



Reconsidering the Blind Spots of Neutralino Dark Matter: a Perturbative Approach

Kyu Jung BAE*

Department of Physics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Korea

(Received 6 July 2022 : accepted 11 July 2022)

We consider the blind spots of neutralino dark matter where the signals in direct detection experiments are extremely weak. The neutralino dark matter leaves its signal via the interaction mediated by Higgs bosons. However, the neutralino-Higgs coupling can be tiny due to some combinations of Bino-Higgsino or Wino-Higgsino mixing. Thus, blind spots may exist in direct detection experiments. In this paper, we review neutralino blind spots based on the Higgs low-energy theorem and revisit the same parameter space by using perturbation calculation. We also analyze the conditions for the blind spot when light and heavy Higgs contributions were substantial.

Keywords: Dark Matter, Neutralino, Supersymmetry

뉴트랄리노 암흑물질 맹점에 대한 재고찰: 섭동론을 이용한 접근

배규정*

경북대학교 물리학과, 대구 41566, 대한민국

(2022년 7월 6일 받음, 2022년 7월 11일 게재 확정)

뉴트랄리노 암흑물질이 직접관측 실험에서 발견될 가능성이 매우 낮은 영역인 맹점영역에 대하여 다시 고찰한다. 뉴트랄리노 암흑물질은 힉스 보존을 교환하는 상호작용을 통해 핵자와 충돌하여, 직접관측 실험에서 신호를 남긴다. 그러나 뉴트랄리노 암흑물질을 형성하는 비노-희시노 또는 위노-희시노의 구성비에 따라 힉스보존과 상호작용이 매우 작아질 수 있다. 즉, 직접관측 실험의 맹점이 존재할 가능성이 있다. 이 논문에서는 기존의 힉스 정리에 이용하여 확인한 뉴트랄리노 맹점을 다시 분석하고, 이를 섭동론 접근을 통해 검증한다. 이후에 섭동론 접근을 이용해, 힉스 보존이 2개 이상인 확장 모형에서 맹점의 형성 조건을 논의한다.

Keywords: 암흑물질, 뉴트랄리노, 초대칭

I. 서 론

*E-mail: kyujung.bae@knu.ac.kr

지난 수십년간의 천체물리 및 우주론 관측 실험을 통해 우리는 우주 전체 에너지의 약 27%는 암흑물질로 구성되어 있음을 알게되었다 [1]. 이러한 암흑물질은 원자를 구성하

는 보통의 물질인 중입자(baryon)들과는 확연히 다른 성질을 가지며, 우주의 진화과정에 매우 중요한 역할을 담당한다. 암흑물질이 중력을 통해 구조형성에 미치는 영향과, 은하단 운동 등에 의해 그 에너지 비중은 잘 알려져 있으나, 중력 이외의 상호작용에 의한 성질은 전혀 알려져 있지 않다. 그러므로 암흑물질의 밀도를 설명하는 모형을 찾고, 그에 맞는 암흑물질 입자의 성질에 맞추어 직접 및 간접 관측 실험을 통해 암흑물질의 비중력적 상호작용을 확인하는 것은 매우 중요한 연구 과제이다.¹

현재까지 우주배경복사와 거대구조 관측을 통해 밝혀진 암흑물질의 대략적인 성질 및 조건은, 대체로 무겁고 차가운 성질을 가진 물질이어야 한다는 것이다. 여기서 차가운 암흑물질이란 우주의 구조가 형성되는 시기에 암흑물질의 속도가 충분히 작다는 것을 의미한다. 이것은 초기우주에서 암흑물질 입자가 생성되는 시나리오에 많은 제한조건을 형성한다. 이러한 사실에 바탕을 두고 가장 유력한 암흑물질 후보로 고려된 입자는 웜프(Weakly Interacting Massive Particle, WIMP) 입자이다 [3, 4]. 웜프 입자는 질량과 상호작용의 크기가 표준모형의 W 보존 질량 및 약상호작용 크기와 유사한 입자를 말한다. 이러한 입자는 초기 우주의 열적 평형상태에서 생성되고, 우주가 식어감에 따라 그 양이 고정된다. 이를 프리즈아웃(freezeout)이라 하며, 웜프 입자는 프리즈아웃을 통해 관측에서 밝혀진 양, 즉 우주에너지의 27%를 쉽게 생성할 수 있다.

이러한 웜프 입자는 다양한 표준모형 너머의 모형(Beyond the Standard Model, BSM)에서 나타날 수 있는데, 그 중 가장 대표적인 모형이 표준모형의 초대칭 확장 모형(Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM)이다 [5–7]. MSSM에서 전기적으로 중성이면서 웜프의 질량과 상호작용 조건을 갖춘 입자는 뉴트랄리노(neutralino)이다 [3]. 뉴트랄리노는 비노(Bino), 위노(Wino), 두개의 히시노(Higgsino) 입자들의 질량섞임으로 이루어진 입자들로 이것들 중 가장 가벼운 입자는 유력한 암흑물질 후보가 된다. 앞으로는 별도의 언급없이 뉴트랄리노라고 말할 때는 가장 가벼운 뉴트랄리노를 의미한다. 뉴트랄리노의 상호작용은 초대칭의 특징에 따라 표준모형의 약상호작용과 매우 비슷하다. 뉴트랄리노의 질량은 초대칭 깨짐 현상에 의해 결정되는데, 미세조정이 없는 모형이 되기 위한 조건으로부터 그 크기는 W 보존의 질량에서 크게 벗어나지 않을 것으로 기대된다. 이와 같이 뉴트랄리노는 웜프 입자의 조건을 잘 갖추고 있으며, 이러한 이유로 뉴트랄리노를 벤치마크로하여 다양한 암흑물질 연구가 지속되어 왔다.

¹ 최신의 리뷰(review)는 [2]에서 볼 수 있다.

이중에서도 특히 암흑물질 직접관측실험은 다양한 표적 물질들을 이용하여 여러 실험그룹에서 수행되었다 [8]. 뉴트랄리노는 힉스 입자가 매개하는 상호작용을 통해 뉴트랄리노입자와 핵자의 충돌이 일어날 수 있고,² 이 충돌이 표적물질에 남기는 신호를 관찰함으로써 그 존재를 확인할 수 있다. 이러한 특징은 W 보존 질량 근처의 에너지 영역에 초대칭 입자들이 존재할 경우 대부분의 모형 파라미터 영역에서 상당한 크기의 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적을 형성하고, 대부분의 무거운 원소를 이용한 직접 관측 실험에서 그 증거를 발견할 수 있을 것으로 기대되었다.

그러나 이러한 기대와는 달리 현재까지 암흑물질 직접관측 실험의 관측감도가 최저 10^{-47} cm^2 수준까지 강해졌다 [9]. 이는 초기에 기대했던 뉴트랄리노의 충돌단면적 $10^{-40} - 10^{-41} \text{ cm}^2$ 에 비해 매우 낮은 영역까지 도달한 것이다 [10]. 이러한 결과는 몇 가지 새로운 가능성을 시사한다. 첫째, 암흑물질이 우리가 고려하였던 웜프와 다른 형태의 물질로 구성되어 있을 가능성이다. 즉 질량이 매우 작거나 혹은 매우 큰 물질 [11–13], 상호작용의 크기가 약상호작용에 비해 매우 작고, 초기우주에서 프리즈아웃과 다른 과정을 통해 생성된 물질 [14] 등이 그 예이다. 둘째, 뉴트랄리노 입자가 암흑물질의 대부분을 형성하고 있지만, 힉스 입자가 매개하는 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적이 매우 작을 가능성이 있다. 이것은 MSSM의 모형 파라미터 사이의 특별한 관계로부터 일어날 수 있다 [15, 16]. 이를 암흑물질의 맹점이라고 한다. 만약 뉴트랄리노가 이러한 맹점에 존재하고 있다면, 직접관측 실험에서는 발견하기 매우 어렵지만, 다른 실험들에서는 발견할 가능성이 여전히 높다.

이 논문에서는 MSSM의 뉴트랄리노 암흑물질이 이러한 암흑물질 맹점에 존재할 조건에 대해 집중적으로 논의한다. 가장 간단한 시나리오에서는 비노-위노-힉시노의 섭임 과정에서 뉴트랄리노-힉스 결합상수가 매우 작아질 수 있다. 먼저 기존 연구에서 논의된 조건들을 다시 돌아보고, 섭동론을 이용한 접근방법에서 이를 재논의한다. MSSM은 두 개의 CP-짝(CP-even) 힉스 보존이 존재하고, 뉴트랄리노 입자가 이들 힉스들을 통해 핵자와 상호작용할 수 있다. 그러므로 두 가지 파인만(Feynman) 도형의 간섭으로 인해 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적이 매우 작아질 수도 있다. 이어지는 논의에서는 섭동론 접근방법을 통해 이러한 가능성을 고찰한다.

² 이것은 스핀에 무관한 충돌에 기여한다. 스핀에 의존하는 충돌은 현재 실험 민감도가 상대적으로 약하므로, 이 논문에서는 다루지 않는다.

II. MSSM에서 뉴트랄리노

MSSM에서 뉴트랄리노는 중성 게이지 보존들의 초대칭짝 입자인 비노(\tilde{B})와 위노(\tilde{W}), 그리고 힉스 보존의 초대칭짝 입자인 힉시노들($\tilde{H}_{d,u}$)의 질량섞임으로 나타난다. 즉, 뉴트랄리노의 질량 행렬은 $(\tilde{B}, \tilde{W}, \tilde{H}_d, \tilde{H}_u)$ 의 기저에서 다음과 같이 표현된다.

$$M_\chi = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}g'v_d & \frac{1}{\sqrt{2}}g'v_u \\ 0 & M_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}gv_d & -\frac{1}{\sqrt{2}}gv_u \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}g'v_d & \frac{1}{\sqrt{2}}gv_d & 0 & -\mu \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g'v_u & -\frac{1}{\sqrt{2}}gv_d & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서 M_1 은 비노 질량, M_2 는 위노 질량, μ 는 힉시노 질량, g 는 $SU(2)_L$ 게이지 결합상수, g' 은 $U(1)_Y$ 게이지 결합상수, $v_{d,u}$ 는 각각 두 개의 힉스 $H_{d,u}$ 의 진공기대값(Vacuum Expectation Value, VEV)이다. 여기서 $v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2} = 174$ GeV이고, $\tan \beta \equiv v_u/v_d$ 이다. 일반적으로 비노, 위노, 힉시노 질량에 2개의 상대적 복소위상값(complex phase)가 존재할 수 있다. 이는 CP 대칭성 깨짐을 이끌어 내며, 이와 관련된 실험 측정값에 영향을 미친다. 이 논문에서는 이러한 복소위상값을 0으로 가정한다. 이때 위 질량행렬은 하나의 직교행렬(orthogonal matrix) N 에 의해 대각화된다. 즉,

$$NM_\chi N^T = M_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} m_{\chi_1} & & & \\ & m_{\chi_2} & & \\ & & m_{\chi_3} & \\ & & & m_{\chi_4} \end{pmatrix} \quad (2)$$

으로 대각화 되고, 이때 질량 고유상태는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W} \\ \tilde{H}_d \\ \tilde{H}_u \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서 얻은 직교행렬 N 을 찾음으로써 암흑물질이 되는 가장 가벼운 뉴트랄리노 χ_1 과 가벼운 힉스 사이의 결합상수 $g_{h\chi\chi}$ 를 구할 수 있다 [3].

$$g_{h\chi\chi} = -g[N_{13}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \sin \alpha + N_{14}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \cos \alpha] \quad (4)$$

여기서 $\tan \theta_W = g'/g^\circ$ 이고, α 는 힉스 섞임각이다.

III. 힉스 정리를 이용하여 뉴트랄리노 맹점 찾기

스핀에 무관한 뉴트랄리노-핵자 충돌은 앞에서 기술한 뉴트랄리노-힉스 결합상수에 의해 결정된다. 특히, MSSM

에 나타나는 두 개의 CP-짝 힉스 보존 중에서 무거운 힉스 보존의 질량이 매우 크다면, 뉴트랄리노-핵자 충돌은 온전히 가벼운 힉스에 의해서 결정된다. 앞의 Eq. (4) 논의한 바와 같이 뉴트랄리노-힉스 결합상수는 뉴트랄리노의 섞임을 결정하는 행렬 N 의 성분에 따라 결정된다. 그러나 낮은 에너지에서 가벼운 힉스가 지배적인 영향을 미치는 경우, 우리는 낮은 에너지 힉스 정리 [17, 18]를 이용하여 간단한 방법으로 뉴트랄리노-힉스 결합상수가 0이 되는 조건을 찾을 수 있다 [15].

가벼운 CP-짝 힉스 보존이 표준모형의 힉스 보존과 같아지는 근사에서는 힉스의 VEV에 의해 결정되는 뉴트랄리노의 섞임항들이 뉴트랄리노-힉스 결합상수와 같은 형태를 띤다. 즉, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{h\chi\chi} &= \frac{1}{2}m_{\chi_i} \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}h \right) \chi_i \chi_i \\ &= \frac{1}{2}m_{\chi_i}(v)\chi_i \chi_i + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\partial m_{\chi_i}(v)}{\partial v} h \chi_i \chi_i + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Equation (4)의 $g_{h\chi\chi}$ 는 여기서 $\partial m_{\chi_i}(v)/\partial v = g_{h\chi_i\chi_i}$ 를 이용하여 얻을 수 있다. 여기서 $m_{\chi_i}(v)$ 는 질량 행렬 M_χ 의 고유값이므로 다음의 특성 방정식을 만족한다.

$$\det(M_\chi - m_{\chi_i}(v)) = 0 \quad (6)$$

이와 더불어 맹점에서 결합상수 조건 $\partial m_{\chi_i}(v)/\partial v = g_{h\chi_i\chi_i} = 0$ 을 이용하면 다음의 조건식을 얻을 수 있다.

$$(m_{\chi_i}(v) + \mu \sin 2\beta) \left[m_{\chi_i}(v) - \frac{1}{2}\{M_1 + M_2 + \cos 2\theta_W(M_1 - M_2)\} \right] = 0 \quad (7)$$

또한, 맹점에서 조건 $\partial m_{\chi_i}(v)/\partial v = g_{h\chi_i\chi_i} = 0$ 에 따르면 맹점에서 뉴트랄리노 질량 고유값 m_{χ_i} 이 힉스의 VEV에 무관하고, 이것은 질량 고유값들이 $v \rightarrow 0$ 인 극한에서의 값과 같아짐을 의미한다. 즉, 질량 고유값들은 기존 비노, 위노, 또는 힉시노 질량과 같아진다. 다시 말해서 $m_{\chi_i}(v) = M_1, M_2, -\mu$ 이 된다. 이 사실들을 정리해서 뉴트랄리노 암흑물질의 맹점이 발생하는 경우를 요약하면 다음과 같다.

1. $m_\chi = M_1, M_2$, 또는 $-\mu$ 이고, $m_\chi + \mu \sin 2\beta = 0$ 을 만족할 때
2. $m_\chi = M_1 = M_2$ 을 만족할 때

위 표현식에서 별도의 아래첨자 없이 χ 라고 쓰면, 가장 가벼운 뉴트랄리노를 의미한다. 첫 번째 경우는 Eq. (7)의 첫 번째 괄호 안의 항이 0이 되게 만들고, 두 번째 경우는 두 번째 괄호 안의 항이 0이 되게 만든다. 위의 두 가지 경우 모두, 비노, 위노, 헉시노의 질량이 크게 다르지 않은 잘 조절된(well-tempered) 뉴트랄리노의 [19] 범주에서 성립 가능함이 명확하다. 또한, 첫 번째 맹점 조건을 만족하기 위해서는 게이지노(비노 또는 위노)의 질량항과 헉시노 질량항의 부호가 반대가 되어야 한다. 단, 이는 뮤온 $g - 2$ 등의 실험에서는 비교적 선호되지 않는 파라미터 영역이다 [20].

IV. 섭동론을 이용하여 뉴트랄리노 맹점 찾기

앞에서 제시한 방법은 복잡한 뉴트랄리노 질량 행렬을 직접 대각화하지 않고, 매우 간단하게 뉴트랄리노의 맹점 조건과 그 때의 뉴트랄리노 질량을 알 수 있다. 반면에 이 방법으로는 뉴트랄리노 암흑물질이 어떤 성질을 가지는지 직접적으로 확인하기 어려운 단점이 있다. 뉴트랄리노의 암흑물질의 성질은 그것의 성분비에 의해 결정된다. 다시 말해서 뉴트랄리노 암흑물질은 비노, 위노, 헉시노의 섞임에 의해서 결정되기 때문에, 어떤 페르미온 성분이 지배적인 가에 따라 상호작용의 성질이 달라지게 된다. 이 절에서는 이러한 뉴트랄리노의 성질을 기준 논의보다 더욱 표면적으로 드러낼 수 있도록 뉴트랄리노 섞임 행렬 N 의 성분들을 직접 구한다.

MSSM에서 뉴트랄리노 질량 행렬은 Eq. (1)에서 나타난 바와 같이 4×4 행렬로 나타난다. 가장 일반적인 경우 특성 방정식 (7)은 4차 대수 방정식이 된다. 4차 방정식의 일반해는 근의 공식을 이용해 얻을 수 있으나, 이는 극도로 복잡한 형태로 나타나고, 이것 때문에 공식을 이용해 뉴트랄리노 암흑물질의 물리적 특성과 상호작용의 성질을 이해하는 것은 매우 어렵다. 그 대신 섭동 방법을 이용하여 질량 행렬의 고유값과 섞임 행렬의 근사값을 얻을 수 있다 [21]. 이러한 근사값은 비노, 위노, 헉시노의 질량이 힉스 VEV보다 충분히 클 때 매우 유용하다 된다. 즉 $M_1, M_2, \mu \gg v$ 일 때 근사 값이 유효하다. 현재까지 거대강입자충돌기(large hadron collider, LHC) 실험 등에서 얻은 차지노(chargino) 질량의 제한 조건 등을 고려할 때, 이 조건은 문제 없이 만족된다 [22]. 그러므로 섭동론을 이용하여 뉴트랄리노 암흑물질의 질량과 섞임각을 구해보자.

Equation (1)의 질량행렬을 대각화하는 직교행렬 N 은 아래와 같이 두 직교행렬의 곱으로 표현할 수 있다.

$$M_{\text{diag}} = NM_\chi N^T = VUM_\chi U^T V^T = VM'_\chi V^T \quad (8)$$

여기서 U 행렬은 다음과 같다.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

이때 M'_χ 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$M'_\chi = UM_\chi U^T = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{1}{2}g'(v_d + v_u) & \frac{1}{2}g'(-v_d + v_u) \\ 0 & M_2 & \frac{1}{2}g(v_d + v_u) & \frac{1}{2}g(v_d - v_u) \\ -\frac{1}{2}g'(v_d + v_u) & \frac{1}{2}g(v_d + v_u) & \mu & 0 \\ \frac{1}{2}g'(-v_d + v_u) & \frac{1}{2}g(v_d - v_u) & 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서 $|M_1 \pm \mu|, |M_2 \pm \mu| \gg v_u, v_d$ 을 만족하는 파라미터 영역에서 우리는 행렬 V 를 섭동전개를 통해 구할 수 있다. 작은 파라미터 v_u, v_d 에 대해 1차 섭동전개를 이용하여 M'_χ 를 대각화 하면, 고유값은 $m_{\chi_i} = M_1, M_2, \mu, -\mu$ 로 변화 없다.³ 그러나 직교행렬 V 의 성분은 1차 섭동전개에 의해 다음과 같이 나타난다.

$$V_{11} = V_{22} = V_{33} = V_{44} = 1, \quad (11)$$

$$V_{13} = -V_{31} = \frac{1}{2} \frac{g'(v_d + v_u)}{\mu - M_1}, \quad (12)$$

$$V_{14} = -V_{41} = \frac{1}{2} \frac{g'(-v_d + v_u)}{\mu + M_1}, \quad (13)$$

$$V_{23} = -V_{32} = -\frac{1}{2} \frac{g(v_d + v_u)}{\mu - M_2}, \quad (14)$$

$$V_{24} = -V_{42} = -\frac{1}{2} \frac{g(v_d - v_u)}{\mu + M_2} \quad (15)$$

위의 식에 나타나지 않은 나머지 성분들은 모두 0이다. 그러므로 $N = VU$ 로부터 질량행렬의 섞임행렬 성분을 아래와

³ 여기서 고유값의 순서는 앞 절의 논의에서 질량이 가벼운 순서로 표시했던 것과 달리, 기존의 페르미온 기저에서의 순서로 표시한 것임에 주의하자. 이후에 고유값을 질량이 가벼운 순서로 정렬하려면, 변환행렬을 곱해주면 된다.

같이 구할 수 있다.

$$N_{13} = \frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{M_1 v_d + \mu v_u}{\mu^2 - M_1^2}, \quad (16)$$

$$N_{14} = -\frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{\mu v_d + M_1 v_u}{\mu^2 - M_1^2}, \quad (17)$$

$$N_{23} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \frac{\mu v_d + M_2 v_u}{\mu^2 - M_2^2}, \quad (18)$$

$$N_{24} = \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{M_2 v_d + \mu v_u}{\mu^2 - M_2^2}, \quad (19)$$

$$N_{31} = -\frac{g'}{2} \frac{v_d + v_u}{\mu - M_1}, \quad (20)$$

$$N_{32} = \frac{g}{2} \frac{v_d + v_u}{\mu - M_2}, \quad (21)$$

$$N_{41} = \frac{g'}{2} \frac{v_d - v_u}{\mu + M_1}, \quad (22)$$

$$N_{42} = \frac{g}{2} \frac{v_d - v_u}{\mu + M_2} \quad (23)$$

위의 식에 나타나지 않은 나머지 항들의 성분은 U 행렬의 해당 성분과 같다.

여기서 얻은 N 의 성분들을 Eq. (4)에 대입하여, 맹점이 성립할 조건을 찾을 수 있다. 만약, 뉴트랄리노 암흑물질이 대체로 비노의 성질에 가깝다면($M_1 < M_2, \mu$ 인 경우), 앞의 Eq. (23)에서 N_{1i} 성분들이 뉴트랄리노 암흑물질의 성질을 결정하게된다. 이를 식으로 나타내면,

$$\begin{aligned} g_{h\chi\chi} &= -g[N_{13}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \sin \alpha \\ &\quad + N_{14}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \cos \alpha] \\ &\simeq g' N_{13} \sin \alpha + g' N_{14} \cos \alpha, \\ &\simeq -\frac{g'^2 v}{\sqrt{2}} \frac{M_1 \cos \beta + \mu \sin \beta}{\mu^2 - M_1^2} \cos \beta \\ &\quad - \frac{g'^2 v}{\sqrt{2}} \frac{\mu \cos \beta + M_1 \sin \beta}{\mu^2 - M_1^2} \sin \beta \end{aligned} \quad (24)$$

이 근사 계산에서는 앞에서 섭동전개로 얻은 $N_{13,14}$ 의 근사값과 함께 MSSM의 탈결합(decoupling) 한계, 즉 CP-홀(CP-odd) 힉스 질량 m_A 가 매우 클 때, $\beta - \alpha \simeq \pi/2$ 의 관계를 이용하였다. 앞의 식을 더 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$g_{h\chi\chi} \simeq -\frac{g'^2 v}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\mu^2 - M_1^2} \right) (M_1 + 2\mu \sin 2\beta) \quad (25)$$

따라서 $g_{h\chi\chi} = 0$ 이 되기 위해서는 $M_1 + \mu \sin 2\beta = 0$ 을 만족해야 한다. 앞에서 밝힌 바와 같이 1차 섭동 전개에서 고유값은 원래 행렬의 대각 성분과 같으므로, 이 때 뉴트랄리노 암흑물질의 질량은 비노의 질량과 같은 M_1 이다. 만약, 뉴트랄리노 암흑물질이 대체로 위노의 성질에 가깝다면($M_2 < M_1, \mu$ 인 경우), Eq. (4)에서 $N_{1i} \rightarrow N_{2i}$ 로 대체

하면,⁴ 마찬가지의 관계식을 얻을 수 있다. 즉, 뉴트랄리노 암흑물질의 질량은 M_2 와 같고 $M_2 + \mu \sin 2\beta = 0$ 을 만족해야 한다. 마지막으로 뉴트랄리노 암흑물질이 대체로 힉시노의 성질을 가질 때($\mu < M_1, M_2$ 인 경우), Eq. (4)에서 $N_{1i} \rightarrow N_{4i}$ 로 대체하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g_{h\chi\chi} &= -g[N_{43}(N_{42} - \tan \theta_W) \sin \alpha \\ &\quad + N_{44}(N_{42} - \tan \theta_W N_{41}) \cos \alpha] \\ &= -(v_d - v_u)(\sin \alpha + \cos \alpha) \left[\frac{g^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\mu + M_2} - \frac{g'^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\mu + M_1} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

뉴트랄리노-힉스 결합상수가 되기 위해서는 $v_d - v_u = 0$ 을 만족해야 한다. 즉, $\sin 2\beta = 1$ 이어야 함을 알 수 있고, 이 때 뉴트랄리노 암흑물질의 질량 고유값은 $-\mu$ 이고, 따라서 $-\mu + \mu \sin 2\beta = 0$ 을 만족함을 확인할 수 있다. 그러므로 이 절에서 섭동전개를 이용해서 찾은 맹점 조건은 각각 대체로 비노의 성질을 갖는 경우, 대체로 위노의 성질을 갖는 경우, 대체로 힉시노의 성질을 갖는 경우에 대해 모두 앞의 III 절에서 힉스 정리를 이용해 얻은 조건중 첫 번째와 일치함을 확인할 수 있다.⁵

V. 두 개의 힉스 보존이 매개하는 다이어그램이 서로 상쇄하는 경우

앞의 절에서는 CP-짝 힉스 보존 중에서 무거운 힉스 보존이 매우 무거워서, 뉴트랄리노-핵자 충돌이 온전히 가벼운 힉스 보존에 의해서만 매개되는 경우를 다루었다. 이때 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적은 뉴트랄리노-힉스 결합상수 $g_{h\chi\chi}^2$ 에 비례하므로 뉴트랄리노 암흑물질의 맹점의 조건은, $g_{h\chi\chi} = 0$ 을 만족하는 조건과 완전히 일치한다. 한편, 무거운 CP-짝 힉스 보존이 충분히 무겁지 않을 때에는 뉴트랄리노-핵자의 충돌이 가벼운 힉스 보존이 매개하는 과정, 무거운 힉스 보존이 매개하는 과정의 두 가지 기여가 함께 충돌 단면적에 기여하게 된다. 이 때에는 각각의 뉴트랄리노-힉스 결합상수가 0이 되지 않더라도 두 가지 기여의 상쇄 간섭에 의해서 충돌 단면적이 현저히 작아질 수 있다.

MSSM에서 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적은 다음과 같아

⁴ 앞에서 언급한 바와 같이 N 의 성분을 섭동전개로 계산할 때에는 고유치를 질량의 크기순으로 정렬한 것이 아니고, 원래 행렬의 페르미온 기저에서 표시한 순서에 맞추어 나타내었기 때문이다.

⁵ III 절에서 제시된 두 번째 맹점 조건은 $M_1 = M_2$ 를 요구하는데, 이 경우 이 절에서 제시된 섭동 방법으로는 나타내기 어렵다.

나타난다 [3,4].

$$\sigma = \frac{4m_r^2}{\pi} \left[\sum_{q=u,d,s} f_{T_q}^N \left(\frac{m_N}{m_q} \right) \left(\frac{g_{h\chi\chi} g_{hqq}}{2m_h^2} + \frac{g_{H\chi\chi} g_{Hqq}}{2m_H^2} \right) + \frac{2}{27} f_{TG}^N \sum_{q=c,b,t} \left(\frac{m_N}{m_q} \right) \left(\frac{g_{h\chi\chi} g_{hqq}}{2m_h^2} + \frac{g_{H\chi\chi} g_{Hqq}}{2m_H^2} \right) \right]^2 \quad (27)$$

여기서 N 은 핵자를 의미하고(즉, 양성자(p) 또는 중성자(n)), m_N 은 핵자의 질량, m_r 은 뉴트랄리노-핵자 계의 환산질량(reduced mass), $g_{H\chi\chi}$ 은 무거운 힉스와 뉴트랄리노의 결합상수, g_{hqq} 는 가벼운 힉스와 쿼크의 결합상수, g_{Hqq} 는 무거운 힉스와 쿼크의 결합상수이다. 핵자 내의 쿼크 결합인자(form factor)는 다음과 같다. 가벼운 쿼크 u, d, s 쿼크에 대해서는 $f_{T_u}^p = 0.017 \pm 0.008$, $f_{T_d}^p = 0.028 \pm 0.014$, $f_{T_s}^p = 0.040 \pm 0.020$, $f_{T_u}^n = 0.011$, $f_{T_d}^n = 0.0273$, $f_{T_s}^n = 0.0447^\circ$ 이고 [23–25] 무거운 쿼크 c, b, t 쿼크에 대해서는

$$f_{TG}^{p,n} = 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{T_q}^{p,n} \quad (28)$$

이 된다. 무거운 힉스와 뉴트랄리노의 결합상수는 다음과 같다.

$$g_{H\chi\chi} = -g[-N_{13}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \cos \alpha + N_{14}(N_{12} - \tan \theta_W N_{11}) \sin \alpha] \quad (29)$$

두개의 힉스 보존과 쿼크의 결합상수는 다음과 같다.

$$g_{huu} = \frac{m_u}{\sqrt{2}v} \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad g_{Huu} = \frac{m_u}{\sqrt{2}v} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (30)$$

$$g_{hdd} = -\frac{m_d}{\sqrt{2}v} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}, \quad g_{Hdd} = \frac{m_d}{\sqrt{2}v} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (31)$$

여기서 2, 3세대 쿼크들에 대한 결합상수는 위의 식에서 $u \rightarrow c, t$ 와 $d \rightarrow s, b$ 로 얻을 수 있다. 제시된 관계식들을 이용하면, Eq. (27)은 다음의 형태로 정리할 수 있다.

$$\sigma = \frac{m_r^2 m_N^2}{2\pi v^2} \mathcal{A}^2 \quad (32)$$

여기서 \mathcal{A} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \left(F_u^N \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - F_d^N \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \frac{g_{h\chi\chi}}{m_h^2} \\ & + \left(F_u^N \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + F_d^N \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \frac{g_{H\chi\chi}}{m_H^2} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 $F_u^N = f_{T_u}^N + 2(2/27)F_{TG}^N \simeq 0.15^\circ$ 이고 $F_d^N = f_{T_d}^N + f_{T_s}^N + (2/27)f_{TG}^N \simeq 0.14^\circ$ 이다. 앞의 절에서 논의한 것과

마찬가지로 무거운 힉스 보존의 탈결합 한계 상황을 고려하면, $\beta - \alpha \simeq \pi/2$ 이므로, 위의 식에서 \mathcal{A} 를 정리하면,

$$\mathcal{A} \simeq (F_u^N + F_d^N) \frac{g_{h\chi\chi}}{m_h^2} + (-F_u^N \cot \beta + F_d^N \tan \beta) \frac{g_{H\chi\chi}}{m_H^2} \quad (34)$$

이 되고 여기서 앞의 절에서 구한 직교행렬 N 의 성분을 이용하면,

$$g_{h\chi\chi} = \frac{g'^2 v}{\sqrt{2}} \frac{\mu \cos 2\beta}{\mu^2 - M_1^2} \quad (35)$$

대체로 비노인 뉴트랄리노일 때

$$g_{h\chi\chi} = \frac{g^2 v}{\sqrt{2}} \frac{\mu \cos 2\beta}{\mu^2 - M_2^2} \quad (36)$$

대체로 위노인 뉴트랄리노일 때

$$g_{h\chi\chi} = \frac{v}{\sqrt{2}} \left(\frac{g^2}{\mu + M_2} - \frac{g'^2}{\mu + M_1} \right) \cos 2\beta \quad (37)$$

대체로 헥시노인 뉴트랄리노일 때

로 나타남을 알 수 있다. 앞의 절에서 얻은 각각의 경우에 대응하는 $g_{H\chi\chi}$ 의 결과를 이용하여 종합하면 다음의 관계를 얻을 수 있다 [16].

$$\begin{aligned} A \propto & (F_u^N + F_d^N) \frac{m_\chi + \mu \sin 2\beta}{m_h^2} \\ & + \left(\frac{F_u^N}{\tan^2 \beta} - F_d^N \right) \frac{\mu \tan \beta \cos 2\beta}{m_H^2} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 m_χ 은 대체로 비노, 위노, 헥시노의 성질을 갖는 뉴트랄리노 암흑물질에 대해 $M_1, M_2, -\mu$ 가 된다. 그러므로 암흑물질이 맹점에 존재할 조건은 다음과 같다.

$$(F_u^N + F_d^N) \frac{m_\chi + \mu \sin 2\beta}{m_h^2} = - \left(\frac{F_u^N}{\tan^2 \beta} - F_d^N \right) \frac{\mu \tan \beta \cos 2\beta}{m_H^2} \quad (39)$$

일반적으로 MSSM에서 선호되는 파라미터 영역은 $\tan \beta \gg 1$ 이고, 따라서 위의 식을 한 번 더 근사하면

$$(F_u^N + F_d^N) \frac{m_\chi + \mu \sin 2\beta}{m_h^2} \simeq -F_d^N \frac{\mu \tan \beta}{m_H^2} \quad (40)$$

이 된다. 이 조건을 만족하기 위해서는 앞 절에서 다른 무거운 힉스의 기여가 무시되는 영역에서의 조건과 마찬가지로 $\mu < 0$ 이어야 한다. 무거운 힉스의 질량 조건을 보기 위해 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_H & \simeq \left(\frac{F_d^N}{F_u^N + F_d^N} \right)^{1/2} \left| \frac{\mu \tan \beta}{m_\chi + \mu \sin 2\beta} \right|^{1/2} m_h \\ & \simeq 0.7 \times \left| \frac{\mu \tan \beta}{m_\chi + \mu \sin 2\beta} \right|^{1/2} m_h \end{aligned} \quad (41)$$

여기서 두 번째 줄의 근사식은 $F_u^N \simeq 0.15$, $F_d^N = 0.14$ 값을 대입하여 얻었다. 예를 들어, 뉴트랄리노 암흑물질이 대체로 비노의 성질을 가지고, 각각의 파라미터가 $M_1 = 120\text{ GeV}$, $\mu = -500\text{ TeV}$, $\tan\beta = 10$ 일 때, $m_H \sim 1.4\text{ TeV}$ 이면 맹점 조건을 만족할 수 있다. 이 영역은 ATLAS에서 얻은 최근의 탐색 한계치 가까이에 있으며 [26], 맹점의 위치에 따라 대응하는 영역이 이후 LHC 실험에서 확인될 수 있다.

VI. 추가 논의 사항들

1. 양자보정 효과

이 논문에서 지금까지 뉴트랄리노 암흑물질이 직접관측 실험에서 발견되기 매우 어려운 맹점에 존재할 조건을 고려하였다. 특히 뉴트랄리노-핵자 충돌에 기여하는 트리 레벨(tree level) 과정에서 충돌 단면적이 0이 되는 조건을 고찰하였다. 그러나 실제 충돌 과정에는 트리 레벨 뿐만 아니라 고차의 양자보정 항들도 함께 기여하게 된다. 이 경우 트리 레벨만 고려했을 때의 맹점 조건이 양자 보정항을 추가했을 때 맹점 조건과 항상 일치하지 않는다. 그래서 트리 레벨 과정으로부터 얻은 맹점에서의 뉴트랄리노-핵자 충돌 단면적은 실제보다 상당히 크게 나타난다. 그러나 매우 중요한 사실은 맹점이 완전히 사라지는 것이 아니라 인접한 다른 파라미터 영역에서 반드시 나타난다는 것이다. 이러한 사실은 MSSM을 더욱 단순화한 싱글릿-더블릿 암흑물질 모형에서 잘 논증되었다 [27]. MSSM에서는 이 모형보다 더 복잡하고 다양한 양자 보정항들이 충돌 과정에 기여하긴 하지만, 이 보정항들 모두 약한 결합(weak coupling)에 의한 양자 보정항들이므로 그 결과의 특징은 참고문헌 [27]에서 얻은 결과와 크게 다르지 않을 것으로 기대된다. 양자 보정항 계산과 그에 따른 영향은 후속 연구에서 다루겠다.

2. 암흑물질 밀도

뉴트랄리노 암흑물질을 포함하는 윔프 모형의 가장 큰 장점은 암흑물질의 밀도가 표준 우주론의 열적 평형상태로부터 자연스럽게 얻어진다는 점이다. 그래서 만약 우리가 암흑물질이 이러한 열적 평형상태로부터 생성되는 프리즈 아웃 과정으로 결정된다면, 암흑물질 밀도 관측값으로부터 추가적인 제한조건들을 얻을 수 있다. 이러한 상황을 가정할 경우, 암흑물질의 맹점 영역의 상당 부분이 암흑물질 밀도를 만족하지 못하는 것을 알 수 있다 [15]. 그러나 초기

우주에서 암흑물질의 생성은 표준 우주론의 프리즈아웃 과정 뿐만 아니라, 여러 가지의 비표준적인 가능성들이 있다. 예를 들어, 무거운 입자(그레비티노(gravitino) 등)가 늦게 붕괴하여 뉴트랄리노를 추가로 생성할 수도 있고, 반대로 무거운 스칼라 입자(모듈러스(modulus) 등)가 붕괴하면서 엔트로피(entropy)를 추가로 발생하여 암흑물질의 밀도를 낮출 수도 있다.⁶ 그러므로 이 논문의 논의에서 암흑물질의 밀도에 의한 추가적인 제한조건은 고려하지 않았다.

3. CP 위상값이 0이 아닌 경우

이 논문에서는 비노, 위노, 힉시노 질량항 사이에 존재할 수 있는 CP 위상값을 모두 0으로 가정하였다. 그래서 CP 대칭성 깨짐에 의한 추가적인 제한조건을 배제하고 논의를 진행하였다. 그런데 만일 CP 위상값이 0이 아니라면, 뉴트랄리노의 질량항 (1)은 훨씬 복잡한 형태의 유니터리(unitary)행렬에 의해 대각화된다. 이는 암흑물질 맹점이 CP 위상값의 변화에 따라 더 넓은 파라미터 영역에서 생겨날 수 있음을 의미한다. 반면에 0이 아닌 CP 위상값은 뉴트랄리노와 차지노가 매개하는 양자보정 효과에 의해서 전자의 전기쌍극자모멘트(electric dipole moment, EDM)에 상당히 기여할 수 있고, 이는 전자 EDM의 실험값으로부터 추가로 모형에 제한이 가해지게 된다 [29]. CP 위상값이 있을 때, 암흑물질의 맹점 조건과 이 때 발생할 수 있는 EDM 제한 조건들에 대한 구체적 논의는 후속 논문에서 다룬다.

4. 일반적인 두 개의 힉스 더블릿 모형에서 뉴트랄리노 암흑물질

이 논문에서는 MSSM의 뉴트랄리노 암흑물질을 주로 다루었다. 즉, 표준모형의 $SU(2)_L$ 게이지 상호작용에 대해 싱글릿(\tilde{B}), 2개의 더블릿(\tilde{H}_d , \tilde{H}_u) 한 개의 트리플릿(\tilde{W}) 페르미온들의 전기적 중성 성분들이 뉴트랄리노 암흑물질의 구성요소가 된다. 이 페르미온 입자들과 힉스 보존들 사이의 결합상수는 Eq. (1)에도 나타나듯이 초대칭에 의해 $SU(2)_L$ 게이지 결합상수 g , $U(1)_Y$ 게이지 결합상수 g' 와 일치한다. 한편, MSSM과 유사하게 일반적인 두 개의 힉스 더블릿 모형(2 Higgs Doublet Model, 2HDM)에서도

⁶ 무거운 입자들에 의해 뉴트랄리노가 추가로 생성되고, 또한 엔트로피 생성에 의해 밀도가 줄어드는 등에 대한 구체적인 분석의 한 가지 예는 참고문헌 [28]에서 찾아볼 수 있다.

싱글릿, 더블릿, 트리플릿 페르미온을 도입하고, 표준모형의 게이지 대칭성에 맞게 각각의 상호작용을 도입할 수 있다. 2HDM에서 도입한 페르미온 암흑물질의 경우 MSSM의 뉴트랄리노와 가장 큰 차이점은 페르미온과 힉스 사이의 결합상수들이 게이지 결합상수들과 같을 이유가 없다는 점이다. 이러한 사실은 보다 더 다양한 형태의 암흑물질-힉스 상호작용이 가능하고, 따라서 더욱 복합적인 형태의 맹점이 존재할 수 있다. 다양한 형태의 2HDM과 각 경우에서 암흑물질 맹점의 조건은 참고문헌 [30]에서 구체적으로 논의되었다.⁷

VII. 결론 및 토의

약상호작용을 하는 무거운 입자인 웜프 입자는 암흑물질의 유력한 후보로 오랫동안 직접관측 실험의 주된 대상이었다. 그러나 실험의 민감도가 수십만배 이상의 규모로 높아지는 동안에도 웜프 입자를 확증할만한 증거는 발견되지 않았다. 이러한 사실에 입각하여, 암흑물질의 상호작용이 우리가 고려하고 있는 직접관측 실험의 맹점에 존재하고 있을 가능성이 제기되었다. 기존의 연구에서는 MSSM 모형에서 대표적인 웜프 입자인 뉴트랄리노가 직접관측 실험의 맹점에 존재할 조건을 구하였다. 특히, 낮은 에너지 힉스 정리를 이용하여, 정확하고 효과적인 방법으로 각 맹점에서 모형의 파라미터들 사이에 성립하는 조건을 얻었다. 그러나 이 방법에서는 뉴트랄리노 암흑물질이 어떤 성질을 띠는지 명확하게 파악하기 어려운 단점이 있다.

이런 이유로 이 논문에서는 섭동론의 방법을 이용하여 뉴트랄리노 질량행렬을 대각화 하고, 이를 이용하여 직접적으로 암흑물질의 맹점 조건을 찾는 방법을 제시하였다. 이를 통하여 1차 섭동전개에서 얻은 결과가 기존 낮은 에너지 힉스 정리를 이용해 얻은 조건과 일치함을 확인하였다. 더 나아가 두 개의 힉스 보존이 뉴트랄리노-핵자 충돌에 함께 기여할 때에 생겨날 수 있는 맹점 조건 또한 섭동 전개 방법을 이용하여 유도했다. 이 방법의 장점은 뉴트랄리노의 질량행렬을 대각화 하는 섭입행렬을 직접적으로 구함으로써, 뉴트랄리노 암흑물질의 성질을 쉽게 파악할 수 있다는 것이다. 그러므로 이를 이용하면, 비록 직접관측 실험에서 뉴트랄리노를 발견하기는 어렵더라도, LHC나 여타 가속기 실험에서 뉴트랄리노를 탐색하기에 더 용이하다. 즉, 뉴트랄리노 암흑물질이 대체로 비노 성질을 띠고 있는지, 또는 힉시노 성질을 띠고 있는지에 따라 초점을 맞추어야 될 탐색 채널을 결정할 수 있다. 따라서 실제로 암흑물질이 맹점에 존재하고 있는지 검증할 수 있는 단초를 제공한다.

⁷ 인용된 논문에서는 싱글릿, 더블릿 페르미온들만 도입한 모형에 대해서만 논의하였다. 그러나 추가로 트리플릿을 도입하더라도 논의가 크게 달라지지 않는다.

감사의 글

이 논문은 2019학년도 경북대학교 신임교수정착연구비에 의하여 연구되었습니다.

REFERENCES

- [1] N. Aghanim *et al.*, [Planck], *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020) [erratum: *Astron. Astrophys.* **652**, C4 (2021)].
- [2] G. Bertone and D. Hooper, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045002 (2018).
- [3] G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest, *Phys. Rep.* **267**, 195 (1996).
- [4] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Phys. Rep.* **405**, 279 (2005).
- [5] H. P. Nilles, *Phys. Rep.* **110**, 1 (1984).
- [6] H. E. Haber and G. L. Kane, *Phys. Rep.* **117**, 75 (1985).
- [7] S. P. Martin, *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **18**, 1 (1998).
- [8] M. Schumann, *J. Phys. G* **46**, 103003 (2019).
- [9] Sec. 27. Dark Matter in R. L. Workman *et al.*, (Particle Data Group), to be published in *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 083C01 (2022).
- [10] A. Bottino *et al.*, *Phys. Lett. B* **402**, 113 (1997).
- [11] R. Essig, J. Mardon and T. Volansky, *Phys. Rev. D* **85**, 076007 (2012).
- [12] J. Garcia-Bellido, A. D. Linde and D. Wands, *Phys. Rev. D* **54**, 6040 (1996).
- [13] D. J. H. Chung, E. W. Kolb and A. Riotto, *Phys. Rev. D* **59**, 023501 (1998).
- [14] L. J. Hall, K. Jedamzik, J. March-Russell and S. M. West, *JHEP* **2010**, 80 (2010).
- [15] C. Cheung, L. J. Hall, D. Pinner and J. T. Ruderman, *JHEP* **2013**, 100 (2013).
- [16] P. Huang and C. E. M. Wagner, *Phys. Rev. D* **90**, 015018 (2014).
- [17] J. R. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys. B* **106**, 292 (1976).
- [18] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin and V. I. Zakharov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **30**, 711 (1979), ITEP-42-1979.
- [19] N. Arkani-Hamed, A. Delgado and G. F. Giudice, *Nucl. Phys. B* **741**, 108 (2006).

- [20] T. Moroi, *Phys. Rev. D* **53**, 6565 (1996) [erratum: *Phys. Rev. D* **56**, 4424 (1997)].
- [21] K. J. Bae, R. Dermisek, H. D. Kim and I. W. Kim, *JCAP* **2007**, 14 (2007).
- [22] [CMS], [arXiv:2205.09597 [hep-ex]].
- [23] P. Junnarkar and A. Walker-Loud, *Phys. Rev. D* **87**, 114510 (2013).
- [24] R. J. Hill and M. P. Solon, *Phys. Lett. B* **707**, 539 (2012).
- [25] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov and A. Semenov, *Comput. Phys. Commun.* **176**, 367 (2007).
- [26] G. Aad *et al.* [ATLAS], *Phys. Rev. Lett.* **125**, 051801 (2020).
- [27] T. Han, H. Liu, S. Mukhopadhyay and X. Wang, *JHEP* **2019**, 80 (2019).
- [28] K. J. Bae, H. Baer, V. Barger and R. W. Deal, *JHEP* **2022**, 138 (2022).
- [29] T. Abe, N. Omoto, O. Seto and T. Shindou, *Phys. Rev. D* **98**, 075029 (2018).
- [30] M. E. Cabrera, J. A. Casas, A. Delgado and S. Robles, *JHEP* **2020**, 166 (2020).