

Введение

Количество публикаций на эту тему очень велико; имеются обзоры с обширной библиографией, например 1,2. Чтобы не повторяться, мы решили осветить лишь ряд моментов, имеющих дискуссионный характер. Рассмотрены наиболее употребительные теоретические схемы и модели; обсуждаются пределы их применимости и возможные обобщения; подчеркнуты вопросы, теория которых недостаточно разработана. Основное внимание направлено на пороговые соотношения ввиду практической важности этого вопроса.

1. Основное уравнение

Рассмотрим стационарное (в сопутствующей системе) самосогласованное распределение. Его случайное возмущение приведет к возникновению дополнительного тока $J = \sum_k J_k e^{ik\theta_c}$ и электрического поля E (θ_c - обобщенный азимут). Из уравнений Максвелла вытекает линейная связь (в лабораторной системе):

$$E_{k\omega} = -\frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{k'} Z_{kk'} \omega J_{k'\omega}, \quad (1)$$

где \mathcal{L} - длина ускорителя, зависимость от времени $\sim e^{-i\omega t}$. Фактически в токе пучка представлены лишь гармоники $k' \approx \frac{\omega}{\omega_s}$; в свою очередь, воздействуют на пучок гармоники поля $k \approx \frac{\omega}{\omega_s}$, где ω_s - угловая скорость равновесной частицы. Поэтому в (1) достаточно удержать слагаемое $k' = k$. После этого с помощью преобразования $\theta_c = \theta + \omega_s t$ перейдем в сопутствующую систему. В результате (1) приобретает вид:

$$E_k(\Omega) = -\frac{1}{\mathcal{L}} Z_k(\Omega) J_k(\Omega), \quad (2)$$

где $Z_k(\Omega) = Z_{kk}\omega$, $J_k(\Omega) = J_{k\omega}$ и т.д. Теперь зависимость от времени $\sim e^{-i\Omega t}$, $\Omega = \omega - k\omega_s$. Величина $Z_k(\Omega)$, называемая импедансом камеры, была впервые введена в работе 3. Ее вычисление представляет собой чисто электродинамическую задачу, которую мы далее не рассматриваем, считая импеданс известным.

Вторая связь E и J получается из кинетического уравнения. Пока возмущение мало, эта связь линейна:

$$J_k(\Omega) = -\mathcal{L} \sum_{k'} \Pi_{kk'}(\Omega) E_{k'}(\Omega). \quad (3)$$

Величины $\Pi_{kk'}$ естественно называть матрицей проводимости пучка. Подстановка (2) в (3) дает основную систему уравнений:

$$J_k = \sum_{k'} \Pi_{kk'}(\Omega) Z_{k'}(\Omega) J_{k'}. \quad (4)$$

Значения Ω , при которых (4) имеет нетривиальные решения, определяют спектр когерентных возбуждений пучка. Наличие решений с $\text{Im } \Omega > 0$ свидетельствует о неустойчивости распределения. Фактически неустойчивость возникает лишь при достаточно высокой интенсивности, т.е. имеет пороговый характер.

2. Несгруппированный пучок

Если равновесное распределение однородно по азимуту, матрица Π диагональна, то из (4) следует дисперсионное уравнение:

$$\Pi_{kk}(\Omega) Z_k(\Omega) = 1, \quad \Pi_{kk} = i \frac{eJ}{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G'(u) du}{\Omega + k\eta\omega_s u/p_s}, \quad (5)$$

где $u = p - p_s$ - отклонение импульса частицы от равновесного, $G(u)$ - равновесная функция распределения, нормированная на 1, J - средний ток пучка, $\eta = \alpha - \gamma^{-2}$, α - коэффициент расширения орбит, $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ - приведенная энергия частицы. Проводимость несгруппированного пучка была найдена в работах 4,5,

а исчерпывающее исследование проведено в 6-8. Критерий устойчивости имеет вид:

$$\left| \frac{Z_k}{k} \right| < \frac{\eta |\beta|^2 E}{eJ\Lambda} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2, \quad (6)$$

где β - приведенная скорость, $\pm \frac{\Delta p}{p}$ - импульсный разброс, Λ - коэффициент ~ 1 , зависящий от вида функции G и от фазы импеданса. Для реактивного импеданса неустойчивость возможна только при $\eta \text{Im } Z_k > 0$.

Примечание. Импеданс, определенный согласно (2), зависит от положения центра пучка: $Z_k = Z_k(\Omega, r_0)$. Более строгий подход, при котором учитывается зависимость среднего радиуса орбиты от импульса частицы, требует обобщения этого понятия: $Z_k = Z_k(\Omega, r_0 + \alpha R_0 \frac{u}{p_s})$, где R_0 - средний радиус ускорителя 23. Такой импеданс должен остаться под знаком интеграла по du в дисперсионном уравнении (5). Практическое значение соответствующих поправок неясно. Мы будем пользоваться прежним определением импеданса (2), который представляет собой первый член разложения по малому параметру.

3. Сгруппированный пучок: основные теоретические схемы

Проводимость одиночного сгустка впервые найдена в работе 9/:

$$\Pi_{kk'}^{(1)} = -i \frac{Ne^2 \omega_s^2 |\eta|}{2\pi^2 \beta^2 E \eta} \sum_m \frac{m}{k'} \int \frac{I_{mk}(S) I_{mk'}^*(S)}{\Omega - m\Omega_c(S)} F'(S) dS, \quad (7a)$$

$$I_{mk}(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\psi + ikX(S,\psi)} d\psi, \quad (7b)$$

где N - число частиц, ψ и $\Omega_c(S)$ - фаза и частота синхротронных колебаний, $X = \theta - \theta_s$ - отклонение от синхронной частицы по азимуту, πS - площадь, заключенная внутри фазовой траектории на плоскости $X, u/p_s$; $F(S)$ - нормированная на 1 равновесная функция распределения. Ряд по m суммируется; получаемое выражение для $\Pi_{kk'}$ особенно удобно для исследования "быстрой" неустойчивости ($\text{Im } \Omega \gg \Omega_c$), на чем мы не будем останавливаться 10,2,15.

Систему (4) с матрицей (7a) можно записать в других представлениях, что, разумеется, не изменит физическое содержание задачи. Рассмотрим наиболее употребительные схемы.

А. Совершив в (4) обратное преобразование Фурье, составим интегральное уравнение для функции $J(\theta, \Omega) = \sum_k J_k(\Omega) e^{ik\theta}$. Впервые это было сделано в работе 9/, где получен важный результат: в сгруппированном пучке невозможна неустойчивость отрицательной массы.

В. Возмущение функции распределения представимо в виде $\sum_m f_m(S) e^{im\psi}$. Каждое слагаемое здесь и в (7a) связано с колебаниями определенной мультипольности: дипольными ($|m|=1$), квадрупольными и т.д. Связь функций f_m с гармониками тока установлена в 9:

$$f_m(S) \sim \frac{m F'(S)}{\Omega - m\Omega_c(S)} \sum_k \frac{Z_k}{k} I_{mk}(S) J_k. \quad (8)$$

Подстановка этого выражения в (4) приводит к системе интегральных уравнений для функций f_m , известных как уравнения радиальных мод 11,2. С их помощью получен ряд результатов, широко используемых для практических расчетов - главным образом, для узкополосного импеданса в приближении разделенных мультиполей (см. ниже).

Таким образом, изложенные схемы эквивалентны. Мы будем пользоваться системой (4), хотя такой выбор - дело вкуса.

4. Сгруппированный пучок: основные предположения

Обобщение (7а) на многосгустковую систему дает:

$$\Pi_{kk'} = \sum_{j=1}^q \Pi_{kk'}^{(j)} e^{i \frac{k-k'}{q} (2\pi j - \varphi_j)}, \quad (9)$$

где q - кратность ускорения, φ_j - синхронная фаза j -го сгустка, величины $\Pi_{kk'}^{(j)}$ определены согласно (7а) для каждого сгустка. Подстановка (9) в (4) приводит к сложной системе, которую невозможно решить без упрощений. Большинство завершённых исследований проведено при следующих предположениях:

А. Симметричное заполнение

Все имеющиеся сгустки считаются одинаковыми и эквивалентными. Не ограничивая общности, можно положить в (9) $\varphi_j = 0$, что дает:

$$\Pi_{kk'} = M \Pi_{kk'}^{(1)} \sum_{\ell'} \delta_{k', k+M\ell'}, \quad (10)$$

где M - число сгустков. Нетрудно видеть, что при этом индексы в системе (4) пробегает значения: $k = M\ell + n$, $k = M\ell' + n$ (суммирование по ℓ'). Проводимость по-прежнему можно вычислять по формуле (7а), понимая под N полное число частиц в пучке. Числа $n = 0, 1, \dots, M-1$ определяют сдвиг фаз когерентных колебаний соседних сгустков, равный $\frac{2\pi n}{M}$.

Далее мы также будем использовать это предположение, хотя при этом, видимо, занижается порог неустойчивости.

В. Приближение разделенных мультиполей

Как уже отмечалось, каждое слагаемое в (7а) отвечает колебаниям определенной мультипольности. Считается, что при достаточно низкой интенсивности колебания с индексом m имеют частоту $\Omega \approx m\Omega_c$, т.е. разные мультиполи возбуждаются независимо. Тогда в (7а) можно оставить единственное слагаемое. Это приближение эксплуатируется очень широко (см., напр. 1,2). Порой явно или неявно принимается, что на пороге неустойчивости колебания всегда имеют мультипольный характер 2,14. С этим трудно согласиться хотя бы потому, что из-за нелинейности синхротронных колебаний их частоты имеют разброс $\Delta\Omega_c$. Это приводит к неопределенности когерентной частоты m -й моды $\Delta\Omega = m\Delta\Omega_c$. При достаточно большом m неопределенность превышает расстояние между спектральными линиями, что неизбежно ведет к связи мультиполей.

Вопрос исследован в работах 15,16, где получено как условие применимости приближения разделенных мультиполей, так и последствия его нарушения. Эти результаты изложены в п. 6.

С. Узкополосный импеданс

Большой практический интерес представляет резонансный импеданс:

$$Z_{kk\omega} = \frac{R_r}{1 - i \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{2\omega\Delta\omega}}, \quad \text{т.е. } Z_k(\Omega) = \frac{R_r}{1 - i \frac{(k\omega_s + \Omega)^2 - \omega_r^2}{2\Delta\omega(k\omega_s + \Omega)}}. \quad (11)$$

При $\Delta\omega \ll M\omega_s$ в сумме (4) достаточно учесть не более двух слагаемых. Если к тому же для любого целого p выполняется условие

$$|\omega_r - pM\omega_s/2| \gg \Delta\omega, \quad (12)$$

дисперсионное уравнение предельно упрощается:

$$\Pi_{kk}(\Omega) Z_k(\Omega) = 1, \quad k = M\ell + n \pm \frac{\omega_r}{\omega_s}. \quad (13)$$

Многочисленные следствия этого уравнения изложены в следующем разделе. Отказ от предположения об узкополосности импеданса приводит к значительным трудностям, которые до сих пор не удалось полностью преодолеть. Этот вопрос рассматривается в п. 7-8.

5. Порог неустойчивости сгруппированного пучка, взаимодействующего с узкополосным резонатором

В этом разделе мы используем методику работ 15-16 хотя многие результаты были известны и раньше.

С помощью (7а) и (10) уравнение (13) можно записать в виде:

$$Y_k(\Omega) = y_k(\Omega), \quad (14a)$$

$$Y_k = -i \frac{\Omega_0 S_0}{\pi} \sum_m \int \frac{F'(S) |I_{mk}(S)|^2}{\Omega - m\Omega_c(S)} dS, \quad (14b)$$

$$y_k = \frac{\beta^2 E S_0 \Omega_0 \eta^0}{e J \omega_s \eta} \frac{k}{Z_k}, \quad (14в)$$

где J - средний ток пучка, πS_0 - фазовая площадь сгустка. Смысл частоты $\Omega_0 \sim \Omega_c$ будет установлен позже.

Для решения подобных уравнений широко используется графический метод (см., напр. 7,8). С помощью (14б) построим на комплексной плоскости Y отображение линии $\text{Im } \Omega \rightarrow 0$:

$$\text{Re } Y^{(th)} = -\Omega_0 S_0 \frac{|\Omega|}{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F'(S_m)}{|\Omega_c'(S_m)|} |I_{mk}(S_m)|^2, \quad (15a)$$

$$\text{Im } Y^{(th)} = -\frac{\Omega_0 S_0}{\pi} \sum_m p.v. \int \frac{F'(S) |I_{mk}(S)|^2}{\frac{\Omega}{m} - \Omega_c(S)} dS, \quad (15b)$$

где $p.v.$ - главное значение интеграла, S_m определяется из уравнения:

$$m\Omega_c(S_m) = |\Omega|. \quad (16)$$

Замкнутая кривая $Y^{(th)}$ ограничивает часть плоскости Y вблизи начала координат. Для устойчивости достаточно, чтобы точка y_k находилась вне этой области. Обычно пороговые диаграммы строят на плоскости Y^{-1} , однако это затрудняет оценку вклада колебаний различной мультипольности.

Несколько характерных пороговых диаграмм показано на рис. 1. Поскольку они симметричны относительно мнимой оси, изображены только правые половины. Рассмотрен режим циркуляции при постоянной энергии. Функция распределения сгустка взята в виде сопряженных парабол:

$$F'(S) = -\frac{8}{S_0^3} \begin{cases} S & \text{при } S < S_0/2 \\ S_0 - S & \text{при } S > S_0/2 \end{cases} \quad (17)$$

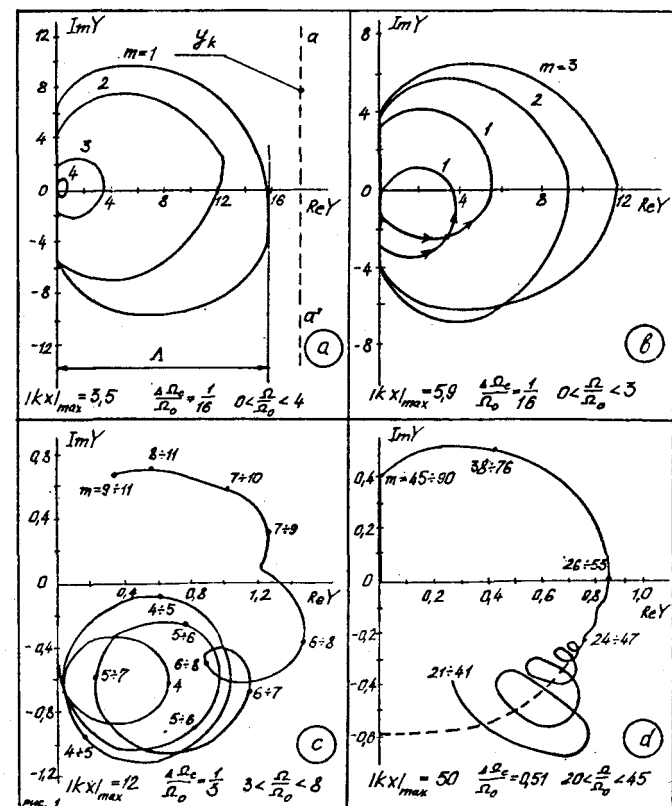


Рис. 1. Пороговые диаграммы

Форма диаграмм зависит от двух параметров: относительного разброса синхротронных частот $\frac{\Delta\Omega_c}{\Omega_0}$ и произведения $|kX|_{\max}$.

Если оба параметра малы, пороговая кривая представляет собой множество вложенных друг в друга замкнутых петель (рис. 1а). В пределах каждой петли вклад в (15а) дает единственное слагаемое, и в этом смысле можно говорить о независимом возбуждении колебаний разной мультипольности. В случае 1а наиболее неустойчивы дипольные колебания ($m=1$). При увеличении $|kX|_{\max}$ "нормальный" порядок следования петель может нарушиться, хотя приближение разделенных мультиполей останется в силе (рис. 1б). Дальнейшее увеличение $|kX|_{\max}$ и/или $\frac{\Delta\Omega_c}{\Omega_0}$ приводит к тому, что на внешней части пороговой диаграммы вклад в $\text{Re } Y^{(th)}$ дают несколько слагаемых ряда (15а), что означает совместное возбуждение нескольких мультиполей. Их индексы в некоторых точках пороговой кривой отмечены на рис. 1с. При большом числе связанных мультиполей кривая упрощается, что свидетельствует о возникновении в сгустке упорядоченности (рис. 1).

Далее мы явно учтем резонансный характер импеданса, воспользовавшись формулой (11). Поскольку при изменении n или Ω $\text{Re } Y_k(\Omega)$ почти не меняется, точка y_k перемещается вдоль прямой aa' , параллельной мнимой оси (рис. 1а). С учетом (14б) это позволяет сформулировать достаточное условие устойчивости:

$$\frac{\beta^2 E \omega_r S_0 \Omega_0}{e J \omega_s^2 R_r} > \Lambda \equiv \max_{(\Omega > 0)} |\text{Re } Y^{(th)}(\Omega)|. \quad (18)$$

Его можно привести к виду, формально совпадающему с критерием устойчивости несгруппированного пучка (6), определив Ω_0 :

$$\Omega_0 = \frac{|\eta| \omega_s}{S_0} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2, \quad (19)$$

где $\pm \Delta p$ — максимальный импульсный разброс сгустка. Для квазилинейных синхротронных колебаний Ω_0 совпадает с частотой малых колебаний.

Отметим, что для существования порога необходима монотонная зависимость $\Omega_c(\bar{S})$. Нарушение этого условия наверняка приведет к возникновению мультипольной неустойчивости с характеристиками:

$$\Omega = m \Omega_c(\bar{S}), \quad m = \frac{\omega_r}{\omega_s} A(\bar{S}), \quad \Omega'_c(\bar{S}) = 0, \quad (20)$$

где $A(\bar{S})$ — амплитуда колебаний вдоль X . В случае монотонной зависимости максимум (18) достигается при частоте

$$\Omega \approx \xi \Omega_c(\bar{S}), \quad \xi = \frac{\omega_r}{\omega_s} A(\bar{S}), \quad (21)$$

где \bar{S} — значение переменной, при которой $|F'(\bar{S})|$ максимально. При этом число слагаемых ряда (15а) (т.е. число резонансных мультиполей) есть:

$$\Delta m \approx \xi \Omega_c(\bar{S}) \frac{\Omega_c^{(max)} - \Omega_c^{(min)}}{\Omega_c^{(max)} \Omega_c^{(min)}}. \quad (22)$$

Для приближения разделенных мультиполей формально требуется $\Delta m < 2$. Фактически область применимости шире, поскольку среди резонансных мультиполей может найтись доминирующий. Поэтому приближение сохраняет смысл даже при $\Omega_c^{(min)} = 0$, когда ряд по m не ограничен сверху, но вклад высоких мультиполей сильно подавлен множителями $|I_{mk}|^2$. Конечный результат зависит как от функции распределения $F(\bar{S})$, так и от формы потенциальной ямы синхротронных колебаний $U(x)$. Для реалистичных распределений при обычном режиме ускорения получается следующее условие мультипольности:

$$\xi \frac{\Delta \Omega_c}{\Omega_c(\bar{S})} \lesssim 2. \quad (23)$$

При этом возбуждается мультиполь с индексом m_0 , где

$$m_0 + 0,8 m_0^{1/5} \approx \xi. \quad (24)$$

Для сравнения рассмотрим потенциальную яму $U(x) \sim x^4$, в которой $\Omega_c \sim A \sim S^{1/5}$. Вместо (23)–(24) получим:

$$\xi \lesssim 1,2 \left[1 - \left(\frac{\bar{S}}{S_0} \right)^{1/5} \right]^{-1} + 0,62 \left[1 - \left(\frac{\bar{S}}{S_0} \right)^{1/5} \right]^{-1/5} \sim 7, \quad (25a)$$

$$1,2 m_0 + 0,62 m_0^{1/5} \approx \xi, \quad m_0 \leq \left[1 - \left(\frac{\bar{S}}{S_0} \right)^{1/5} \right]^{-1} \sim 5. \quad (25b)$$

В мультипольной зоне фактор Λ имеет вид:

$$\Lambda^{(mp)} = \Omega_0 S_0 F(\xi) \left| \frac{F'(\bar{S})}{\Omega'_c(\bar{S})} \right|, \quad F(\xi) = \max_{(m \geq 1)} |I_{mk}(\bar{S})|^2. \quad (26)$$

На рис. 2 показаны функции $F(\xi)$ для обычного режима ускорения (А) и для ямы $U(x) \sim x^4$ (В). Они имеют сходное поведение, но величины $\Lambda^{(mp)}$ могут сильно отличаться из-за разной зависимости $\Omega_c(\bar{S})$. Заметим, что при вычислении $\Lambda^{(mp)}$ для обычного режима допустимо приближение квазилинейных синхротронных колебаний, ибо такой характер они имеют на фазовой траектории $\bar{S} \sim S_0/2$ даже при $S_0 \rightarrow S_{sep}$. Однако вне мультипольной зоны (23) это приближение может привести к грубым ошибкам.

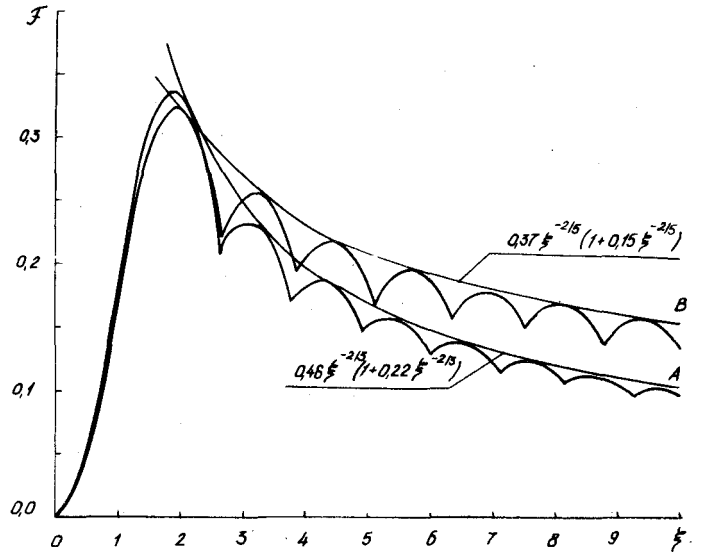


Рис. 2. Графики функций $F_{A,B}$

При сильном нарушении (23), (25а) одновременно возбуждается множество мультиполей с индексами $|m| \gg 1$. В этом случае также $\xi \gg 1$, что позволяет воспользоваться асимптотической оценкой интеграла (76). Подстановка результата в (14в) и замена суммы интегралом приводит дисперсионное уравнение (14а) к виду (5) с функцией

$$G(u) = \frac{1}{\pi \beta_s S_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(S(x, u)) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(u) du = 1. \quad (27)$$

Пунктирная линия на рис. 1 представляет собой асимптотическую пороговую кривую, построенную с помощью (5), (27). На большом протяжении она сливается с истинной.

Таким образом, эта задача формально сводится к исследованию устойчивости несгруппированного пучка. В нем возбуждение распространяется в виде независимых волн $\sim e^{ikx}$. Следуя сложившейся традиции, будем называть такую неустойчивость в сгруппированном пучке микроволновой. Для узкополосного импеданса ее порог определяется по формулам (6) или (18), где

$$\Lambda^{(mcw)} = \max \left| \frac{\Delta p^2}{2} G'(u) \right| \sim 1. \quad (28)$$

Физический смысл этих результатов поясняется рис. 3, где изображена часть фазовой плоскости X, ψ . На пороге неустойчивости систематическое взаимодействие частиц с полем возможно лишь на фазовых траекториях, удовлетворяющих условию резонанса (16). При выполнении (23) в пределах сгустка помещается одна такая траектория, что и приводит к мультипольным колебаниям. При сильном нарушении (23) имеется множество резонансных траекторий, на каждой из которых возбуждаются колебания своей мультипольности. Фактически взаимодействие частицы с полем происходит в те моменты, когда ее изображающая точка пересекает линию aa' , на которой скорость частицы $-\frac{\eta\omega_s\psi}{\rho_s\Omega}$ совпадает с фазовой скоростью электромагнитной волны $\frac{\omega_s}{k}$. При достаточно большом числе резонансных мультиполей на линии aa' возникает возмущение $\sim e^{ik\theta}$. При удалении от этой линии возмущение быстро размывается из-за различия угловых скоростей изображающих точек. Обратная связь, необходимая для возникновения неустойчивости, возникает не за счет синхротронных колебаний, а за счет передачи возмущения от сгустка к сгустку через поле резонатора.

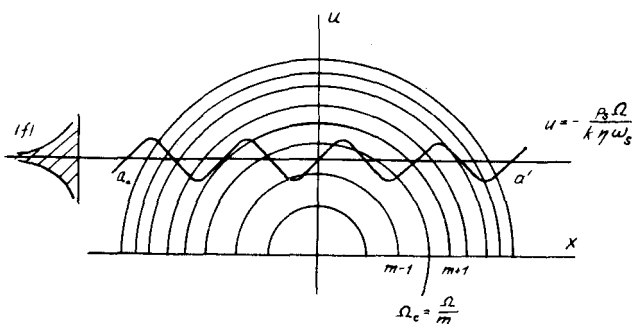


Рис. 3. К пояснению механизма возникновения микро-волновой неустойчивости

При слабом нарушении неравенств (23), (25а) возбуждается несколько мультиполей, и аналитическая оценка параметра Λ становится невозможной. Численные расчеты показали, что в этой зоне происходит плавный переход от $\Lambda^{(mp)}$ к $\Lambda^{(mcw)}$. Поэтому с практически достаточной точностью при $\frac{\omega_r}{\omega_s} A_0 > 1$:

$$\Lambda = \max(\Lambda^{(mp)}, \Lambda^{(mcw)}), \quad (29)$$

причем неравенство $\Lambda > \Lambda^{(mcw)}$ является строгим.

Рассмотрим 2 примера, взяв распределение (17). При обычном режиме ускорения условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{\beta^2 E \omega_r S_0^2 |\eta|}{e J \omega_s R_r} > \max \left\{ \frac{192 \mathcal{F}_A(\xi)}{q^2 (5 + 5 \operatorname{ctg}^2 \varphi_s)}, \frac{\omega_s S_0 |\eta| \Lambda^{(mcw)}}{\Omega_0} \approx 0,85 \frac{\omega_s}{\Omega_0} S_0 |\eta| \right\}, \quad (30)$$

где φ_s - синхронная фаза, график $\mathcal{F}_A(\xi)$ показан на рис. 2. "Мультипольная" часть этой формулы была известна и раньше [13].

Другой пример - яма $U(x) \sim x^4$, которую можно создать с помощью дополнительного ускоряющего поля кратности q_1 (q_1/q - целое). Этот способ предлагалось использовать для повышения порога [17]. Условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{\beta^2 E \omega_r S_0^2 |\eta|}{e J \omega_s R_r} > \left(\frac{A_0^2}{q_1} \right)^{2/3} \max \left\{ 15 \mathcal{F}_B(\xi), \xi = 1,16 \frac{\omega_r}{\omega_s} \left(\frac{A_0^2}{q_1} \right)^{1/3} \right\}, \quad (31)$$

$2,6 \Lambda^{(mcw)} \approx 2,4$

где $2A_0$ - азимутальная протяженность сгустка в исходном режиме. Кратность q_1 ограничивается требованием монотонности $\Omega_c(S)$: $q_1 \geq \frac{5}{A_0}$. Сравнение (30) и (31) показывает, что в мультипольной зоне порог можно повысить в $\sim \frac{10}{A_0^2 q_1^2}$ раз, а в микроволновой зоне он почти не изменится.

С помощью (30) можно проанализировать другие предлагаемые способы повышения порога. Уменьшение амплитуды ускоряющего поля [18] дает незначительный эффект. Перезахват сгустка на более высокую кратность q_1 (без выключения [19] или с выключением основного напряжения) позволяет повысить порог в $\sim \left(\frac{q_1}{q}\right)^2$ раз. Наличие на краю сгустка узла сепаратрисы в обоих случаях не существенно.

Вкратце рассмотрим последствия нарушения условия (12).

При этом могут возбудиться 2 гармоники тока $k_{4,2} \approx \pm \frac{\omega_r}{\omega_s}$.

В микроволновой зоне связь между ними отсутствует, и сохраняют силу все предыдущие результаты [15]. В приближении разделенных мультиполей дисперсионное уравнение приводится

к виду (14) с заменой $\frac{Z_k}{k} \rightarrow \frac{Z_k^{(ef)}}{k} = \frac{\omega_s}{\omega_r} [Z_{k_1}(\Omega) - Z_{k_2}(\Omega)]$.

Легко убедиться, что в эффективном импедансе частично подавлена реальная часть. Сильнее всего это проявляется при

$\eta = 0$ и $n = \frac{M}{2}$, в связи с чем неустойчивость оказывается

возможной лишь при условии [20, 21]:

$$\eta \operatorname{Re} Z_k'(0) > 0, \quad \text{т.е.} \quad \eta (\omega_r - k \omega_s) > 0. \quad (32)$$

6. Широкополосный импеданс: приближение разделенных мультиполей

Предпринимались многочисленные попытки выйти за рамки приближения узкополосного импеданса. В последние годы для этой цели активно разрабатывался метод радиальных мод, упоминавшийся в п. 4. Интегральное уравнение исследовалось для линейных синхротронных колебаний в приближении разделенных мультиполей. Численный анализ позволил установить вид функций $f_m(S)$ (см. (8)) для некоторых распределений и импедансов [22, 1, 2]. Однако попытки учета нелинейности синхротронных колебаний (без чего невозможно получить порог неустойчивости) привели к серьезным трудностям. Для их преодоления предложен "метод синтетического ядра", из которого следует дисперсионное уравнение [12, 13, 2/]:

$$1 = C_m \int_0^\infty \frac{\Psi_0'(r) r^{2|m|}}{\Omega - m \Omega_c(r)} dr, \quad (33a)$$

$$C_m = -i \frac{e J q \eta \omega_s^2}{2 \pi \beta^2 E \Omega_0} \frac{m}{(2^{|m|} |m|!)^2} \sum_{\ell} Z_{M+\ell} \left(\frac{M+\ell+n}{q} \right)^{2|m|-1}. \quad (33b)$$

Здесь $r = q A(S)$ - амплитуда колебаний фазы в в.ч. радианах, $\Psi_0(r)$ - равновесная функция распределения с нормировкой $\int_0^\infty \Psi_0(r) dr = 1$. Использовалось квазилинейное приближение:

$$x \approx \frac{r}{q} \cos \psi, \quad S \approx \frac{\Omega_0 r^2}{q^2 \omega_s |\eta|}. \quad (34)$$

Уравнение (33a) нетрудно получить из основной системы (4), установив заодно область его применимости. Для этого разложим подынтегральную функцию в (7б) в ряд по X , что с учетом (34) дает:

$$I_{mk} \approx \frac{1}{|m|!} \left(\frac{i k r}{2 q} \right)^{|m|}. \quad (35)$$

Подстановка в (7a) и (4) в приближении разделенных мультиполей приводит к системе с вырожденной матрицей, которая легко решается: $J_k = k^{|m|}$ при условии разрешимости (33). Отсюда ясна область применимости (33):

$$\left| \frac{k r}{2 q} \right| \ll 1, \quad \text{т.е.} \quad \ell_B \ll \beta \lambda_{\min}, \quad (36)$$

где λ_{\min} - минимальная длина волны в полосе пропускания импеданса, ℓ_B - длина сгустка. Поэтому уравнение (33) применимо лишь для дипольных колебаний и низкочастотного импеданса.

Во многих работах используется модельное распределение $F = \frac{1}{S_0}$ при $S < S_0$ (см., напр. 12,23). В приближении разделенных мультиполей это также приводит к системе с вырожденным ядром и дисперсионному уравнению:

$$1 = -i \frac{e J_0 \eta \omega_s^2}{2\pi \beta^2 E_0} m q \int_0^{\infty} \frac{\psi'_0(r) dr}{\Omega - m \Omega_c(r)} \sum_{\ell} \frac{Z_{m\ell+n}}{M\ell+n} |\Gamma_{m,M\ell+n}(r)|^2 \quad (37)$$

Формула записана так, что при подстановке (35) переходит в уравнение (33). Если же быть последовательным и положить $\psi'_0(r) = -\frac{2}{r_0^2} \delta(r - r_0)$, можно получить только оценку инкремента. Для расчета порога необходимо включить в схему затухание Ландау, например, формально распространив (37) на произвольные распределения. Такая модель обладает уже тем преимуществом, что в ней – в отличие от (33) – не возникает проблема сходимости ряда. Кроме того, уравнение (37) приводит к правильным результатам в случае узкополосного импеданса, п. 6. Из него следует условие устойчивости:

$$\left| \sum_{\ell} \frac{Z_{m\ell+n}}{M\ell+n} |\Gamma_{m,M\ell+n}(\bar{r})|^2 \right| \geq \frac{\beta^2 E S_0 \Delta \Omega_c}{4 e J \omega_s} \quad (38)$$

где $\bar{r} = q A(\bar{S})$ (см. (21)). Моды $n=0$ и $n = \frac{M}{2}$ имеют особенность: для них неустойчивость возможна только в до- или закритической зоне (в зависимости от поведения мнимой части импеданса). Это условие имеет такое же происхождение, как (32).

Разумеется, эти результаты могут претендовать лишь на роль грубой оценки. К тому же, остаются неясными условия применимости приближения разделенных мультиполей. Видимо, должно сохраняться силу ограничение (23). Однако при вычислении $\frac{Z}{k}$ по формуле (21) возникает проблема определения характерной частоты ω_r для конкретного широкополосного импеданса.

7. Широкополосный импеданс. Микроволновая неустойчивость

В данном разделе мы рассмотрим высокочастотный широкополосный импеданс, для которого нарушаются все сформулированные ранее ограничения. Такие импедансы встречаются очень часто. Необходимость объяснения возникающих эффектов привела к появлению так называемой микроволновой модели 24. В исходном варианте она сводилась к замене сгустка однородным пучком с такой же фазовой плотностью, как в центральном сечении сгустка. Это приводит к критерию устойчивости, подобному (6)

$$\left| \frac{Z_k}{k} \right| < \frac{\beta^2 E |\eta| (\frac{\Delta p_c}{p})^2}{e J_c \Lambda_c} \quad (39)$$

где величины с индексом c относятся к центральному сечению. Модель хорошо работает; так, с ее помощью удалось объяснить продольную неустойчивость пучка в CPS и ускорителе ИФВЭ 24,25. Однако в формальном отношении она до сих пор не обоснована, несмотря на неоднократные попытки (см., напр. 11). Это привело к изменению отношения к модели и даже смысла термина: в ряде работ микроволновая неустойчивость отождествляется с "быстрой" неустойчивостью 10,2. С этой точки зрения неравенство (39) не является пороговым соотношением, а гарантирует лишь отсутствие быстрой неустойчивости.

Вероятно, быстрая неустойчивость, действительно, имеет микроволновый характер, т.е. возмущение распространяется в виде невзаимодействующих волн $\sim e^{ik_0}$. Во всяком случае, это было доказано для некоторых частных случаев 10,15. Однако это не снимает вопроса об определении истинного порога неустойчивости.

Проанализируем в этой связи основы модели в ее первоначальной трактовке. В однородном пучке возмущение может циркулировать, передаваясь от частицы к частице до замыкания оборота и далее. За счет этого возникает обратная связь и "самодействие" частиц, что является необходимой предпосылкой неустойчивости. В сгруппированном пучке возмущение,

создаваемое "головой" сгустка, возбуждает его "хвост" и не передается соседнему сгустку из-за быстрого затухания поля. При высокой частоте возмущения обратная связь не может замыкаться и через синхротронные колебания из-за их нелинейности (см. пояснения к рис. 3).

Но это означает, что в рассматриваемых условиях обычная (регенеративная) неустойчивость сгруппированного пучка вообще невозможна, и возникает только статический эффект перестройки самосогласованного распределения. Такая интерпретация не является совершенно новой: микроволновую неустойчивость часто связывают с аномальным (турбулентным) удлинением и расширением сгустка 2. Однако мы хотим подчеркнуть, что ограничение на импульсный разброс типа (39) имеет, возможно, "статическое" происхождение и не может быть обосновано с помощью системы (4) или любой эквивалентной схемы, хотя и является достаточным условием устойчивости.

Подтверждение можно найти в работах 3,9, где исследуется поведение сгустка в гладкой камере ($Z_k \sim ik$). В 3 рассмотрено самосогласованное распределение; можно видеть, что в закритической зоне оно заведомо удовлетворяет условию (39) с $\Lambda = \pi^{-1}$. В 9 доказано, что стационарное самосогласованное распределение устойчиво, по крайней мере, при $F'(s) < 0$.

СВЧ-излучение пучка, которое наблюдается на многих ускорителях и обычно ассоциируется с микроволновой неустойчивостью, объясняется тем, что перестройка функции распределения требует конечного времени и происходит не вполне адиабатически. Поэтому интенсивность излучения особенно велика при условиях, когда имеется быстрое "естественное" изменение параметров, например, в районе критической энергии, или при дрейфе сгустков в постоянном магнитном поле при выключенном ускоряющем напряжении. Последний случай рассмотрен в работе 26. Показано, что имеются 2 условия неустойчивости: "динамическое" (6), где все параметры усреднены по обороту, как в (27), и "статическое". Последнее имеет вид (39) для широкополосного импеданса, но стремится к (6) при сужении полосы. Нарушение "динамического" условия должно приводить к обычной неустойчивости, однако этого не происходит, т.к. прежде нарушается "статическое" условие в результате чего возрастает импульсный разброс. Этот процесс настолько резко зависит от интенсивности и времени, что имеет почти пороговый характер и выглядит как неустойчивость. Более точно, в правой части (39) имеется множитель, который отличается от 1 на величину $\sim (\beta c t / \ell_g)^{2/3}$, где t – характерное время затухания поля.

Литература

1. J.L.Laclaire. Proc. 11 Int. Conf. on High Energy Accel. – CERN, 1980, p. 526.
2. B.Zotter. CERN SPS/81-18, -19, -20.
3. A.N.Lebedev, E.A.Zhilkov. Nucl. Instrum. and Methods, 1966, p. 238.
4. C.E.Nielsen, A.M.Sessler, K.R.Symon. Proc. Int. Conf. on High Energy Accel. – CERN, 1959, p. 239.
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Там же, с. 115 или АЭ, т. 7, 1959, с. 549.
6. А.Н.Лебедев. ЖТФ, т. 37, вып. 9, 1967, с. 1652.
7. A.G.Ruggiero, V.G.Vaccaro. CERN ISR-TH/68-33.
8. E.Keil, W.Schnell. CERN ISR-TH-RF/69-48.
9. A.N.Lebedev. Proc. 6 Int. Conf. on High Energy Accel. – CEAL-2000, 1967, p. 284; АЭ, т. 25, вып. 2, 1968, с. 100.
10. C.Pellegrini, J.Wang. Proc. 11 Int. Conf. on High Energy Accel. – CERN, 1980, p. 554.
11. F.J.Sacherer. IEEE Nucl. Sci., NS-24, 1977, p. 1393, also CERN/PS-BR/77-5, -6.
12. F.J.Sacherer. CERN/SI-BR/72-5.
13. F.J.Sacherer. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-20, 1973, p. 825.

14. П.Т.Пашков, А.В.Смирнов. АЭ, т. 50, вып. 6, 1981, с. 408.
15. В.И.Балбеков, С.В.Иванов. АЭ, т. 59, вып. 1, 1985, с. 42.
16. В.И.Балбеков, С.В.Иванов. АЭ, т. 60, вып. 1, 1986, с. 45.
17. P. Bramham et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-24, 1977, p. 1490.
18. D. Boussard, J. Gareyte. Proc. 8 Int. Conf. on High Energy Accel., CERN, 1971, p. 317.
19. Э.А.Мяз, П.Т.Пашков, А.В.Смирнов. АЭ, т. 52, вып. 4, 1982, с. 256.
20. K. Robinson. CEAL -1010, 1963.
21. А.И.Барышев, С.А.Хейфец. ЖТФ, т. 33, вып. 3, 1963, с. 320.
22. G. Besnier. Nucl. Instr. and Methods, 164, 1979, p. 235.
23. Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Препринт ИЯФ 74-94, Новосибирск, 1974.
24. D. Boussard. CERN LAB II/RF/Int/75-2.
25. Г.Г.Гуров. Препринт ИФВЭ 80-109, Серпухов, 1980.
26. В.И.Балбеков. Препринт ИФВЭ 86-73, Серпухов, 1986.

Discussion

А.В.Буров. Какое k нужно подставлять в критерии устойчивости $Z_k/k < \dots$?

В.И.Балбеков. Для индуктивного импеданса $|Z_k/k| = \text{const}$. Для резонансного следует брать $|Z_k/k| = R_r \omega_s / \omega_r$. Другие случаи не исследованы. Вряд ли общий критерий устойчивости будет столь простым, как написано выше. Однако, хотелось бы еще раз подчеркнуть, что этот критерий имеет, возможно, "статическое" происхождение.

А.А.Коломенский. Какие качественные особенности появятся при переходе к встречным пучкам (влияние мест встречи)?

В.И.Балбеков. Я думаю, что встречи не окажут существенного влияния на продольную устойчивость пучков. Но для коллайдеров продольные неустойчивости более опасны из-за жестких требований к фазовому объему сгустков.