射极其困难, 因为其辐射温度远低于宇宙微波背景. 因此, 寻找间接验证霍金辐射的方法成为了一个重要的研究方向, 其中模拟引力提供了可行的途径. 模拟引力的研究不仅有助于检验霍金辐射, 也为量子理论和引力理论的融合提供了新的视角, 并能加深对类比系统本身的理解.

在众多模拟引力模型中, Unruh<sup>[2]</sup>于 1981 年提出的声学黑洞模型影响深远. 声学黑洞利用流体

中的声波模拟弯曲时空中的光波. 当流体速度超过声速时, 形成的超音速区域会捕获声波, 形成类似于黑洞事件视界<sup>[3]</sup>的“声学视界”. Unruh 指出, 在此声学背景下, 可以观测到与霍金辐射类似的现象.

声学黑洞的研究经历了从理论到实验的演进, 离不开众多学者的贡献. 继 Unruh<sup>[2]</sup>在 1981 年开创性地提出声学类比模型后, 国际上 Visser<sup>[4]</sup>对声学度规、视界和霍金辐射等基本性质进行了奠基性的系统研究, 为后续理论与实验工作打下坚实基础. 随着实验技术的进步, 特别是玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 相关技术的成熟<sup>[5]</sup>, 声学黑洞的实验研究逐渐成为现实. 例如, Steinhauer<sup>[6]</sup>在 BEC 系统中进行了模拟霍金辐射的著名实验, 并报告观测到了自发辐射及其关联. 除此之外, 国内学者也对声学黑洞进行了广泛而深入的理论探索. 例如, Ge 和 Sin<sup>[7]</sup>早期研究了相对论流体中的声学黑洞, 为该领域贡献了新的

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12275166) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [ge\\_xh@hotmail.com](mailto:ge_xh@hotmail.com)

视角; 随后, Wang 和 Ge<sup>[8]</sup> 从几何角度研究了  $(2+1)$  维时空中的声学黑洞, 探讨其几何性质; Ge 等<sup>[9]</sup> 还研究了弯曲时空中的声学黑洞, 并分析了模拟闵可夫斯基时空的出现. 此外, Ge 等<sup>[10]</sup> 还将声学黑洞模型应用于全息解释, 并深入探讨了声学黑洞中极点跳跃现象的类比<sup>[11]</sup>, 以及在超电流隧穿中的可能性<sup>[12]</sup>.

除了霍金辐射, 声学黑洞中的超辐射现象也值得关注. 超辐射与旋转黑洞的彭罗斯过程<sup>[13]</sup> 相关, 即当波进入旋转黑洞的能层 (ergosphere) 时, 在特定频率范围内会被放大, 从而提取黑洞的旋转能量. 这一过程的类比最早由 Zel'Dovich<sup>[14]</sup> 提出, 并由 Starobinsky<sup>[15]</sup> 和 Misner<sup>[16]</sup> 进行进一步阐述. Basak 和 Majumdar<sup>[17]</sup> 基于流体动力学模型对旋转声学黑洞的超辐射进行了理论分析, 并指出, 通过求解方程计算反射系数  $\mathcal{R}$ , 对于更精确地验证理论或指导实验具有重要意义. 然而, Basak 和 Majumdar<sup>[17]</sup> 当时并未进行此计算, 他们重点关注可能对这种现象进行观察的某些定性特征, 例如超流体氦 II 中量子化角动量的涡旋对超共振振幅的影响. 而本文旨在填补这一空白, 通过数值模拟获得更精确的结果, 对前人的理论预测进行定量分析, 并探讨这些现象背后的物理机制, 为未来实验提供理论支持和预测.

本文的结构如下: 第 2 节阐述声学黑洞的基本概念; 第 3 节介绍本文所采用的旋转声学黑洞模型并讨论其超辐射现象; 第 4 节围绕该模型推导表面引力与霍金辐射谱的计算方法; 第 5 节详细描述径向波动方程的数值求解策略; 第 6 节展示并深入分析由数值计算得到的散射系数与辐射功率谱; 第 7 节对全文工作进行总结并对未来研究方向进行展望.

## 2 声学黑洞的基本概念

如引言所述, 黑洞及其量子现象的研究不仅揭示了引力与量子理论交织的深刻奥秘, 也引出了诸如黑洞信息佯谬<sup>[18-21]</sup> 等基本物理学挑战. 由于直接观测天体黑洞物理效应的极端困难, 模拟引力, 特别是 Unruh<sup>[2]</sup> 于 1981 年提出的声学黑洞模型, 成为了重要的研究途径. 该模型利用流体动力学系统中的声波行为来模拟弯曲时空背景下的量子场论效应, 为在实验室环境中研究相关物理提供了可能.

声学黑洞, 具体而言, 是指在流体中形成的一

个区域, 该区域内的流体速度超过了当地的声速, 使得声波作为一种扰动无法逆流传播至区域之外, 类似于光无法逃离广义相对论中的引力黑洞. 基于这种类比, 声学黑洞也拥有类似引力黑洞的“视界”和“能层”等概念. 通过研究精心设计的声学黑洞系统, 科学家可以在实验室中模拟并观测到类似于黑洞霍金辐射和超辐射等现象.

在声学黑洞模型中, 声波的传播行为可以通过一个有效的时空度规来描述, 即声学度规. 考虑满足正压条件, 即压强  $p$  仅是密度  $\rho$  的函数  $p = p(\rho)$ , 且流体无黏性、无旋, 即速度场  $\mathbf{v}$  可以写成速度势  $\phi$  的梯度形式  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  的理想流体体系. 流体的基本动力学行为由连续性方程和欧拉方程描述.

为了研究声波的传播特性, 首先将流体参量分解为背景值与一个小扰动项之和, 即密度为  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ , 流速为  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ . 由于流体的无旋性, 速度扰动也可以用速度势的扰动函数  $\psi$  表示, 即有  $\mathbf{v}_1 = \nabla\psi$ . 接下来对连续性方程和欧拉方程进行线性化处理, 保留扰动量的一阶项, 这会分别给出两个关于  $\rho_1$  和  $\psi$  的线性关系式. 通过联立这两个线性化后的方程, 可以消去密度扰动项  $\rho_1$ , 经过数学整理最终得到一个只包含速度势扰动  $\psi$  的二阶偏微分波动方程.

进一步分析表明, 这个描述声波传播的波动方程可以被写成如下的协变形式:

$$\square\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi) = 0, \quad (1)$$

这在数学上等价于一个无质量标量场  $\psi$  在某个由背景流体参数  $(\rho_0, \mathbf{v}_0, c_s)$  决定的有效  $(3+1)$  维弯曲洛伦兹度规  $g_{\mu\nu}$  中的 d'Alembertian 方程. 该有效度规  $g_{\mu\nu}$  即为声学度规, 其描述了这个有效的  $(3+1)$  维洛伦兹几何. 该度规的代数组合形式由流体扰动方程中的二阶导数项与上述有效标量场方程的对应项相比较而确定, 因此声学度规直接取决于流体本身的背景状态参数, 包括密度  $\rho$ 、流速  $\mathbf{v}$  以及当地声速  $c_s$ <sup>[4]</sup>. 具体形式为

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\rho}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{pmatrix}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{I}_{3\times 3}$  为  $3 \times 3$  单位矩阵, 符号  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^T$  表示行向量. 值得注意的是, 尽管底层的流体动力学是完全牛顿、非相对论性的, 声波所感受到的传播空间却体现出一个弯曲的  $(3+1)$  维洛伦兹时空几何特性.

### 3 旋转声黑洞模型与超辐射

本节介绍旋转声学黑洞模型, 并推导与超辐射相关的计算. 考虑一种旋转流体动力学模型 [17,22], 它模拟了流体向中心汇聚的过程. 其声学度规为

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{A^2 + B^2}{c^2 r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{A^2}{c^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 - 2 \frac{B}{c} d\phi dt + r^2 d\phi^2, \quad (3)$$

其中  $c$  是声速,  $A$  和  $B$  是与流体速度相关的常数. 这两个常数源于对背景流体速度场  $\mathbf{v}$  在极坐标  $(r, \phi)$  下的具体参数化. 通常, 一个结合了源、汇和涡旋的二维流场在原点附近可以模型化为径向速度  $v_r \propto A/r$  和角向速度  $v_\phi \propto B/r$ . 具体而言, 常数  $A$  控制流体的径向速度分量  $v_r$ . 如果  $A > 0$ , 则  $v_r$  指向远离原点的方向, 表示流体从原点向外发散; 如果  $A < 0$ , 则  $v_r$  指向原点, 表示流体向原点汇聚. 常数  $B$  控制流体的角向速度分量  $v_\phi$ . 如果  $B > 0$ , 流体具有正的角向速度, 对应于沿逆时针方向旋转; 如果  $B < 0$ , 流体具有负的角向速度, 对应于沿顺时针方向旋转. 将这样的速度场代入导出声学度规的过程中, 便得到了形如 (3) 式中包含  $A$  和  $B$  的形式.  $r$  和  $\phi$  是极坐标,  $t$  是时间坐标. 该度规描述了一个  $(2+1)$  维的旋转声学黑洞, 其视界位于  $r_h = |A|/c$ , 能层位于  $r_e = \sqrt{A^2 + B^2}/c$ . 这是超辐射发生的关键区域, 因为类空的时间平移 Killing 矢量允许负能量模式的存在.

鉴于度规是稳态且轴对称的, 达朗贝尔方程 (1) 有分离变量解:

$$\psi(t, r, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} R(r), \quad (4)$$

将这个解代入方程 (1) (使用度规 (3)) 并经过运算, 可以得到函数  $R(r)$  满足的方程, 简称为径向方程:

$$\frac{1}{r} \left( 1 - \frac{A^2}{c^2 r^2} \right) \frac{d}{dr} \left[ r \left( 1 - \frac{A^2}{c^2 r^2} \right) \frac{d}{dr} \right] R(r) + \left[ \omega^2 - \frac{2Bm\omega}{cr^2} - \frac{m^2}{r^2} \left( 1 - \frac{A^2 + B^2}{c^2 r^2} \right) \right] R(r) = 0. \quad (5)$$

为了方便数值计算, 引入乌龟坐标 (tortoise coordinate)  $r^*$ :

$$\frac{dr^*}{dr} = \left( 1 - \frac{A^2}{c^2 r^2} \right)^{-1}, \quad (6)$$

积分得到:

$$r^* = r + \frac{|A|}{2c} \ln \left| \frac{r - |A|/c}{r + |A|/c} \right|. \quad (7)$$

乌龟坐标将视界  $r = |A|/c$  映射到  $r^* = -\infty$ , 将无穷远  $r \rightarrow \infty$  映射到  $r^* = +\infty$ . 然后引入新的径向函数  $G(r^*) \equiv \sqrt{r} R(r)$  并将  $R(r) = G(r^*)/\sqrt{r}$  代入径向方程 (5), 利用乌龟坐标的定义 (6) 将径向方程简化为

$$\frac{d^2 G(r^*)}{dr^{*2}} + \left[ Q(r) + \frac{1}{4r^2} \left( \frac{dr}{dr^*} \right)^2 - \frac{A^2}{r^4 c^2} \left( \frac{dr}{dr^*} \right) \right] G(r^*) = 0, \quad (8)$$

其中,

$$Q(r) = \frac{1}{r^4} (A^2 m^2 + B^2 m^2 - c^2 m^2 r^2 - 2Bmr^2\omega + r^4\omega^2). \quad (9)$$

引入新径向函数  $G(r^*)$  的主要目的是消除一阶导数项, 使得线性无关解的朗斯基行列式 (Wronskian) 为常数, 这对于后续的分析至关重要.

在渐近区  $r^* \rightarrow +\infty$  ( $r \rightarrow \infty$ ), 方程 (8) 可以近似为

$$\frac{d^2 G(r^*)}{dr^{*2}} + \omega^2 G(r^*) = 0. \quad (10)$$

此方程的解是平面波的叠加:

$$G(r^*) = e^{i\omega r^*} + \mathcal{R} e^{-i\omega r^*} \equiv G_A(r^*), \quad (11)$$

其中第 1 项  $e^{i\omega r^*}$  对应于入射波, 第 2 项  $\mathcal{R} e^{-i\omega r^*}$  对应于反射波,  $\mathcal{R}$  是反射系数.

在视界附近  $r^* \rightarrow -\infty$  ( $r \rightarrow r_h = |A|/c$ ), 方程 (8) 可以近似为

$$\frac{d^2 G(r^*)}{dr^{*2}} + (\omega - m\Omega_H)^2 G(r^*) = 0, \quad (12)$$

其中  $\Omega_H \equiv Bc/A^2$  表示声学黑洞在视界处的角速度. 施加内向边界条件 (ingoing boundary condition), 即只考虑进入黑洞的波, 解的形式变为

$$G(r^*) = \mathcal{T} e^{i(\omega - m\Omega_H)r^*} \equiv G_H(r^*), \quad (13)$$

其中  $\mathcal{T}$  是透射系数.

计算解的朗斯基行列式  $\mathcal{W} = G \frac{dG^*}{dr^*} - G^* \frac{dG}{dr^*}$ . 由于方程 (8) 的势能项是实数,  $\mathcal{W}$  是一个不依赖于  $r^*$  的常数. 在  $r^* \rightarrow -\infty$  处, 利用解 (13) 计算得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(-\infty) &= G_H \frac{dG_H^*}{dr^*} - G_H^* \frac{dG_H}{dr^*} \\ &= -2i(\omega - m\Omega_H) |\mathcal{T}|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

由于朗斯基行列式为常数, 即  $\mathcal{W}(+\infty) = \mathcal{W}(-\infty)$ , 可以得到反射系数和透射系数之间的关系:

$$1 - |\mathcal{R}|^2 = \left( \frac{\omega - m\Omega_H}{\omega} \right) |\mathcal{T}|^2. \quad (15)$$

当  $0 < \omega < m\Omega_H$  时,  $\omega - m\Omega_H < 0$ , 因此右端为负. 为了使等式 (15) 成立, 必须有  $1 - |\mathcal{R}|^2 < 0$ , 即反射系数模的平方  $|\mathcal{R}|^2$  大于 1, 发生超辐射. 这意味着入射声波被放大, 从声学黑洞中提取能量. 从物理图像上来看, 入射波进入能层后, 会激发负能量模式. 负能量模式落入黑洞, 而正能量模式被放大并逃离到无穷远, 从而实现了能量的提取.

#### 4 表面引力与霍金辐射

在声学模型中, 类光测地线有一个自然的参数化, 即根据底层物理度规的牛顿时间坐标进行参数化. 这使得即使对于非稳态声学事件视界, 也可以通过计算这个自然时间参数来定义“表面引力”<sup>[4]</sup>.

考虑稳态但非静态几何中的声学事件视界, 假设以某种方式确定了声学视界的位置, 那么在视界附近, 可以将流体流动分解为法向和切向分量:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel, \quad (16)$$

其中  $\mathbf{v}_\perp = v_\perp \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  是一个单位矢量场, 在视界处垂直于视界, 在远离视界处是某个适当的光滑延拓. 根据定义, 在视界处  $v_\perp = c$ . 矢量场  $\mathbf{L}^\mu = (1; v_\parallel^i)$  的积分曲线将是视界的生成元. 该矢量 (在声学度规中) 的范数平方满足:

$$\|\mathbf{L}\|^2 \propto (c^2 - v_\perp^2). \quad (17)$$

通过计算, 可以得到声学背景下的表面引力<sup>[4]</sup>:

$$g_H = \frac{1}{2} \frac{\partial(c^2 - v_\perp^2)}{\partial n} = c \frac{\partial(c - v_\perp)}{\partial n}. \quad (18)$$

其中  $\partial/\partial n$  代表沿法向  $\hat{\mathbf{n}}$  的方向导数.

对于本文采用的模型, 流体速度为  $\mathbf{v} = \frac{A}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{B}{r} \hat{\phi}$ , 视界位于  $r_h = |A|/c$ , 因此法向速度分量为  $v_\perp = |A|/r$ . 代入 (18) 式, 得到:

$$g_H = -\frac{c^3}{A}. \quad (19)$$

根据霍金辐射的理论, 声学黑洞的霍金温度

$T_H$  与表面引力  $g_H$  成正比:

$$T_H = \frac{\hbar g_H}{2\pi k_B} = -\frac{\hbar c^3}{2\pi k_B A}, \quad (20)$$

其中  $\hbar$  是约化普朗克常数,  $k_B$  是玻尔兹曼常数. 由于模型中  $A < 0$ , 且其他物理量都为正, 所以霍金温度  $T_H$  为正.

得到声学黑洞的霍金温度  $T_H$  后, 阐述这种热辐射在声学类比中的产生机制. 与引力黑洞类似, 声学霍金辐射源于声学视界附近的量子涨落. 这里的“量子涨落”是指背景流体中的声子场 (phonon field) 的零点能涨落.

在均匀流体中, 这些涨落表现为不断产生和湮灭的虚声子对 (virtual phonon pairs). 然而, 在声学视界附近, 由于背景流速超过声速, 时空的性质发生了改变. 当一对虚声子在视界附近产生时, 其中一个声子可能落入视界内部, 而另一个声子则可能逃逸到视界外部, 传播至远方<sup>[23,24]</sup>.

对于远处的观测者来说, 逃逸出来的声子看起来就像是声学黑洞中发射出来的真实粒子. 为了维持能量守恒, 落入视界内部的声子必须携带相对于无穷远处观测者的负能量, 这相应地减小了背景流体的能量. 逃逸出的声子则携带正能量, 并构成了一个热谱辐射, 其特征温度正是上文计算得到的霍金温度  $T_H$ . 这个过程持续进行, 就形成了稳定的声学霍金辐射流.

如前所述, 这一从声学视界发出的稳定粒子流具有热辐射的特性, 可以用一个明确的霍金温度  $T_H$  来描述. 又由于辐射出的声子是玻色子, 描述其热平衡状态下不同模式平均占据数的统计规律应遵循玻色-爱因斯坦统计. 即对于能量为  $E$  的玻色子, 在温度为  $T$  的热平衡态下, 其平均占据数由标准的玻色-爱因斯坦分布函数给出:

$$n_E = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}. \quad (21)$$

对于我们研究的旋转声学黑洞系统, 需要考虑两个关键点: 首先, 热辐射的温度为霍金温度  $T = T_H$ ; 其次, 由于体系以角速度  $\Omega_H$  旋转, 描述粒子统计分布的能量并非粒子在无穷远处的能量  $\hbar\omega$ , 而是粒子在随视界旋转参考系下的能量  $E = \hbar(\omega - m\Omega_H)$ . 将这两个因素代入上述基本分布 (21) 式, 可得到在此背景下模式  $(\omega, m)$  的平均占据数  $n_{\omega, m}$  为<sup>[25]</sup>

$$n_{\omega,m} = \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar(\omega - m\Omega_H)}{k_B T_H}\right] - 1}. \quad (22)$$

代入  $\Omega_H = Bc/A^2$  和  $T_H = \frac{\hbar c^3}{2\pi k_B} \left(-\frac{1}{A}\right)$  的表达式, 我们得到:

$$n_{\omega,m} = \frac{1}{\exp\left[\frac{2\pi k_B}{\hbar c^3} \left(-A\omega + \frac{mBc}{A}\right)\right] - 1}. \quad (23)$$

考虑到声学黑洞具有灰体性质, 其并非完美吸收体, 因此实际观测到的粒子数分布  $N_{\omega,m}$  需要乘以一个修正系数, 即所谓的灰体因子, 在此也就是透射系数的平方  $|\mathcal{T}|^2$ :

$$N_{\omega,m} = \frac{|\mathcal{T}|^2}{\exp\left[\frac{2\pi k_B}{\hbar c^3} \left(-A\omega + \frac{mBc}{A}\right)\right] - 1}. \quad (24)$$

最后, 单位频率间隔内辐射的总能量功率谱  $P_\omega$  由每个模式的能量  $\hbar\omega$  乘以该模式的粒子数谱密度  $N_{\omega,m}$  给出:

$$P_\omega = \hbar\omega N_{\omega,m} = \frac{\hbar\omega |\mathcal{T}|^2}{\exp\left[\frac{2\pi k_B}{\hbar c^3} \left(-A\omega + \frac{mBc}{A}\right)\right] - 1}. \quad (25)$$

## 5 径向方程的数值求解策略

本节详细介绍求解径向波动方程 (8) 的数值方法. 首先定义有效势  $V_0(r^*, \omega) = Q(r) + \frac{1}{4r^2} \left(\frac{dr}{dr^*}\right)^2 - \frac{A^2}{r^4 c^2} \left(\frac{dr}{dr^*}\right)$  (其中  $\frac{dr}{dr^*} = 1 - A^2/(c^2 r^2)$  且  $Q(r)$  由 (9) 式给出). 由于该项的复杂性, 该方程难以获得解析解, 因此我们采用高精度的数值积分技术. 为了能够应用标准的数值积分器, 先将二阶常微分方程  $\frac{d^2 G}{dr^{*2}} = -V_0(r^*, \omega)G(r^*)$  转化为一个一阶系统. 定义  $G_1(r^*) = G(r^*)$  和  $G_2(r^*) = dG(r^*)/dr^*$ , 原方程便等价于以下一阶向量形式:

$$\frac{d}{dr^*} \begin{pmatrix} G_1(r^*) \\ G_2(r^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2(r^*) \\ -V_0(r^*, \omega)G_1(r^*) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

其中, 有效势  $V_0(r^*, \omega)$  依赖于原始径向坐标  $r$ . 采用由 (6) 式和 (7) 式定义的乌龟坐标  $r^*$ . 该坐标变换的关键优势在于将物理视界  $r_H = |A|/c$  映射到  $r^* \rightarrow -\infty$ , 而空间无穷远  $r \rightarrow \infty$  映射到  $r^* \rightarrow +\infty$ . 这极大地简化了边界条件的施加, 因为它们可以在

$r^*$  坐标的渐近区域 ( $r^* \rightarrow \pm\infty$ ) 以平面波的形式设定.

由于波函数  $G(r^*)$  是复数值函数, 标准的常微分方程数值积分库通常处理实数系统. 因此, 我们将  $G_1$  和  $G_2$  分别分解为实部和虚部:  $G_1 = \text{Re}(G_1) + i\text{Im}(G_1)$  和  $G_2 = \text{Re}(G_2) + i\text{Im}(G_2)$ . 这使得原来的二元复数系统转化为一个四元实数系统, 其状态向量可以表示为  $\mathbf{Y} = [\text{Re}(G_1), \text{Im}(G_1), \text{Re}(G_2), \text{Im}(G_2)]^T$ . 系统 (26) 相应地转化为  $\frac{d\mathbf{Y}}{dr^*} = \mathbf{F}(r^*, \mathbf{Y})$ , 其中  $\mathbf{F}$  是一个实值向量函数. 在数值积分的每一步中, 都需要计算给定  $r^*$  处的有效势  $V_0(r^*, \omega)$ . 由于  $V_0$  是  $r$  的函数, 这需从当前的  $r^*$  值反求出对应的  $r$  值. 采用数值方法解决这个问题: 对于每一个  $r^*$  值, 使用一个高效的数值根查找算法 (如布伦特方法或类似方法) 在合适的区间内数值求解方程  $r^*(r) - r^*_{\text{target}} = 0$ , 从而精确地获得对应的  $r$  值, 进而计算  $V_0$ . 必须小心处理靠近视界  $r \approx r_H$  的区域, 因为  $r^*(r)$  在此处有对数发散行为. 具体地, 在执行数值寻根时, 我们确保其搜索区间的下限  $r_{\min}$  始终设定为略大于视界半径  $r_H$ , 从而避免在奇点处进行计算, 保证数值稳定性.

为求解该四元实数系统, 我们采用了 RK45 方法进行数值积分. 这是一种自适应步长的四 (五) 阶龙格-库塔-费尔伯格 (Runge-Kutta-Fehlberg) 方法. 自适应步长对于处理有效势  $V_0$  可能存在的陡峭变化区域特别有效, 能在保证精度的前提下提高计算效率. 为确保计算精度, 我们将相对误差容限和绝对误差容限均设置为  $10^{-8}$ . 积分区间选定为  $[r^*_{\min}, r^*_{\max}]$ , 其中  $r^*_{\min} = -20$  和  $r^*_{\max} = 20$ , 用以模拟  $r^* \rightarrow \pm\infty$  的渐近区域.

物理边界条件施加在积分区间的两端. 在内边界  $r^* = r^*_{\min}$ , 施加纯透射边界条件, 即只有落入黑洞的波, 此时波函数表现为  $G(r^*) \propto \exp(ikr^*)$ , 其中  $k = \omega - m\Omega_H$  是视界处的有效波数. 为方便最终解的归一化, 设定透射波振幅为单位 1 来给出初始条件:

$$\begin{aligned} G_1(r^*_{\min}) &= \exp(ikr^*_{\min}), \\ G_2(r^*_{\min}) &= ik \exp(ikr^*_{\min}). \end{aligned} \quad (27)$$

再将这些复数值初始条件转换为前述四元实数向量  $\mathbf{Y}(r^*_{\min})$  后, 便可以作为数值积分器的输入.

在完成了从  $r^*_{\min}$  到  $r^*_{\max}$  的数值积分后, 我们需要从外边界  $r^* = r^*_{\max}$  处的解中提取反射和透射系

数. 在此区域, 有效势  $V_0$  趋近于 0, 解的行为渐近于平面波的叠加:  $G(r^*) \approx A_{\text{in}} e^{i\omega r^*} + A_{\text{out}} e^{-i\omega r^*}$ . 利用数值积分器提供的密集输出 (dense output) 功能获得  $G_1(r_{\text{max}}^*)$  和  $G_2(r_{\text{max}}^*)$ , 然后通过求解以下线性方程组来提取入射波振幅  $A_{\text{in}}$  和反射波振幅  $A_{\text{out}}$ :

$$A_{\text{in}} = \frac{1}{2} \left( G_1(r_{\text{max}}^*) - \frac{G_2(r_{\text{max}}^*)}{i\omega} \right) \exp(-i\omega r_{\text{max}}^*), \quad (28)$$

$$A_{\text{out}} = \frac{1}{2} \left( G_1(r_{\text{max}}^*) + \frac{G_2(r_{\text{max}}^*)}{i\omega} \right) \exp(i\omega r_{\text{max}}^*). \quad (29)$$

在得到了入射波振幅  $A_{\text{in}}$  和反射波振幅  $A_{\text{out}}$  后, 前文已经提到, 由于边界条件采用的是视界处的内向边界条件, 所以直接设定透射波振幅为单位 1. 那么在考虑入射波为归一化波的情况下, 反射系数  $\mathcal{R}$  和透射系数  $\mathcal{T}$  可以通过以下公式求出:

$$\mathcal{R} = A_{\text{out}}/A_{\text{in}}, \quad \mathcal{T} = 1/A_{\text{in}}. \quad (30)$$

最后, 为确保数值计算的可靠性, 我们实施了关键的验证步骤. 首先是流守恒关系的检验: 数值计算得到的反射系数  $\mathcal{R}$  和透射系数  $\mathcal{T}$  必须满足关系 (15) 式. 我们在所有计算的频率  $\omega$  下检查此等式是否在数值误差允许范围内 (例如  $10^{-8}$  量级内) 成立. 其次是超辐射条件检验: 在理论预期的超辐射区间  $0 < \omega < m\Omega_{\text{H}}$  内, 验证计算得到的反射率  $|\mathcal{R}|^2$  是否确实大于 1, 这直接证明了波的能量被放大. 这些检验为我们的数值结果提供了重要的置信度.

## 6 散射系数与辐射功率谱分析

本节展示数值计算得到的反射系数、透射系数和霍金辐射功率, 并讨论其物理意义. 数值计算采用自然单位制, 即  $\hbar = k_{\text{B}} = 1$ , 并单位化声速, 令  $c = 1$ . 其他参数设置为:  $A = -0.2$ ,  $B = -0.04$ ,  $m = -1$ , 对应一个顺时针旋转的声学黑洞. 在选用了这些参数后  $m\Omega_{\text{H}} \equiv Bc/A^2 = -1$ , 我们计算的频率范围为  $\omega \in [0.01, 2]$ , 采样点数为 200.

图 1 展示了声学黑洞背景下, 反射系数模  $|\mathcal{R}|$  和透射系数模  $|\mathcal{T}|$  随频率  $\omega$  的变化. 这张图揭示了声波与声学黑洞相互作用的一些关键特征, 特别是声波如何被声学黑洞的势垒所影响.

一方面, 在低频区域 ( $\omega \ll 1$ ), 可以观察到反射系数  $|\mathcal{R}|$  接近 1, 而透射系数  $|\mathcal{T}|$  接近于 0. 这种现象表明, 低频声波几乎全部被声学黑洞的势

垒所反射, 只有极少部分能够穿透. 这可以理解为, 低频声波的波长较长, 与声学黑洞的势垒尺度相比拟, 使得声波更倾向于发生反射, 类似于经典力学中长波遇到障碍物时更容易发生衍射和反射的情况.

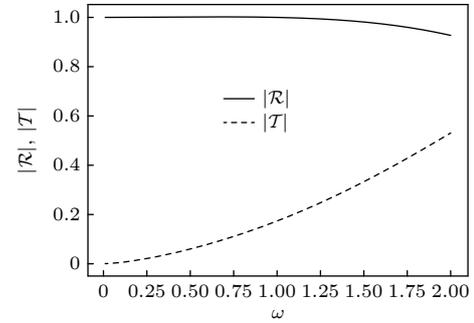


图 1 反射系数模  $|\mathcal{R}|$  (实线) 与透射系数模  $|\mathcal{T}|$  (虚线) 随入射声波频率  $\omega$  的变化

Fig. 1. Modulus of reflection coefficient  $|\mathcal{R}|$  (solid line) and transmission coefficient  $|\mathcal{T}|$  (dashed line) as a function of incident wave frequency  $\omega$ .

另一方面, 随着频率  $\omega$  的逐渐增大, 反射系数  $|\mathcal{R}|$  逐渐减小, 而透射系数  $|\mathcal{T}|$  则逐渐增大. 这表明, 较高频率的声波更容易穿透声学黑洞的势垒. 高频声波的波长较短, 与势垒尺度相比更小, 因此更倾向于沿直线传播并穿过势垒, 类似于经典力学中短波遇到障碍物时更容易发生透射的情况. 两条曲线的平滑性和单调性符合散射理论的一般预期. 这种  $|\mathcal{R}|$  下降和  $|\mathcal{T}|$  上升的互补趋势, 定性地体现了散射过程中的概率流守恒, 该守恒性已通过关系式  $|\mathcal{R}|^2 + \left( \frac{\omega - m\Omega_{\text{H}}}{\omega} \right) |\mathcal{T}|^2 = 1$  在第 4 节中得到了定量的数值验证. 这些结果清晰地表明, 声学黑洞对不同频率的声波具有显著的“选择性”, 证实了声学黑洞具有灰体性质, 即其对声波的吸收和反射是频率依赖的, 这与理想黑体有显著区别. 特别值得注意的是, 在低频区域  $0 < \omega < m\Omega_{\text{H}}$  (其中  $m\Omega_{\text{H}} = 1$ ), 反射系数  $|\mathcal{R}|$  大于 1, 这与超辐射发生的条件一致.

为了更清晰地展示超辐射现象, 图 2 绘制了旋转声学黑洞背景下, 放大系数  $|\mathcal{R}|^2 - 1$  随频率  $\omega$  的变化曲线. 从图 2 可以清楚地看到, 在低频区域 ( $0 < \omega \lesssim 1.0$ ), 曲线始终位于横轴上方, 这意味着在该频率范围内,  $|\mathcal{R}|^2 - 1 > 0$ , 即发生了超辐射; 而在高频区域 ( $\omega > 1.0$ ), 曲线则位于横轴下方, 即  $|\mathcal{R}|^2 - 1 < 0$ , 没有发生超辐射. 这与理论预测 (超辐射发生在  $0 < \omega < m\Omega_{\text{H}}$ ) 是定性相符的. 这一结

果明确证实了旋转声学黑洞中超辐射效应的存在,表明入射声波在被声学黑洞反射后能量得到了放大,这也进一步验证了本文数值方法的可靠性。

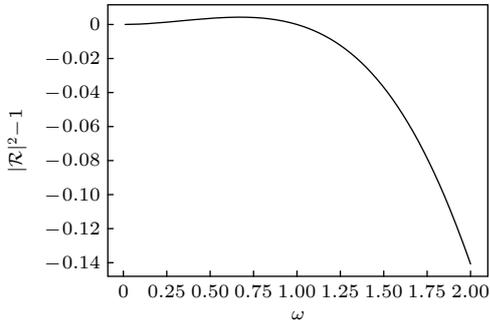


图 2 放大系数  $|\mathcal{R}|^2 - 1$  随入射声波频率  $\omega$  的变化,该系数大于零的区域 ( $0 < \omega \lesssim 1.0$ ) 代表超辐射存在的区域,此图确定了超辐射发生的频率范围,其上限对应理论阈值  $m\Omega_{\text{H}} = 1$

Fig. 2. Amplification factor  $|\mathcal{R}|^2 - 1$  as a function of incident wave frequency  $\omega$ , the region where this factor is greater than zero ( $0 < \omega \lesssim 1.0$ ) represents the existence of superradiance, this figure determines the frequency range for superradiance, with the upper limit corresponding to the theoretical threshold  $m\Omega_{\text{H}} = 1$ .

图 3 描绘了基于玻色-爱因斯坦统计计算的旋转声学黑洞霍金辐射功率谱  $P_{\omega}$  随频率  $\omega$  的变化。一个显著的特征是,当频率  $\omega$  从右侧趋近于超辐射临界频率  $m\Omega_{\text{H}} = 1$  时,辐射功率  $P_{\omega}$  急剧增大。这种行为在数学上直接源于 (25) 式中玻色-爱因斯坦

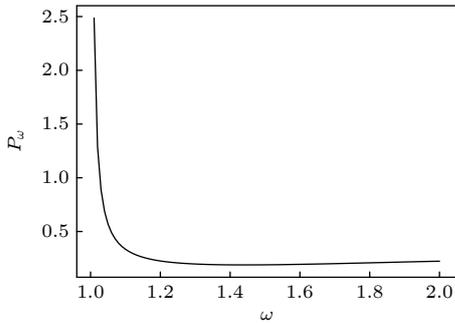


图 3 霍金辐射功率谱  $P_{\omega}$  (黑色实线) 随频率  $\omega$  的变化,特别展示了超辐射临界频率 ( $m\Omega_{\text{H}} = 1$ ) 附近的行为,图中  $P_{\omega}$  为采用自然单位制 ( $\hbar = k_{\text{B}} = c = 1$ ) 及特征长度  $r_0 = 1$  计算得到的无量纲功率谱密度,代表以  $\hbar c/r_0$  为单位的能量

Fig. 3. Hawking radiation power spectrum  $P_{\omega}$  (black solid line) as a function of frequency  $\omega$ , specifically showing the behavior near the superradiance critical frequency ( $m\Omega_{\text{H}} = 1$ ), the plotted  $P_{\omega}$  is the dimensionless power spectrum density calculated using natural units ( $\hbar = k_{\text{B}} = c = 1$ ) and characteristic length  $r_0 = 1$ , representing energy in units of  $\hbar c/r_0$ .

坦分布因子  $1/(\exp[\hbar(\omega - m\Omega_{\text{H}})/(k_{\text{B}}T_{\text{H}})] - 1)$  的分母在  $\omega \rightarrow m\Omega_{\text{H}}^+$  时趋于零,反映了在临界点附近作为玻色子的声子模式被极度激发,发射显著增强。

随着频率  $\omega$  进一步增大 (远离临界点  $\omega = 1$ ),曲线显示辐射功率首先快速下降,随后在高频区域 (本图  $\omega \gtrsim 1.5$  之后) 变化趋于平缓。这种整体形状由频率因子  $\omega$ 、玻色-爱因斯坦分布以及频率依赖的灰体因子  $|T|^2$  共同决定。因此,图 3 不仅体现了声学黑洞的霍金辐射特性,也通过临界频率  $m\Omega_{\text{H}}$  清晰地展示了旋转效应和玻色子统计规律对其辐射谱的深刻影响,并反映了声学黑洞作为非理想辐射体 (灰体) 的性质。

## 7 结 论

本文通过对特定二维旋转声学黑洞模型进行系统的数值研究,成功获得了其声波散射系数、超辐射特性及霍金辐射功率谱。计算结果与流守恒等理论预期高度吻合,其精度在  $10^{-8}$  量级内得到验证,证实了本研究方法的可靠性。研究清晰地展现了该声学黑洞作为频率依赖散射体的灰体性质,并定量揭示了在  $0 < \omega < m\Omega_{\text{H}}$  这个理论预期频率范围内超辐射的放大效应。特别值得指出的是,本文精确计算的霍金辐射功率谱在超辐射临界频率  $m\Omega_{\text{H}}$  附近表现出由声学元激发的玻色统计规律及体系旋转效应共同导致的标志性增强。

本文的分析主要基于一组基准参数。进一步的探讨显示,径向流强度参数  $A$  和旋转强度参数  $B$  这两个关键流场参数的取值,对超辐射的放大效率以及霍金辐射谱的诸如峰值位置、整体强度和谱型宽度等特征均有显著影响。例如,当保持系统的其他基本参数不变,并严格控制超辐射的临界频率  $m\Omega_{\text{H}}$  为一恒定值,即流场参数  $A$  与  $B$  需始终满足其比例  $B/A^2$  等于特定常数。此时若增大径向流参数  $|A|$  的大小,同时旋转参数  $|B|$  也依据此约束相应调整,则我们的分析显示超辐射的放大效应会更为突出,霍金辐射谱的整体强度亦会得到提升,其谱的具体形态也会随之调整。尽管对全参数空间的系统性扫描超出了本文的范围,但此参数敏感性分析已揭示了模型的丰富物理,为未来进一步研究指明了方向。

综上所述,本研究为旋转声学黑洞中的波动散射与量子辐射现象提供了精确的数值参考和深入

的物理洞察,深化了对类比引力体系的理解,并对相关实验中如何调控参数以优化观测效应具有一定的理论指导价值.未来的研究可考虑拓展至更复杂的声学黑洞构型,例如在具有非均匀背景密度的玻色-爱因斯坦凝聚体涡旋态中研究声学现象<sup>[26]</sup>,并关注在超流体氦-II等特殊量子流体中,量子化涡旋对超辐射现象可能产生的独特影响.同时,持续改进数值计算的精度与效率,亦是重要的探索方向,这些努力将共同推动我们更深刻地揭示引力、流体与量子现象之间奇妙的内在联系.

## 数据可用性声明

本篇论文的关联数据可在科学数据银行 <https://doi.org/10.57760/sciencedb.24506> 中访问获取.

## 参考文献

- [1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
- [2] Unruh W G 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 1351
- [3] Li C A 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1648 (in Chinese) [李传安 2000 物理学报 **49** 1648]
- [4] Visser M 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 1767
- [5] Barceló C, Liberati S, Visser M 2005 *Living Rev. Relativ.* **8** 12
- [6] Steinhauer J 2016 *Nature Phys.* **12** 959
- [7] Ge X H, Sin S J 2010 *J. High Energy Phys.* **2010** 087
- [8] Wang Q B, Ge X H 2020 *Phys. Rev. D* **101** 084014
- [9] Ge X H, Nakahara M, Sin S J, Tian Y, Wu S F 2019 *Phys. Rev. D* **99** 104047
- [10] Ge X H, Sun J R, Tian Y, Wu X N, Zhang Y L 2015 *Phys. Rev. D* **92** 084052
- [11] Yuan H, Ge X H 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 566
- [12] Ge X H, Wu S F, Wang Y, Yang G H, Shen Y G 2012 *Int. J. Mod. Phys. D* **21** 1250038
- [13] Penrose R 1969 *Riv. Nuovo Cimento* **1** 252
- [14] Zel'dovich Y B 1971 *JETP Lett.* **14** 180
- [15] Starobinsky A A 1973 *Sov. Phys. JETP* **37** 28
- [16] Misner C W 1972 *Bull. Am. Phys. Soc.* **17** 472
- [17] Basak S, Majumdar P 2003 *Class. Quantum Grav.* **20** 3907
- [18] Yu M H, Ge X H 2023 *Phys. Rev. D* **107** 026013
- [19] Yu M H, Ge X H 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 985
- [20] Yu M H, Ge X H, Lu C Y 2023 *Eur. Phys. J. C* **83** 87
- [21] Ge X H 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 081101 (in Chinese) [葛先辉 2025 物理学报 **74** 081101]
- [22] Fang H Z, Zhou K H, Song Y M 2013 *College Phys.* **32** 30 (in Chinese) [方恒忠, 周开虎, 宋玉明 2013 大学物理 **32** 30]
- [23] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7463 (in Chinese) [赵仁, 张丽春, 李怀繁 2008 物理学报 **57** 7463]
- [24] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2982 (in Chinese) [赵仁, 张丽春, 李怀繁 2010 物理学报 **59** 2982]
- [25] Nam S, Park J D 2009 *Class. Quantum Grav.* **26** 145015
- [26] Demirkaya B, Dereli T, Güven K 2020 *Phys. Scr.* **95** 055001

## COVER ARTICLE

# Numerical study of superradiance and Hawking radiation from rotating acoustic black hole<sup>\*</sup>

LU Kun    CHEN Lefeng    GE Xianhui<sup>†</sup>*(Department of Physics, College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)*

( Received 30 April 2025; revised manuscript received 27 May 2025 )

## Abstract

This paper conducts numerical studies on superradiance and Hawking radiation of a specific rotating acoustic black hole model characterized by parameters  $A$  and  $B$ , within the framework of analogue gravity. The standard radial wave equation for scalar perturbations in the effective metric of this model is solved numerically by using an adaptive Runge-Kutta method with tortoise coordinates; this approach necessitates careful numerical inversion of the coordinate transformation near the horizon via a root-finding algorithm. By imposing appropriate boundary conditions, we extract the reflection coefficient  $\mathcal{R}$  and transmission coefficient  $\mathcal{T}$  in a range of frequencies  $\omega$ . Our results clearly demonstrate superradiance, with the reflectivity  $|\mathcal{R}|^2$  exceeding unity for  $\omega < m\Omega_H = 1$  (where  $m = -1$  and  $\Omega_H = -1$ ), which confirms energy extraction from the rotating background. The high accuracy of our method is validated by the flux conservation relation,  $|\mathcal{R}|^2 + [(\omega - m\Omega_H)/\omega]|\mathcal{T}|^2 = 1$ , which typically has a numerical precision of  $10^{-8}$ . Furthermore, using the derived Hawking temperature and the rotation modified Bose-Einstein distribution, we calculate the Hawking radiation power spectrum  $P_\omega$ , and use the numerically obtained transmission coefficient  $|\mathcal{T}|^2$  as the greybody factor of the model. A prominent feature of  $P_\omega$  is its sharp enhancement (or divergence) as  $\omega$  approaches the threshold  $m\Omega_H$  from above, which is a characteristic directly related to the denominator of the Bose-Einstein factor. This research also reveals that superradiant amplification and Hawking spectrum characteristics are significantly dependent on the specific values of flow parameters  $A$  and  $B$ , even when the superradiant threshold  $m\Omega_H$  is kept unchanged. This detailed numerical study provides quantitative results for the scattering and radiation properties of this model, and also for strong support for the analogue gravity framework.

**Keywords:** acoustic black hole, superradiance, Hawking radiation, numerical calculation**PACS:** 04.70.Dy, 05.30.Jp, 02.70.-c**DOI:** [10.7498/aps.74.20250582](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250582)**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250582](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250582)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12275166).

† Corresponding author. E-mail: [ge\\_xh@hotmail.com](mailto:ge_xh@hotmail.com)



## 旋转声学黑洞的超辐射与霍金辐射数值研究

陆琨 陈乐丰 葛先辉

### Numerical study of superradiance and Hawking radiation from rotating acoustic black hole

LU Kun CHEN Lefeng GE Xianhui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 150401 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250582

CSTR: 32037.14.aps.74.20250582

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250582>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

带有整体单极的Reissner–Nordstrom–AdS黑洞在扩展相空间中的霍金辐射

Hawking radiation from a Reissner–Nordstrom–AdS black hole with integral monopoles in extended phase space

物理学报. 2024, 73(2): 020401 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231277>

分子团簇在扫描隧道显微镜针尖与衬底形成的不同腔中的超辐射研究

Superradiance study of molecular clusters in different cavities formed by scanning tunneling microscope tip and substrate

物理学报. 2025, 74(7): 076102 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241720>

基于双原子超-亚辐射态选择性驱动的空间定向关联辐射

Spatially oriented correlated emission based on selective drive of diatomic superradiance states

物理学报. 2024, 73(14): 144202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240521>

由超辐射引起的迁移率边和重返局域化

Mobility edges and reentrant localization induced by superradiance

物理学报. 2022, 71(11): 113702 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212246>

基于声黑洞设计理论的径向夹心式径-弯复合换能器

Radial sandwich radial–bending composite transducer designed based on acoustic black hole theory

物理学报. 2024, 73(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231983>

户田黑洞的隧穿效应

Tunneling effect of Toda black hole

物理学报. 2023, 72(1): 010401 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221415>