

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

JINR-D2-7161

Д2 - 7161

Локальные,  
линейные и  
ренормируемые теории поля

Материалы III Международного совещания  
по нелокальным теориям поля  
23-30 апреля 1973 г. Алушта, СССР

Дубна 1973

## Состав Оргкомитета

БЛОХИЦЕВ Дмитрий Иванович	председатель
ЕФИМОВ Гарий Владимирович	заместитель председателя
НЕРВУШИН Виктор Николаевич	ученый секретарь
ВОЛКОВ Михаил Константинович	член Оргкомитета
ЕФРЕМОВ Анатолий Васильевич	- " -
ФИЛИППОВ Александр Тихонович	- " -
ЗАРУБИНА Нина Сергеевна	секретарь

С 23 по 28 апреля 1973 г. в Алуште проходило III Международное совещание по полокальной квантовой теории поля. Это совещание, подобно предыдущим (Дубна 1967 г. и Азур 1970 г.), затронуло весьма широкий круг самых актуальных вопросов современной физики. Несколько докладов, непосредственно касающихся проблемы полокальных и неполиномиальных теорий, были заслушаны и обсуждены многочисленные сообщения по вопросам, тесно связанным с основной тематикой совещания, таким как: функциональные методы в квантовой теории поля, теория слабых взаимодействий, сильные взаимодействия при высоких энергиях, масштабная инвариантность и т.д.

В работе совещания приняло участие 110 ученых из 18 стран мира. Было заслушано и обсуждено 69 докладов, 14 из которых имели обзорный характер. Ввиду большого количества материалов, представленных на совещание, Оргкомитет имеет возможность издать в Трудах совещания лишь обзорные доклады. Общий список всех остальных сообщений приводится в конце сборника.

Оргкомитет

## Содержание

Вступительное слово председателя Оргкомитета Д.И.Блохинцева.  
Opening Address of D.I.Blokhintsev.

Д.И.Блохинцев.	
Современное состояние квантовой теории поля (вводный доклад) . . . . .	7
D.I. Blokhintsev.	
Present Status of Quantum Field Theory (Introductory Talk).	
Г.В.Ефимов.	
Нелокальная квантовая теория поля . . . . .	23
G.V. Efimov.	
Nonlocal Quantum Field Theory.	
В.Г.Кадышевский.	
Гипотеза о фундаментальной длине в рамках квантовой теории поля . . . . .	47
V.G. Kadyshevsky.	
<i>A Hypothesis of the Fundamental Length in the Framework of Quantum Field Theory.</i>	
М.К.Волков.	
Приименение суперпропагаторного метода в квантовой теории поля . . . . .	84
M.K. Volkov.	
<i>Application of the Superpropagator Method in Quantum Field Theory.</i>	
Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко.	
Функциональные методы и эйкональное приближение . . . . .	109
B.M. Barbashov, V.V. Nesterenko.	
<i>Functional Methods and Eikonal Approximation.</i>	
А.Т.Филиппов.	
Методы частичного суммирования диаграмм в ненормализуемых теориях поля и их приложения к слабым взаимодействиям лептонов и сильным взаимодействиям адронов . . . . .	133
A.T. Filippov.	
<i>Methods of Partial Summation of Diagrams in Nonrenormalizable Field Theories and their Application to Weak Lepton and Strong Hadron Interactions.</i>	
С.М.Биленкий.	
Некоторые вопросы физики слабых взаимодействий . . . . .	154
S.M. Bilenky.	
<i>Some Problems Related to Weak Interaction Theory.</i>	
Б.А.Арбузов.	
Ренормируемые и ненормируемые схемы слабых взаимодействий . . . . .	175
B.A. Arbuzov.	
<i>Renormalizable and Nonrenormalizable Weak Interaction Models.</i>	

Л.Д.Соловьев.	183
Сильные взаимодействия при высоких энергиях . . . . .	183
L.D.Soloviev.	
Strong Interactions at High Energies.	
И.Т.Тодоров.	211
Масштабная и конформная инвариантность в квантовой теории поля. . . . .	211
I.T.Todorov.	
Scale and Conformal Invariance in Quantum Field Theory.	
Н.А.Черников.	218
Общий принцип относительности в квантовой теории поля . . . . .	218
N.A.Chernikov.	
General Principle of Relativity in Quantum Field Theory.	
Г.А.Вилковыский, Е.С.Фрадкин.	
Общие соотношения квантовой теории гравитационного поля и перенормируемость теории на пороге . . . . .	245
G.A.Vilkovysky, E.S.Fradkin.	
General Relations of the Quantum Gravitational Field Theory and Renormalizability of the Theory at Threshold.	
Список участников совещания . . . . .	269
List of the Participants.	
Список докладов, не вошедших в сборник . . . . .	275
List of the Reports not Included in the Proceedings.	

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 мая 1973 года,

Многоуважаемые коллеги!

Позвольте мне от имени Оргкомитета нашего Международного совещания приветствовать Вас.

Наше совещание посвящено глубоким проблемам современной квантовой теории поля и нам, его инициаторам, отрадно видеть, что число рыцарей от науки, посвятивших себя служению этой области современной физики, заметно позросло. Об этом свидетельствует интерес к нашему совещанию, существенно возросшее число его участников.

Вместе с тем, естественно, возникли трудности, относящиеся к организационной стороне. Главная из них – это большое количество научных сообщений, которые несложно уложить в наше расписание. Опыт показывает, что самым неудачным было бы не предусмотреть время для семинаров и частных обсуждений. Чтобы иметь необходимое для этой цели время, продолжительность индивидуальных выступлений пришлось сократить. Мы сделали это после обстоятельного рассмотрения представленных материалов и перенесли центр тяжести работы на обзорные доклады.

Я не буду касаться особенностей нашего совещания в отношении научной программы, отложив это до вводного доклада. Многие участвуют в таком совещании уже не в первый раз и знают, что его дух характеризуется готовностью благожелательно обсуждать различные взгляды и течения в квантовой теории поля.

Позвольте закончить мое краткое выступление выражением благодарности руководителям города Алушты и дирекции Дома отдыха "Дубна" за гостеприимство и пожелать всем вам – участникам совещания – плодотворной работы.

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д. БЛОХИНЦЕВ

Объединенный институт ядерных исследований

### I. Введение

Наш семинар носит название "Семинар по нелокальной теории поля". Однако круг рассматриваемых на нем вопросов значительно шире. В сущности, дело идёт об обозрении состояния современной теории поля в целом.

Традиционное название нашей конференции призвано подчеркнуть нашу готовность серьёзно обсудить и те направления, которые выходят за рамки канонических.

Мой доклад не имеет целью изложить содержание конференции — очевидно из программы. Этот доклад — скорее очерк состояния современной теории поля и при том не претендующий на освещение различных точек зрения.

Я думаю не будет ошибкой сказать, что за истекшие три года интерес к теории поля, как к основе понимания мира элементарных частиц, значительно возрос. И уже совсем далёким кажется тот период, когда возникали предложения вообще погоронить теорию поля, заменив её концепцией аналитических свойств амплитуд. На самом деле оказалось, что сама эта концепция не имеет других основ, кроме тех, которые предоставляются нам теорией поля, в частности, принципом локальной микропричинности:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0 \quad (1)$$

(здесь  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  – какие либо два квантовых поля, взятые в двух пространственно-временных точках  $x$  и  $y$ .  $(x-y)^2 < 0$  означает, что интервал  $x-y$  – пространственно-подобный).

Далее, оказалось, что почти все результаты феноменологического подхода могут быть воспроизведены или даже уточнены с помощью теории поля.

## II. Обзор некоторых результатов теории поля

Алгебра токов. В последние годы внимание теоретиков привлекала алгебра токов, с помощью которой был получен ряд полезных соотношений. В качестве примера можно напомнить правило сумм для нейтринных реакций при высоких энергиях, основанное на локальных коммутационных соотношениях токов:

$$\int_0^\infty d\omega [W^{vp}(\omega, q^1) - W^{\bar{v}p}(\omega, q^2)] \simeq 2, \quad (2)$$

где  $W^{vp}(\omega, q^1)$  – структурная функция, описывающая неупругое лептон-нуклонное взаимодействие:

$\nu + N = \ell + X$  ;  $\omega = E_\nu - E_\ell$  - энергия, переданная лептону  $\ell$ ,  $q^2$  - квадрат переданного импульса.

Понятие плотности тока  $J(x)$  есть, конечно, понятие из теории, в некотором смысле дополнительное к понятию  $\varphi(x)$ . В самом деле:

$$J(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} S^{-1}, \quad (3)$$

где  $S$  - матрица рассеяния.

Киральная симметрия. Значительное место в теоретических расчётах заняли исследования по нелинейному представлению киральной группы. Эти исследования привели к изучению существенно нелинейных лагранжианов типа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(\vec{\pi}) \frac{\partial \pi_a}{\partial x_\mu} \frac{\partial \pi_b}{\partial x_\mu}, \quad (4)$$

где  $\pi_a$  есть вектор мезонного поля, а  $g_{ab}(\vec{\pi})$  - метрический тензор в этом же изотопическом пространстве. Этот тензор имеет вид:

$$g_{ab}(\vec{\pi}) = \delta_{ab} \alpha(\vec{\pi}^2) + \pi_a \pi_b \beta(\vec{\pi}^2), \quad (5)$$

причём вид функций  $\alpha$  и  $\beta$  зависит от избранной параметризации.

До последнего времени этот лагранжиан рассматривался как чисто классический лагранжиан, из которого, в духе принципа соответствия, можно было получить соотношения между различными процессами множественного рождения пионов. Сейчас выяснилось, что амплитуды вероятностей, вытекающие из этого лагранжиана, могут быть вычислены методом суперпропагатора, развитого первоначально у нас, в Дубне.

Суперпропагатор - суперпропагатор  $\Delta(x-y)$  имеет вид:

$$\Delta(x-y) = \sum_n C_n \langle \varphi''(x) \varphi''(y) \rangle = \\ = \sum_n C'_n [\Delta_c(x-y)]^n, \quad (6)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает среднее по вакууму от  $T$  -произведения;

$\Delta_c(x)$  - причинная функция свободных полей. Вычисление суперпропагатора основано на замене коэффициентов  $C_n$  функцией комплексного переменного  $C(z)$ , имеющей полюса в точках  $z = n$  и на представлении суммы (6) в форме интеграла Боммерхельда-Ватсона.

Расчёты, основанные на этом методе, дали обнадёживающие результаты для  $\pi\pi$  - взаимодействия.

Были сделаны также увлекательные приложения этого метода к учёту явлений гравитации в квантовой электродинамике. Учитывая множественное рождение гравитонов, удалось получить конечное выражение для полевой массы, именно:

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{3d}{4\pi} \ln \left( \frac{4\pi}{\delta e m} \right), \quad (7)$$

где  $d = e^2/\hbar c$ ,  $\delta e$  - гравитационная постоянная.

Насколько можно судить, другие методы пока ещё не позволяют сколько-нибудь последовательно учесть квантовые гравитационные явления и наиболее интересные работы по изучению роли гравитации в мире элементарных частиц ограничиваются изучением классических моделей.

Поля Инга-Мильтса - другое направление в теории поля связано с развитием замечательной идеи о локально-калибровочного инвариант-

ных полях.

Разумеются поля, преобразующиеся по формуле:

$$\Psi'(x) = \exp\{ig\tau_a \cdot \alpha^a(x)\} \Psi(x), \quad (8)$$

$$B_M^a(x) = B_M^a(x) + g \epsilon^{abc} B_M^b \alpha^c(x) + \partial_M \alpha^a(x). \quad (8')$$

Векторные поля  $B_M^a$  называются компенсирующими. Их особая, может быть, преобладающая роль во взаимодействии получила название векторной доминантности.

В последнее время эта концепция породила серьёзные надежды объединить в одной схеме электромагнитные и слабые взаимодействия.

Расщепление вакуума. При этом оказывается важным спонтанное расщепление вакуума, которое в простейшем виде содержится в любой теории поля с нелинейным лагранжианом вида:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi \square \varphi) - U(\varphi), \quad (9)$$

где "потенциальная" энергия  $U(\varphi)$  имеет несколько минимумов, при  $\varphi = \varphi_i$  ( $i = 1, 2 \dots$ ).

Эта привлекательная схема, очень изящная в классическом варианте, становится, однако, весьма сложной, когда дело доходит до квантования полей.

При всяком исходе этих исследований они останутся отличной иллюстрацией возможностей, скрытых в теории поля.

Эйкональное приближение. Впервые развитое в Дубне ещё много лет тому назад эйкональное (геометрико-оптическое) приближение оказалось весьма плодотворным при изучении рассеяния сильновзаимодействующих частиц.

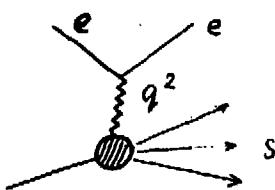
В последние годы были предприняты попытки обосновать этот метод, исходя из теории поля.

Особенно успешным оказалось применение аппарата функционального интегрирования. С помощью этого аппарата удалось получить асимптотические решения ряда оптических моделей, которые воссоздают оптическую картину рассеяния частиц. Именно, при определенных физических ясных приближениях оказалось возможным получить эйкональное приближение для амплитуды рассеяния:

$$q(s, q) = \frac{s}{4\pi c} \int d\theta e^{i\theta b} [e^{iX(\theta, s)} - 1], \quad (10)$$

где  $\theta$  - прицельный параметр,  $q$  - переданный импульс,  $X(\theta, s)$  эйконал, зависящий от характера взаимодействия частиц. Результат этих вычислений приводит к Гауссову потенциалу с логарифмически растущим радиусом действия.

Масштабная инвариантность является одним из самых интересных наблюдений последних лет. Два факта лежат в её основе открытия этой закономерности. Во-первых, - автомодельное поведение глубоко-неупругого  $e$ - $p$ -рассеяния, амплитуда которого при больших



$$q^2 \text{ и } s \text{ зависят лишь от их отношения так, что}$$

$$\sigma \sim \frac{1}{s} f(s/q^2). \quad (II)$$

Далее, оказалось, что полное сечение и сечение ионизационных процессов хорошо согласуются с "продольной" автомодельностью:

$$\frac{d\sigma_{inel}}{d\vec{q}} = \frac{1}{q} \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{f(\frac{q}{s}, q_\perp)}{E} \quad \text{в области фрагментации} \\ \times f(q_\perp) \quad \text{в области ионизации} \end{array} \right. \quad (II)$$

На основе теории поля было показано, что автомодельное поведение глубоконеупругих процессов не противоречит основам локальной теории поля. Этот важный результат был получен на основании изучения аналитических свойств амплитуды комптон-эффекта при больших  $q$ , что соответствует в коммутаторе токов области вблизи светового конуса. Масштабную инвариантность наверняка можно ожидать, когда все скалярные произведения внешних импульсов больше всех адронных масс:

$$P_i P_j \gg m^2 \quad i = j \quad (13)$$

Это условие, на языке пространства-времени означало бы малость всех расстояний между парами взаимодействующих частиц. Однако это не физическая область. С помощью разработанных у нас методов суммирования диаграмм Фейнмана удалось изучить поведение амплитуд на массовой поверхности и вместе с тем получить довольно полную картину высокозанергетических процессов.

Важным следствием масштабной инвариантности является ограничение на возможный выбор лагранжианов взаимодействия. В частности, для системы барионов и псевдоскалярных мезонов требования масштабной инвариантности приводят к классическому варианту:

$$\mathcal{L}_{int} = g \bar{\psi} \gamma_s \psi \varphi + h \varphi^4 \quad (14)$$

при условии конечной ренормировки.

Нелокальная теория поля. За обозреваемый период мы научились понимать, насколько трудна задача построения матрицы рассеяния, основанной на нелокальном поле  $\Phi(x)$ , т.е. поле, для которого нару-

шено условие (I). В этой связи представляется значительным успехом недавно данное доказательство возможности построения нелокальной матрицы  $S_\alpha^*$ , удовлетворяющей требованию унитарности:

$$S_\alpha^{*+} S_\alpha^* = 1 \quad (I5)$$

и макроскопической причинности

$$\frac{\delta}{\delta Y(y)} \left[ \frac{\delta S_\alpha}{\delta Y(x)} S_\alpha^{-1} \right] = \mathcal{K}(x-y), \quad (I6)$$

причём оператор  $\mathcal{K}(x-y)$  исчезает для  $(x-y)^2 > 0$  применительно к определённому классу пробных функций. Строгое определение класса пробных функций, допустимых в нелокальной теории, оказалось крайне важной стороной дела.

Этот успех открывает возможности для вычисления матрицы рассечения в случае неперенормируемых взаимодействий.

Искривлённое импульсное пространство – к этому же кругу исследований следует отнести развитие аппарата теории поля в кривом пространстве относительных импульсов. Закон сложения относительных импульсов изменён

$$q_1 + q_2 \rightarrow q_1 \oplus q_2 \quad (I7)$$

в соответствии с предположением о существовании постоянной кривизны  $\frac{\hbar^2}{\alpha^2}$  у пространства  $\mathcal{R}_4(q)$ . Было бы очень интересно более пристально изучить причинность в этой любопытной теоретической схеме. Эта кривизна определяет существование верхнего предела масс элементарных частиц – своеобразного "максимона", с  $M = \frac{\hbar}{\alpha}$ . В самое последнее время был достигнут существенный успех в аксиоматической формулировке этой любопытной теоретической схемы.

Квантование в Римановом пространстве – как бы дополнительным к этому исследованию является квантование поля в Римановом прост-

ранстве  $R_s(x)$  постоянной кривизны (в пространстве Де Ситтера).

Насколько мне известно, это первый пример квантования в пространстве с метрикой, отличной от метрики Минковского, особенно любопытный в том отношении, что конформная инвариантность лагранжиана (при  $m \rightarrow 0$ ) оказывается необходимой для корпускулярной интерпретации векторов состояния.

Квантование существенно-нелинейного поля; в этой же связи можно напомнить о квантовании существенно-нелинейного поля, приближенно разлагаемого на классическое (сильное) поле  $\Psi_{kl}(x)$  и кватовое (слабое) поле  $\hat{\Psi}(x)$ :

$$\Psi = \Psi_{kl}(x) + \hat{\Psi}(x). \quad (18)$$

В этом случае задача сводится к взятию интеграла Фейнмана с квадратичной формой с переменными коэффициентами, функциями  $\Psi_{kl}(x)$ , и, следовательно, является также примером квантования в кривом Римановом пространстве.

Кварки – я не останавливалась на теории夸克ов поскольку её не удалось сформулировать в виде последовательной теории поля. Основные результаты теории夸克ов пока получаются удачнее из специальных моделей, например, из партонной модели, или при помощи методов теории подобия и анализа размерностей.

В случае иных взаимодействий достаточно применения обычного анализа размерностей, в то время как при изучении сильных иных взаимодействий процессов следует обратиться к обобщенному анализу размерностей с двумя независимыми шкалами длины – в предельном и в поперечном направлении.

### III. Критические аспекты

Принимая квантовую теорию поля как основу для понимания микромира, мы должны ясно отдавать себе отчёт в том, что идеологически мы возвращаемся к концепциям, возникающим ещё в 30-х годах, и на новом уровне встречаем очень старые проблемы.

Неполнота  $S'$ -матричного описания. Основатели метода перенормировки ясно представляли себе его как чисто формальный приём обхода слишком малых расстояний  $\alpha$  или, как мы теперь более склонны говорить, - область больших передач импульса  $q \simeq \frac{h}{\alpha}$ .

Неполнота  $S'$ -матричного описания не в том, что он применим только к некоторому классу взаимодействий, а в том, что он в принципе не позволяет дать описание течения событий во времени.

В частности, известное поведение  $\chi^0$ -мезонов требует для своего описания задания начального состояния в момент времени  $t_1 = 0$  (а не  $t_1 = -\infty$ !) и дальнейшего описания для всех моментов времени  $t_2 > t_1$  (а не только для  $t_2 = +\infty$ ). Вообще, необходима точность временного описания  $\Delta t \ll \frac{h}{\Gamma}$ , где  $\Gamma$  - константа распада нестабильной частицы.

Однако для оператора  $U(t_2 t_1)$ , преобразующего состояние, данное в момент  $t_1$ , в состояние в момент  $t_2$ , не найдено способов устранения расходимостей, и эта старая проблема ни в коем случае не может считаться ни решенной, ни отклоненной. Разумеется, что сам оператор  $U(t_2 t_1)$  может оказаться не вполне строго определённым понятием.

В нелокальной теории точные моменты времени  $t_2$ ,  $t_1$  могут оказаться лишь приближённо определёнными.

Итак, первый и фундаментальный недостаток современного описания явлений в мире элементарных частиц - это неполюта  $S^1$ -матричного подхода. Второй недостаток, это:

Обилие полей. В настоящее время мы принуждены каждому роду частиц стабильных и нестабильных приписывать своё собственное поле. Между тем ясно, что целые последовательности "частиц" являются ни чем иным, как возбуждёнными состояниями некоторых исходных частиц. Во всяком случае, видимо, нет сомнений в такой интерпретации для частиц, лежащих на одной траектории Редже:

$$j = \alpha (m^2). \quad (19)$$

$j$  - спин частицы,  $m$  - её масса. С точки зрения теории Редже поведение сечения при обмене элементарной частицей и частицей сложной различно. В первом случае не должно наблюдаться сужения ли - фракционного конуса,, и сечение должно падать медленнее, чем  $S^3$ .

В этой связи несколько неожиданный результат получен в Серпухове при изучении рассеяния  $\pi^+ p$  - назад. Полученная зависимость сечения от энергии  $S$  (24 и 40 Гэв) противоречит предположению, что протон лежит на траектории Редже.

Такого рода исследования несомненно помогут расклассифицировать частицы и разобраться в их иерархии.

Сделанная в своё время Гейзенбергом попытка рассмотреть всё многообразие частиц на основе единого поля (Wirkfeld) не привела к результатам. Однако эта неудача несколько не снимает вопроса о многообразии переменных, коими мы должны пользоваться для описания структуры и динамики элементарных частиц.

Наиболее характерным явлением в мире элементарных частиц является каскад. всякая частица  $A$  или их совокупность  $B$ , заданная при  $t_1 = 0$ , обращается в каскад  $t_2 \rightarrow \infty$  асимптотически, при  $t_2 \rightarrow \infty$ , полностью состоящий из стабильных частиц. Стабильные частицы описываются пятью полями:  $\psi_n, \psi_e, \psi_{\nu_e}, \psi_{\nu_{\mu}}, \psi_{\nu_{\tau}}$ . В силу обратимости мы можем вернуть этот каскад в исходное состояние  $A$  (или  $B$ ). Отсюда следует, что переменные, с помощью которых описывается совокупность свободных, стабильных частиц, равнощные с переменными, с помощью которых следует описывать любое состояние частиц.

Поэтому для описания любых состояний частиц должно быть достаточно пяти полей, которые, разумеется, не обязаны совпадать с полями стабильных частиц.

Любопытно, что признак, именуемый странныстю, не принадлежит стабильным частицам. Поэтому он должен рассматриваться как характеристика некоторой внутренней симметрии волнового функционала

$$\Omega = \Omega \{ \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_5 \}, \quad (20)$$

описывающего бароны, мезоны или лептоны в терминах примитивных полей  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_5$ .

Выбор этих полей остаётся важнейшей проблемой современной теории частиц.

#### IV. О границах локальной теории

Каков бы ни был выбор фундаментальных полей, предположение о точной локализации полей (или токов) приводит к тому, что волно-

вые функционалы представляются асимптотическими рядами, неопределёнными однозначно.

Это заставляет поставить вопрос о границах локальной теории.

Точечное событие  $P(x)$ . В основе локальной теории лежит предположение о возможности бесконечно точной локализации точечных событий в пространстве-времени  $\mathcal{D}_r(x)$ .

Анализ этой стороны дела показывает, что локальная теория неясно допускает существование элементарных частиц как угодно большой массы  $M (M \rightarrow \infty)$  в качестве представителей точечных событий. При этом допускаемая неточность в определении координат

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{Mc} \rightarrow 0 \quad (21)$$

и локальная теория становится самосогласованной.

Однако неизвестно, существуют ли в принципе частицы с массой  $M \rightarrow \infty$ ?

При неограниченном росте массы растут и гравитационные эффекты, и в области, определённой равенствами комptonовской длины волны частиц и её гравитационного радиуса:

$$\frac{\hbar}{Mc} = \frac{24M}{c^3} \quad (22)$$

(здесь  $K = 6,67 \cdot 10^{-10} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}^2}$  есть постоянная Ньютона), и приходим к максимально тяжёлой частице — гравитационному максимуму  $M = M_g \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ .

Вопрос о роли гравитации в мире элементарных частиц является весьма дискуссионным.

Однако бесспорно то, что, если гравитация играет там роль, то роль может быть ощутимой лишь в области масштабов

$$\Lambda_g = \frac{\hbar}{M_g c} = -0,23 \cdot 10^{-32} \text{ см}$$

или, соответственно, для передачи импульса

$$q \sim M_g c = 8,7 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ/с} .$$

Естественно возникает вопрос, не может ли существовать более ранняя граница для массы элементарных частиц?

Вопрос, собственно, сводится к вопросу об асимптотическом поведении отношения

$$\gamma = \Gamma/M, \quad (23)$$

где  $\Gamma$  — ширина распада. Ясно, что, если  $\Gamma \approx M$ , то частица не существует как определённый пространственно-временной объект.

Если с ростом энергии слабое взаимодействие будет стремиться к своему унитарному пределу, то не исключено, что отношение  $\gamma$  приблизится к 1.

В этом случае мы имели бы дело со слабым максимоном:  $M = M_F$ .

При этом граница локальной теории определялась бы длиной Ферми:

$$\Lambda_F = \frac{\hbar}{M_F c} = 0,6 \cdot 10^{-16} \text{ см},$$

т.е. гораздо раньше, нежели это диктуется гравитацией. Математическая формулировка теории, в которой не существует понятия точно определённой координаты точечного события, представляет собой увлекательную проблему, относящуюся к теории стохастических пространств.

В этих пространствах арифметизация событий является приближённой, так как координаты события  $\mathcal{P}(\hat{x})$  суть стохастические величины:

$$\hat{x}_m = x_m + \hat{\xi}_m , \quad (24)$$

причём  $\langle \hat{\xi}_m \rangle = 0$  ,  $\langle \hat{\xi}_m^2 \rangle \neq 0$  .

## У. Заключение

Трудности, связанные с применением концепции локального поля, имеют, конечно, глубокие основания. Само существование этих трудностей не вызывает сомнений.

С другой стороны, нельзя упускать из виду, что экспериментальные факты нигде не обнаруживают противоречий с основным условием локальной теории (I). В частности, не обнаруживается и какого-либо масштаба длины " $\alpha$ ", который указывал бы на отклонения от локальности. Более того, поведение глубоконеупругих процессов подчёркивает автомодельность явлений при больших передачах импульса.

Единственным явлением, которое может говорить в пользу нелокальности, остаётся рост сечения слабых взаимодействий с ростом энергии  $E$  , как это следует из изучения неупругих (процессов типа

$$\nu + N \rightarrow \ell + X ,$$

где  $\nu$  - нейтрино,  $\ell$  - лептон,  $N$  - нуклон,  $X$  - любые частицы, удовлетворяющие сохранению барионного числа. Теоретически полное сечение для этого процесса содержит длину  $\Lambda_f$  и имеет

<sup>x</sup> В частности, если гравитационное поле квантуется, то риманово пространство  $\mathcal{R}_g(x)$  неизбежно становится стохастическим.

ВИД:

$$\sigma_{tct} = \alpha A_F^4 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \left( \frac{S}{m^2} \right), \quad (25)$$

где  $\alpha$  - численный коэффициент  $A_F = 0,23 \cdot 10^{-32}$ ,  $m$  - масса нуклона,  $S$  - инвариантная энергия.

По недавним измерениям, в полном согласии с (25), получено:

$$\sigma_{tct} = (0,7 \pm 0,14) E_\nu \cdot 10^{-38} \text{ см}^2$$

для  $E_\nu$  порядка нескольких Гэв. Не исключено, что сечение этих процессов может сравняться с сечением процессов электромагнитных, как это было предсказано в Дубне ещё много лет тому назад.

Однако каковы бы ни были экспериментальные факты, несовершенство математического аппарата локальной теории настолько очевидно, что не только работы по усовершенствованию этого аппарата кажутся более чем обоснованными, но и поисковые работы, касающиеся самых основ локальной теории, заслуживают всесторонней поддержки.

# НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Г.В. Ефимов

Объединённый институт ядерных исследований

За время, прошедшее со II Международной конференции в Азау в 1970 году, нелокальная квантовая теория поля получила своё дальнейшее развитие. Настоящий обзор основан на работах, сделанных в ЛТФ ОИЯИ и ИТФ АН УССР, где наиболее интенсивно разрабатывались проблемы нелокальной теории. Усилия были предприняты в двух направлениях: во-первых, дальнейшее исследование математической структуры и самосогласованности теории, во-вторых, изучение экспериментальных следствий в нелокальной теории электромагнитных и слабых взаимодействий.

В данном обзоре мне хотелось бы описать общую схему построения нелокальной квантовой теории поля. Задача состоит в построении ряда теории возмущений для  $S$ -матрицы

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n S_n \quad (I)$$

для теории, задаваемой лагранжианом некоторого общего вида

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + g \mathcal{L}_r(x).$$

В рамках обсуждаемого варианта нелокальной теории поля возможно построить ряд (I) для следующих лагранжианов взаимодействия:

I. Однокомпонентное скалярное поле  $\varphi(x)$

a)  $g \mathcal{L}_I(x) = g \varphi^n(x) \quad n = 3, 4, 5, \dots$

б)  $g \mathcal{L}_s(x) = g U(\varphi(x))$ , где  $U(t)$  – некоторая функция, аналитическая в точке  $t=0$ . Например

$$g e^{-f\varphi^2}, \quad g \frac{\varphi^3}{(1+f\varphi^2)^a}, \quad g \frac{\varphi^5}{1-f\varphi^4} \quad \text{и т.д.}$$

II. Электродинамика частиц со спином  $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  и т.д.

а) Квантовая электродинамика  $S = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}_x(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x).$$

б) Электродинамика частиц со спином  $S = 0, 1$

$$S=0 \quad \mathcal{L}_x(x) = i e (\partial_\mu \psi \cdot \psi^\dagger - \psi^\dagger \partial_\mu \psi) A_\mu + e^2 \psi \psi^\dagger A_\mu A_\mu$$

$$S=1 \quad \mathcal{L}_x(x) = i e (G_{\mu\nu} W_\nu^+ - G_{\mu\nu}^+ W_\nu) A_\mu + e^2 (W_\mu W_\nu^+ - \delta_{\mu\nu} W_\lambda W_\lambda^+) A_\mu A_\nu.$$

в) В подходе Деффина-Кеммера лагранжиан взаимодействия частицы спина  $S$  с электромагнитным полем выглядит проще

$$\mathcal{L}_x(x) = e \bar{\psi}_S(x) \alpha_\mu \psi_S(x) A_\mu(x).$$

Здесь  $\psi_S(x)$  - волновая функция частицы спина  $S$ , удовлетворяющая уравнению

$$(i \alpha_\mu \partial_\mu - m) \psi_S(x) = 0,$$

$\alpha_\mu$  - некоторые матрицы, удовлетворяющие соответствующим перестановочным соотношениям (см. <sup>2</sup>).

### Ш. Слабые взаимодействия

а) четырёхфермионное взаимодействие

$$\mathcal{L}_x(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\ell}(x) Q_\alpha \nu(x)) (\bar{\nu}(x) Q_\alpha \ell(x)),$$

где  $Q_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)$ ,  $\ell$  - лептон,  $\nu$  - нейтрино.

б) взаимодействие с  $W$  - бозоном

$$\mathcal{L}_x(x) = f [(\bar{\ell}(x) Q_\alpha \nu(x)) W_\alpha(x) + (\bar{\nu}(x) Q_\alpha \ell(x)) W_\alpha^+(x)].$$

#### IV. Мезодинамика

$$\mathcal{L}_x(x) = g (\bar{N}(x) \gamma_5 \vec{\tau} \lambda'(x)) \vec{\pi}(x) + k (\vec{\pi}(x))^2,$$

$N$  - нуклон,  $\pi$  - мезон.

$S$  -матрица, описывающая перечисленные выше взаимодействия, должна удовлетворять в каждом порядке теории возмущений всем общим аксиомам квантовой теории поля (см. 13). Эти аксиомы можно сгруппировать следующим образом.

##### I. Аксиомы пространства физических состояний.

I. Пространство физических состояний - гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ .

2. Единственность вакуума  $|0\rangle$ .
3. Релятивистская ковариантность.
4. Спектральность и полнота.

##### II. Аксиомы $S$ -матрицы

I. Унитарность  $S^* S = S S^* = 1$ .

2. Стабильность вакуума и одночастичных состояний  $S|0\rangle = |0\rangle$  и  $S|1\rangle = |1\rangle$ .

3. Интегрируемость.
4. Причинность.

5. Градиентная инвариантность и инвариантность относительно других дополнительных групп симметрий.

Нелокальную квантовую теорию поля, о которой пойдёт речь ниже, было бы правильнее называть квантовой теорией полей, взаимодействующих нелокально. Какова же общая схема построения теории? Для определённости рассмотрим однокомпонентное скалярное поле  $\varphi(x)$ . Прежде всего задаётся плотность лагранжиана классического поля  $\varphi(x)$ :

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_c(x) + g \mathcal{L}_r(x), \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_c(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x).$$

Предполагается, что лагранжиан взаимодействия не является локальной функцией от поля  $\varphi(x)$ , как, например,  $g \mathcal{L}_r(x) = g \varphi''(x)$  и т.д., а зависит от "размазанного" поля

$$\phi(x) = \int dy K(x-y) \varphi(y) = K(\square) \varphi(x). \quad (3)$$

Здесь  $K(x-y) = K(\square) \delta^{(4)}(x-y)$  – некоторый формфактор, определяющий область, где происходит нелокальное взаимодействие. Например, имеем соответствие:

Локальная теория

Нелокальная теория

$$g \mathcal{L}_c(x) = g \varphi''(x) \longrightarrow g \mathcal{L}_r(x) = g \phi''(x)$$

$$g \mathcal{L}_c(x) = g \varphi^3(x) e^{-f \varphi^2(x)} \longrightarrow g \mathcal{L}_r(x) = g \phi^3(x) e^{-f \phi^2(x)}$$

Следует особо подчеркнуть, что успех построения нелокальной самосогласованной теории почти полностью определяется выбором ядра, которому принадлежат формфакторы  $K(x-y)$ , описывающие нелокальный характер взаимодействия (см. /4/). Мы будем считать, что функция  $V(-k^2) = [K(k^2)]^2$ , где  $K(k^2)$  – фурье-образ формфактора  $K(x-y)$ , удовлетворяет следующим условиям:

1.  $V(z)$  является целой аналитической функцией порядка роста

$$\frac{1}{p} \leq g < \infty,$$

$$2. [V(z)]^* = V(z^*),$$

$$3. V'(x) \geq 0 \quad \text{для вещественных } x,$$

$$4. V(-m^2) = 1$$

$$5. V(u) = O(\exp\{|u|^s\}) \quad \text{при } u \rightarrow -\infty$$

$$6. \int d\mu u^N V(u) < \infty$$

для всех  $N < N_0$ , где  $N_0$  определяется рассматриваемым ла-  
ранжианом взаимодействия. Иными словами, формфактор  $[K(k^2)]^2$   
убывает достаточно быстро в евклидовой области, т.е. при  
 $k^2 \rightarrow -\infty$ .

Формфакторы  $K(x-y)$  являются обобщенными функциями, задан-  
ными на пространстве основных функций  $\mathcal{Z}_a$ . Пространство  $\mathcal{Z}_a (a \geq 1)$   
состоит из всех тех целых функций  $f(z_1, \dots, z_n)$  от  $n$  комплексных  
переменных  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), которые удовлетворяют условиям:

$$(1) \quad \forall f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{Z}_a \quad \exists C > 0, A_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leq C \exp\left\{\sum_{j=1}^n A_j |z_j|^\alpha\right\}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |f(\dots, x_j + iy_j, \dots)| < \infty \quad \forall y_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Пространство  $\widetilde{\mathcal{Z}}_a$ , являющееся пространством фурье-образов  
функций  $f \in \mathcal{Z}_a$ , состоит из дифференцируемых функций  $\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)$ ,  
удовлетворяющих условию

$$(3) \quad \exists C > 0, B_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$|\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)| \leq C \exp\left\{-\sum_{j=1}^n B_j |p_j|^\gamma\right\},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1.$$

На  $\mathcal{Z}_a (a \geq 1)$  заданы все нелокальные обобщенные функции  
 $K(x)$ , для которых  $s < \frac{1}{2}\gamma = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}$  или  $\alpha < \frac{s}{2\gamma-1}$ .  
В  $x$  - пространстве для формулы (3) справедливо следующее

представление в случае  $\rho = \frac{1}{2}$  и  $\varphi(x_0, \vec{x}) \in \mathcal{Z}_a$ :

$$\phi(x) = \phi(x_0, \vec{x}) = \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho \, \alpha(\rho^2) \varphi(x_0 + i\rho \vec{f}, \vec{x} + \vec{\rho}), \quad (4)$$

где интегрирование проводится по четырехмерному евклидову шару  $\rho^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \vec{p}^2 + \vec{f}^2 \leq l^2$ .  $l$  - некоторый параметр размерности длины, характеризующий размер области нелокального взаимодействия,  $\alpha(\rho^2)$  - некоторая вещественная функция, определяемая видом формфактора  $K(\kappa^2)$ .

Мы видим, что формфакторы рассматриваемого типа приводят к размазке только пространственных координат, а по времени размазка происходит лишь в направлении минимой оси, что позволяет надеяться на выполнение разумного условия причинности. При этом формфактор релятивистски инвариантен.

Итак, нами введено нелокальное взаимодействие полей в классическую теорию. Возникает вопрос, как проводить квантование этой классической нелокальной системы и как строить соответствующую  $S$ -матрицу. Возможны два пути решения этой проблемы.

I вариант (см. <sup>3</sup>). Проводится квантование только невзаимодействующей системы и строится гильбертово пространство физических состояний  $\mathcal{H}$ , описывающих невзаимодействующие частицы. Далее используется принцип соответствия, согласно которому  $S$ -матрица при бесконечно малой константе связи равна

$$S = 1 + ig \int d^4x : \mathcal{L}_r(x) :$$

Для построения высших порядков теории возмущений вводится предписание, согласно которому пропагаторы скалярной частицы изменяются

следующим образом:

$$\Delta_c(\kappa^2) = \frac{1}{m^2 - \kappa^2 - i\varepsilon} \longrightarrow \frac{[K(\kappa^2)]^2}{m^2 - \kappa^2 - i\varepsilon} = D_c(\kappa^2). \quad (5)$$

Однако такое изменение пропагатора ещё не приводит к конечной теории. Необходимо ввести некоторую регуляризационную процедуру, в рамках которой возможно построение конечной  $S$ -матрицы. По аналогии с локальной теорией можно записать

$$S^\delta = T_\delta \exp \left\{ ig \int dx \mathcal{L}_\delta(x) \right\}.$$

Здесь знак  $T_\delta$ , строго говоря, не имеет смысла операции упорядочения операторов поля по времени, а обозначает математическое правило, согласно которому строятся высшие порядки теории возмущений. При стремлении параметра регуляризации  $\delta$  к нулю мы должны получить конечную  $S$ -матрицу

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta.$$

Существует ряд регуляризаций, приводящих к конечному результату. Основная идея состоит в том, чтобы в матричных элементах, построенных с помощью регуляризованных пропагаторов, было возможно перейти к евклидовой метрике. Приведём одну из возможных регуляризаций. Для нелокального формфактора  $V(-\kappa^2) = [K(\kappa^2)]^2$  в области  $\kappa^2 < m^2$  справедливо представление Меллина

$$V(-\kappa^2) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \frac{d\zeta}{2\pi\imath} \frac{V(\zeta)}{\sin \pi\zeta} (m^2 - \kappa^2 - i\varepsilon)^\zeta,$$

где  $\beta < N_c$ , а функция  $V(\zeta)$

I) регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} \zeta > -N_c$ , и в этой области

$$|V(\zeta+i\eta)| \leq C \frac{e^{-\pi|\eta|}}{(1+|\eta|)^M \Gamma(1+\frac{|\zeta|}{\eta})}, \quad \forall M > 0;$$

2) в точках  $\zeta = -1, -2, \dots, -(N_c-1)$  имеет пуль, по крайней мере, первого

порядка,

- 3)  $\mathcal{U}(\zeta) = 1$ ,
- 4)  $[\mathcal{U}(\zeta)]^* = \mathcal{U}(\zeta^*)$ .

Введём теперь регуляризованный пропагатор

$$D_c^\delta(k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \frac{ds \mathcal{U}(s) e^{\delta s^2}}{\sin \pi s} (m^2 - k^2 - i\epsilon)^{s-1}.$$

Функция  $D_c^\delta(k^2)$  при  $\delta > 0$ :

- 5) определена во всей комплексной  $k^2$ -плоскости и регулярина везде, кроме разреза вдоль луча  $[m^2, +\infty)$ ,
- 6)  $D_c^\delta(k^2) = O(|k^2|^{-1/4})$  при  $|k^2| \rightarrow \infty$ ,
- 7)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} D_c^\delta(k^2) = D_c(k^2)$ .

Регуляризованная  $S$ -матрица строится при помощи регуляризованных пропагаторов  $D_c^\delta(k^2)$ . Для снятия регуляризации в матричных элементах  $S$ -матрицы, соответствующих любым связанным диаграммам Фейнмана, достаточно перейти к евклидовой метрике по всем внутренним импульсам интегрирования, поскольку  $D_c^\delta(k^2)$  регулярина в полуплоскости  $\text{Im } k^2 > 0$ . После этого можно перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ , так как функция  $D_c^\delta(k^2)$  убывает при  $k^2 \rightarrow -\infty$  (подробнее см. 3, 5). Итак, существует предел в нелокальной теории

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta = S.$$

При рассмотрении взаимодействующих нейтральных спинорных полей можно также считать, что спинорные пропагаторы приобретают нелокальный формфактор, согласно

$$\frac{1}{m - \vec{p}^2 - i\varepsilon} \rightarrow \frac{V(-p^2)}{m - \vec{p}^2 - i\varepsilon}.$$
(6)

При этом  $S$ -матрица будет конечной. Однако при изучении взаимодействия заряженных полей с электромагнитным полем требование градиентной инвариантности нельзя удовлетворить, изменения пропагатор заряженных частиц согласно (5) или (6). На случае взаимодействия с электромагнитным полем мы остановимся ниже.

II вариант (см. <sup>6</sup>). Рассматривается полный лагранжиан классического скалярного поля с нелокальным взаимодействием

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) + g U(K(\square) \varphi(x)).$$

Введём поле  $\phi(x) = K(\square) \varphi(x)$ , тогда

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \phi(x) E(\square) \phi(x) + g U(\phi(x)),$$
(7)

где

$$E(\square) = \frac{\square - m^2}{[K(\square)]^2} = \frac{\square - m^2}{V(-\square)}.$$

Классическое уравнение движения записывается в виде

$$E(\square) \phi(x) = -g U'(\phi(x)).$$

Поскольку  $V(z)$  – целая функция,  $E(\kappa^2)$  имеет только один нуль при  $\kappa^2 = m^2$ , который определяет массу скалярной частицы.

Идея состоит в следующем. Вместо оператора  $E(\square)$  в (7) введём регуляризованный оператор  $E^\delta(\square)$ , такой, что  $E^\delta(\kappa^2) = \frac{\kappa^2 - m^2}{V^\delta(-\kappa^2)}$  имеет нули в некоторой последовательности точек

$$E^\delta(k^2) \sim (k^2 - m^2) \prod_{j=1}^{\infty} (k^2 - m_j^2(\delta)),$$

где

$$m_j^2(\delta) > 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$m_j^2(\delta) \rightarrow \infty \quad \delta \rightarrow 0$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E^\delta(k^2) = E(k^2) ..$$

Каждый нуль  $k^2 = m_j^2(\delta)$  оператора  $E^\delta(k^2)$  будет определять некоторое нетривиальное решение уравнения движения. Переход к пределу  $\delta \rightarrow 0$  в полном решении уравнения движения или для  $S$ -матрицы должен привести к теории, соответствующей исходному нелокальному лагранжиану (7).

Регуляризацию можно ввести следующим образом. Вместо функции

$$\frac{1}{E(k^2)} = \frac{V(-k^2)}{k^2 - m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (k^2 - m^2)^{n-1}$$

введём

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^\delta(k^2)} &= \frac{V^\delta(-k^2)}{k^2 - m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n (k^2 - m^2)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n+n} \left(1 - \frac{\delta}{j} \frac{k^2 - m^2}{m^2}\right)} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j}{k^2 - m_j^2(\delta)}, \end{aligned}$$

где

$$m_j^2(\delta) = m^2 \left(1 + \frac{j}{\delta}\right) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда имеем:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}^\delta(x) = \frac{1}{2} \phi^\delta(x) E^\delta(\square) \phi^\delta(x) + g U(\phi^\delta(x)),$$

$$E^\delta(\square) \phi^\delta(x) = -g U'(\phi^\delta(x)). \quad (8)$$

Поле  $\phi^\delta(x)$  при  $\delta > 0$  может быть проквантовано с привлечением методов инфинитной метрики ( см. <sup>7</sup> ). При  $\delta > 0$  для невзаимодействующей системы можно построить гамильтониан  $H^\delta$  и векторное пространство состояний с инфинитной метрикой  $\mathcal{K}^\delta$ . Далее для взаимодействующей системы можно найти матрицу рассеяния  $S^\delta$ . По определению, будем считать, что предел при  $\delta \rightarrow 0$  всех этих величин является квантово-полевым решением исходной системы.

Необходимо далее показать, что указанная регуляризация обеспечивает существование пределов операторов и матричных элементов всех физических величин и приводит к самосогласованной теории. Эта задача и решается в дальнейшем.

Проквантованное решение свободного уравнения

$$E^\delta(\square) \phi^\delta(x) = 0$$

имеет вид:

$$\phi^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \sqrt{A_j^\delta} \phi_j^\delta(x),$$

$$\phi_j^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega_j^\delta(\vec{k})}} (d_{j\vec{k}} e^{-i\vec{k}x} + d_{j\vec{k}}^+ e^{i\vec{k}x}),$$

$$[d_{j\vec{k}}, d_{j'\vec{k}'}]_- = (-)^j \delta_{jj'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$\omega_j^\delta = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 (1 + \frac{j}{\delta})}.$$

Гамильтониан невзаимодействующей системы записывается в форме

$$H_0^\delta = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \int d\vec{k} \omega_{j\vec{k}}^\delta d_{j\vec{k}}^+ d_{j\vec{k}}^- . \quad (9)$$

Рассматриваемая система состоит из квантов со спектром масс  $m_j^2(\delta) = m^2 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$  ( $j=0, 1, \dots$ ). При  $\delta \rightarrow 0$  масса квантов с  $j=1, 2, \dots$  стремится к бесконечности. Эти кванты будем называть "духами". Пространство состояний  $\mathcal{H}^\delta$  является векторным пространством с индефинитной метрикой. При  $\delta \rightarrow 0$  массы всех "духовых" квантов растут. Поэтому, если мы характеризуем физические состояния определенным значением энергии, то в пределе  $\delta \rightarrow 0$  ни одно физическое состояние с произвольным, но конечным значением энергии не может включать "духовые" кванты. В этом смысле

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^\delta = \mathcal{H},$$

где  $\mathcal{H}$  является гильбертовым пространством, описывающим скалярные частицы с массой  $m$ .

Полный гамильтониан, соответствующий лагранжиану (8), имеет вид

$$H^\delta = H_0^\delta + g H_I^\delta ,$$

где  $H_0^\delta$  даётся (9), а

$$g H_I^\delta = -g \int d\vec{x} : U(\phi^\delta(0, \vec{x})) :$$

$S$ -матрица, отвечающая за переходы между асимптотически свободными состояниями из векторного пространства  $\mathcal{H}^\delta$ , записывается

$$S^\delta = T \exp \left\{ -i g \int dt H_I^\delta(t) \right\} = T \exp \left\{ i g \int dx : U(\phi^\delta(x)) : \right\},$$

где знак  $T$  имеет смысл операции строгого упорядочения по времени, поскольку поле  $\phi^\delta(x)$  удовлетворяет локальным перестановочным соотношениям.

Дальнейшая задача состоит в переходе к пределу  $\delta \rightarrow 0$  и доказательству унитарности и причинности предельной  $S$ -матрицы.

Постулат унитарности  $S$ -матрицы в квантовой теории поля является одним из основных требований, без выполнения которого теория не может рассматриваться самосогласованной и физически приемлемой. Доказательство унитарности  $S$ -матрицы строится следующим образом (см. <sup>5</sup>). Показывается, что регуляризационная процедура удовлетворяет условиям:

1. Определена регуляризованная  $S$ -матрица и существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta[g] = S[g]$$

для каждого связного графа в теории возмущений. Предел существует, поскольку при  $\delta > 0$  можно перейти к евклидовой метрике во всех внутренних интегралах, определяющих любой связной граф, а форманторы убывают достаточно быстро в пространственно-подобном направлении.

2. Функции Грина  $\Delta_{(-)}$ , которые определяют операцию произведения в  $S S^\dagger = S \otimes S^\dagger$ , также регуляризуются, т.е. имеем  $\Delta_{(-)}^\Gamma$ , или, символически,  $\otimes^\delta$ , и существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_{\delta} = \Delta_0 \text{ или } \lim_{\delta \rightarrow 0} \otimes^{\delta} = \otimes.$$

3. В соотношении

$$J[g] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1}[g] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g]$$

предел не зависит от порядка предельных переходов к точке  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ , т.е. оператор  $J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = S^{\delta_1} \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}$  непрерывен в точке  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ .

$$4. S^{\delta}[g] \otimes^{\delta} S^{\delta+}[g] = 1 \quad \text{для } \delta > 0.$$

Следовательно,  $S$ -матрица унитарна, так как

$$\begin{aligned} S S^+ &= S \otimes S^+ = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1} \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta} \otimes^{\delta} S^{\delta+} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Проведённое доказательство справедливо, если функция включения взаимодействия  $g(x)$  отлична от постоянной. Для перехода к  $g(x) = g = C_m t$  необходимо ввести в лагранжиан взаимодействия контрчлены, которые в ряду теории возмущений убирают связные графы, описывавшие переход вакуум-вакуум, а также диаграммы с добавками собственной энергии во внешние линии. Поскольку условие унитарности  $S S^+ = 1$  будет выполнено, если выполняются соответствующие условия для каждого связного графа независимо от остальных, перенормированная  $S$ -матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений.

Другим важным свойством  $S$ -матрицы является условие причинности, которое формулируется следующим образом (см. 3, 4). Вводится функция  $g(x)$ , включающая и выключающая взаимодействие, так что имеем  $S[g]$  - матрицу. В случае  $g(x) = 0$  получим  $S[0] = 1$ . Теория называется микропричинной, если выполнено

$$S[g_1 + g_2] = S[g_1] S[g_2] \quad (10)$$

при  $G_1 \supseteq G_2$ , где  $G_j = \text{Supp } g_j(x)$  ( $j=1,2$ ). Это означает, что все точки области  $G_1$ , где сосредоточена функция  $g_1(x)$ , или пространственно подобны всем точкам области  $G_2$ , где сосредоточена функция  $g_2(x)$ , или лежат в будущем относительно всех точек области  $G_2$ .

Если теория нелокальна, но причинна, тогда  $S[g]$  удовлетворяет условию (10) в случае, когда область  $G_1$  лежит в будущем относительно всех точек области  $G_2$ , т.е.  $G_1 > G_2$ . При этом размер области нелокального взаимодействия будет  $\ell$ , если, кроме того, выполнено (10) при  $G_1 \sim G_2$  и  $(x-y)^2 < \ell^2$  для  $\forall x \in G_1$  и  $\forall y \in G_2$ . Окончательно, условия причинности при различных вариантах взаимодействия можно записать в таблицу.

Построенная нами теория удовлетворяет условию причинности в форме (Ш) (см. Таблицу). Доказательство основано на том факте, что проекция носителя нелокального формфактора на вещественное пространство  $R^4$  не имеет протяжённости вдоль оси времени, согласно (4).

Таблица

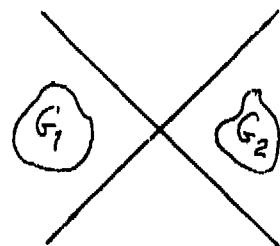
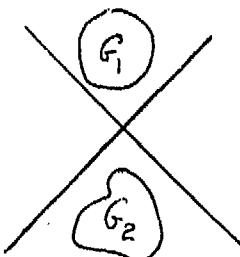
$$S[g_1 + g_2] = S[g_1] S[g_2]$$

при следующих соотношениях между областями  $G_1$  и  $G_2$

$$G_1 > G_2$$

$$G_1 \sim G_2$$

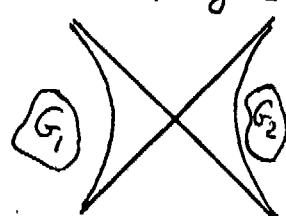
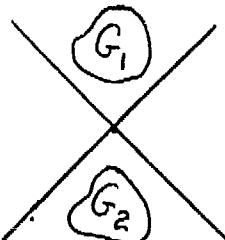
I. Локальная микропричинная теория



II. Нелокальная причинная теория. Размер области нелокального взаимодействия  $\ell$

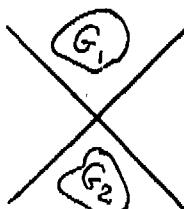
$$G_1 > G_2$$

$$G_1 \sim G_2$$
$$(x-y)^2 < \ell^2$$
$$\forall x \in G_1, \forall y \in G_2$$



III. Нелокальная причинная теория

$$G_1 > G_2$$



Взаимодействие поля заряженных частиц с электромагнитным полем определяется требованием градиентной инвариантности. Обычно требуют, чтобы лагранжиан системы взаимодействующих заряженных полей  $\Psi_j$  с электромагнитным полем  $A_\mu$  был инвариантен относительно градиентных преобразований

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \\ \Psi_j(x) &\rightarrow \Psi_j(x) \exp\{iq_j f(x)\} \\ \Psi_j^+(x) &\rightarrow \Psi_j^+(x) \exp\{-iq_j f(x)\} \end{aligned} \right\}, \quad (II)$$

где  $q_j$  означает заряд поля  $\Psi_j$ . Инвариантность полного лагранжиана  $\mathcal{L}(\Psi, \Psi^+, A_\mu)$  относительно градиентной группы (II) приводит к сохранению тока  $\partial_\mu J_\mu(x) = 0$ . Необходимо подчеркнуть, что градиентное преобразование (II) уже подразумевает, что взаимодействие электромагнитного поля с заряженными полями является локальным. Единственной электромагнитной характеристикой поля  $\Psi_j$  является его заряд  $q_j$ , который фигурирует в преобразованиях (II). Явный вид лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с заряженными полями выбирается обычно согласно принципу "минимальности", который гласит, что при действии на переменную поля  $\Psi_j$  оператор  $\partial_\mu$  заменяется на

$$\partial_\mu \Psi_j(x) \rightarrow \{\partial_\mu - iq_j A_\mu(x)\} \Psi_j^-(x),$$

$$\partial_\mu \Psi_j^+(x) \rightarrow \{\partial_\mu + iq_j A_\mu(x)\} \Psi_j^+(x).$$

Изложенная общепринятая процедура приводит ко всем трудностям, возникающим в локальной квантовой теории поля, особенно в электродинамике частиц со спином 1 и выше.

Наше нелокальное обобщение теории электромагнитных взаимодействий (см. <sup>8</sup>) состоит в следующем. Мы предполагаем, что вместо

группы градиентных преобразований (II) имеем

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \\ \psi_j(x) &\rightarrow \psi_j(x) \exp \{i q_j K_j(\ell_j^2 \square) f(x)\} \\ \psi_j^+(x) &\rightarrow \psi_j^+(x) \exp \{-i q_j K_j(\ell_j^2 \square) f(x)\} \end{aligned} \right\}, \quad (I2)$$

где  $K_j(\ell_j^2 \square)$  — нелокальный формфактор использованного нами типа, нормированный условием  $K_j(0) = 1$ .

Группа преобразований (I2) отличается от (II) изменением фазы преобразования заряженных полей  $\psi_j$ . При градиентных преобразованиях с постоянной фазой  $f = \text{const}$  преобразования (I2) совпадают с общепринятым.

Каков физический смысл градиентных преобразований (I2)? Константа  $q_j$  определяет заряд поля  $\psi_j$ . Нелокальная функция  $K_j(\ell_j^2 \square) f(x)$  характеризует распределение заряда поля  $\psi_j(x)$  в  $X$  — про странстве, параметр  $\ell_j$  является характерным размером той области, где распределён заряд.

Принцип "минимальности" электромагнитного взаимодействия в нелокальном случае будет выглядеть следующим образом

$$\partial_\mu \psi_j(x) \rightarrow \left\{ \partial_\mu - i q_j K_j(\ell_j^2 \square) A_\mu(x) \right\} \psi_j^-(x),$$

$$\partial_\mu \psi_j^+(x) \rightarrow \left\{ \partial_\mu + i q_j K_j(\ell_j^2 \square) A_\mu(x) \right\} \psi_j^+(x).$$

Наиболее удобно проводить построение нелокальной электродинамики в формализме Даффина-Кеммера. Лагранжиан, описывающий частицы со спином  $S$ , которые взаимодействуют с электромагнитным полем, имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}_s(x) (i \alpha_\mu \partial_\mu - m) \psi_s(x) + e \bar{\psi}_s(x) \alpha_\mu \psi_s(x) K(e^2 \sigma) A_\mu(x).$$

На допустимые физические состояния налагается ряд условий, чтобы исключить из рассмотрения все спины, меньшие  $S$  (см.  $^2$ ).

Построение конечной унитарной  $S$ -матрицы для электродинамики частиц спина  $S$  мы проведём в рамках варианта I. Итак, необходимо указать такую регуляризационную процедуру, которая проводит к конечной  $S$ -матрице.

Пропагатор частиц спина  $S$  растёт в импульсном пространстве как

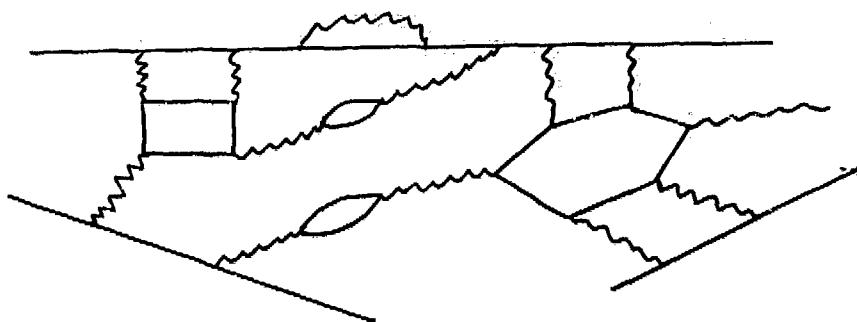
$$D_c^{(s)}(p) = \left( \bar{\psi}_s \overline{\psi}_s \right)(p) = \frac{d_s(p)}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (p)^{2s-2}.$$

Пропагатор фотона

$$\left( K(e^2 \sigma) \overline{A_\mu} K(e^2 \sigma) A_\nu \right)(u) = \frac{[K(e^2 \kappa^2)]^2}{-K^2 - i\varepsilon}$$

может убывать достаточно быстро при  $K^2 \rightarrow -\infty$ .

Любой связанный граф теории возмущений представляется совокупностью разомкнутых линий и циклов, образованных пропагаторами заряженного поля  $D_c^{(s)}(p)$ , соединяющихся между собой фотонными линиями, как, например,



Ясно, что при достаточно быстром убывании формфактора в евклидовой области все интегрирования, связанные с циклами, включающими хотя бы один пропагатор фотона, будут сходиться, если пропагатор фотона регуляризовать одним из перечисленных выше способов.

Исследуем циклы, образованные пропагаторами заряженных частиц. Интегралы, соответствующие этим циклам, будем регуляризовать с помощью частично видоизменённой циклической регуляризации Паули-Виллерса. Пропагаторы заряженных частиц регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми циклами. Если цикл имеет  $n$  вершин, тогда регуляризованное выражение равно

$$\sum_j C_j e_j^{-n} \text{Sp} \left\{ \alpha_{\mu_1} D_c^{(s)}(m_j, x-x_2) \alpha_{\mu_2} D_c^{(s)}(m_j, x_2-x_3) \dots \right\},$$

где проведены замены

$$m \rightarrow m_j = m \Lambda_j$$

$$e \rightarrow e_j = \begin{cases} e, & s=0, \frac{1}{2} \\ e \Lambda_j^{2s-1}, & s=1, \frac{3}{2}, \dots \end{cases}$$

$\Lambda_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) - большие безразмерные параметры регуляризации, мы их выберем в виде  $\Lambda_j = \Lambda + \varepsilon_j$ , где  $\Lambda \gg 1$ , а  $\varepsilon_j \ll 1$ . Коэффициенты  $C_j$  ( $j=1, \dots, Q$ ) удовлетворяют

системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^Q c_j \alpha_j^k &= 0, \quad k=0,1,\dots,K \\ \sum_{j=0}^Q c_j \alpha_j^m \log \alpha_j &= a_m, \quad m=0,1,\dots,M \end{aligned} \right\} \quad Q \geq K+M+1$$

Числа  $K$  и  $M$  зависят от спина  $S$  и при  $S \geq \frac{3}{2}$  от рассматриваемого порядка теории возмущений.

В рамках этой регуляризации сходятся интегралы от любых замкнутых циклов, и существует конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

При этом в теории возникают новые константы  $a_m$  ( $m=0,2,\dots$ ) (константы с нечетными  $m$  в теории не появляются в силу градиентной инвариантности — теорема Фарри). В электродинамике спина 0 и  $1/2$  появляется единственная постоянная  $a_0$ , которая определяет перенормировку заряда и не может быть измерена на опыте; в электродинамике спина 1 возникают постоянные  $a_0$  и  $a_2$ , причём  $a_2$  уходит в перенормировку  $e$ ,  $a_0$  определяет рассеяние света на свете. В электродинамике спина  $3/2$  возникают постоянные  $a_0, a_2, a_1$ , а спина  $S \geq 2$  —  $a_0, a_2, a_1, a_6, \dots$ . При этих константах стоят функции вида

$$a_{2k} \sum_{\epsilon \geq 2} e^{2t} C_{k,t} (F_{\mu\nu})^{2+},$$

где  $F_{\mu\nu}(t) = K(e^t) / (\partial_\mu A_\nu(t) - \partial_\nu A_\mu(t))$ . Вид этих функций в настоящее время неизвестен. Следовательно, в теории спина  $S \geq \frac{3}{2}$  возникает неполиномиальное фотон-фотонное взаимодействие, которое приводит к наблюдаемым на опыте эффектам.

Таким образом, в рамках нелокальной теории можно построить конечную градиентно-инвариантную электродинамику частиц произ-

вольного спина  $S$ . Фактически в настоящее время построена электродинамика для частиц со спинами 0,  $1/2$ , 1 и  $3/2$ .

В рамках изложенной процедуры возможно построить нелокальную теорию слабых взаимодействий как в случае четырехфермионного универсального взаимодействия, так и в случае взаимодействия с промежуточным векторным бозоном<sup>9</sup>. Этот вариант теории основан на физическом постулате, который гласит, что все нейтральные поля взаимодействуют с заряженными нелокальным образом. Эффективно это приводит к тому, что изменяются пропагаторы нейтральных полей: нейтрино и фотона.

С физической точки зрения появление формфакторов в пропагаторах нейтральных частиц означает явное введение функционального произвола в теории. В оправдание этого можно сказать следующее. Известно, что неперенормируемую теорию можно сделать конечной, вводя бесконечное число контрученов с неопределенными константами, величина которых ничем не ограничена, и нет никаких идей для их определения. Это, по сути дела, означает существование функционального произвола при построении  $S$ -матрицы для неперенормируемых взаимодействий. В нелокальной теории задание формфактора полностью определяет конечную  $S$ -матрицу, и весь функциональный произвол сосредоточен в выборе формфактора, который имеет прозрачный физический смысл. Показано, что введение в теории формфакторов приводит к изменению электромагнитного и "слабого" потенциала на малых расстояниях, что, по-видимому, свидетельствует о существовании пространственных распределений электрического и "слабого" зарядов.

В квантовой электродинамике с привлечением некоторых дополнительных соображений физического и математического характера

удаётся выбрать формфактор однозначно  $^{10}$ . В общем, этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Дальнейший шаг в построении нелокальной квантовой теории поля состоит в суммировании ряда теории возмущений. В работах  $^{11, 12}$  было показано, что для неполиномиальных лагранжианов взаимодействия вида

$$g \mathcal{L}_x(x) = g \int d\sigma(\beta) : e^{i\beta \varphi(x)} : ,$$

где  $\sigma(\beta)$  некоторая ограниченная мера, в нелокальной теории, когда нелокальный пропагатор в евклидовой метрике ограничен, т.е.

$$\mathcal{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 k_E [K(-k_E^2)]^2}{k_E^2 + m^2} e^{ik_E x_E} \leq \mathcal{D}(0) < N < \infty ,$$

ряд теории возмущений для  $S$ -матрицы сходится в евклидовой области. В работе  $^{12}$  удалось показать, используя методы статистической механики, что ряд теории возмущений сходится в евклидовой области при  $g(x) = g = \text{const}$  в некотором круге  $|g| < g_0$ .

Дальнейшая задача состоит в аналитическом продолжении евклидовых амплитуд в физическую область и проверке всех аксиом для полной  $S$ -матрицы.

#### Литература:

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
2. Y. Takahashi. An Introduction to Field Quantization. Oxford a.o., Pergamon, 1969.

3. Г.В. Ефимов. Препринт ИТФ-68-54, Киев, 1968.  
Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I, стр. 256, 1970.  
Материалы II совещания по нелокальной теории поля, ОИЯИ,  
2-5400, Дубна, 1970.
4. Г.В. Ефимов. Commun.math.Phys., 7, 138, 1968.  
Препринт ИТФ-68-52, Киев, 1968.  
ОИЯИ, Р2-6756, Дубна, 1972.
5. В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6586, Дубна, 1972.  
Препринт ИТФ-72-ИЗОР, Киев, 1972. ОИЯИ, Р2-6888, Дубна,  
1973.
6. Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6864, Дубна, 1972.
7. Д.И. Блохинцев. ЖЭТФ, 17, II6, 1947.  
A.Pais, G.E.Uhlenbeck, Phys.Rev., 79, 145, 1950.  
К.Надь. Пространства состояний с индефинитной метрикой  
в квантовой теории поля. Библиотека сборника "Математика",  
"Мир", Москва, 1969.
8. Г.В. Ефимов. Annals of Phys. 71, 466, 1972.  
Проблемы физики ЭЧАЯ, том. 5, вып. I, 1973.
9. Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер, Ann.of Phys.67, I24, 1971.  
В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер,  
Annals of Phys., 76, 251, 1973.  
ОИЯИ, Р2-6865, Дубна, 1972.
10. Г.В. Ефимов, О.А. Могилевский . Nuclear Phys., B44, 541,  
1972.  
О.А. Могилевский, препринт ИТФ-72, ИЗОР, 1972.
11. Г.В. Ефимов, ТМФ, 2, 302, 1970.
12. Д.И. Петрина, В.И. Скрипник, ТМФ, 8, 369, 1971.  
W.I.Skrupnik, preprint ITP-72-175E, Kiev, 1972.

ГИПОТЕЗА О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ДЛИНЕ В РАМКАХ  
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ<sup>x)</sup>

В.Г. Кадышевский

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

61. Фундаментальная длина  $\ell_0$  - это гипотетическая универсальная постоянная, без привлечения которой квантовая теория поля, возможно, не в состоянии дать адекватного описания взаимодействий элементарных частиц в ультрамальных пространственно-временных масштабах, или, соответственно, в области больших энергий и передач импульса. Гипотеза о существовании этого нового, после  $\hbar$  и  $c$ , "масштаба природы" была выдвинута Г.В. Ватагиным в 1934 году<sup>4</sup>. В настоящее время имеется обширная литература по нелокальным квантовым теориям поля, в которых из тех или иных физических соображений и с привлечением различных математических средств модифицируется вид взаимодействия элементарных частиц в области малых дебройлевских длин волн, сравнимых с фундаментальной длиной  $\ell_0$ . (см., в частности, <sup>5-7</sup>; критический обзор ряда попыток построения нелокальных теорий поля дан в монографии<sup>8</sup>).

Для многих исследователей стимулом к нелокальному обобщению теории поля были и остаются трудности с ультрафиолетовыми расходимостями, возникающими в ортодоксальной локальной теории при разложении матрицы рассеяния по константе связи.

Как известно<sup>9</sup>, в данном случае мы имеем дело с серьезной математической проблемой - проблемой умножения друг на друга сингулярных обобщенных функций с совпадающими особенностями. Обойти

x) Настоящий доклад реанимирует результаты работ<sup>1,2</sup> и, главным образом, работы<sup>3</sup>, выполненной совместно с А.Д. Донковым, М.Д. Матвеевым и Р.М. Мир-Касимовым.

этую трудность не удается ни в одной из формулировок современной локальной теории поля, в том числе и в аксиоматической 10-12. Поэтому складывается впечатление, что указанный дефект теории несит принципиальный характер и что для его устранения необходим радикальный пересмотр самих исходных постулатов, на которых поконится локальная квантовая теория поля. В аксиоматике Боголюбова эти постулаты таковы 9-11:

- I Релятивистская инвариантность.
- II Трансляционная инвариантность.
- III Унитарность.
- IV Полнота системы состояний с положительной энергией.
- V Единственность вакуумного состояния.
- VI Стабильность вакуумного и одиночественного состояний.
- VII Причинность.

Перечисленные требования являются достаточными для аксиоматического построения  $S$ -матрицы. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением теории нейтрального скалярного поля  $\varphi$ , описывающего частицы массы  $m$ . Если использовать  $p$ -представление, матрицу рассеяния в такой теории можно представить в виде следующего стандартного разложения:

$$S = \sum_n \int d^4 p_1 d^4 p_2 \dots d^4 p_n S_n(p_1, \dots, p_n) : \Psi(p_1) \dots \Psi(p_n) :, \quad (1)$$

где

$$\Psi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \Psi^{out}(x) d^4 x \quad (2)$$

$$\Psi(p)^+ = \Psi(-p), \quad (3)$$

причём

$$(m^2 - p^2) \Psi(p) = 0 \quad (4a)$$

$$\Psi(p) = \delta(m^2 - p^2) \tilde{\Psi}(p). \quad (4b)$$

В силу трансляционной инвариантности и соотношения (4б) коэффициентные функции (к.ф.)  $S_n(p_1, \dots, p_n)$  в разложении (I) определены на массовой поверхности (м.п.)

$$\begin{cases} (p_1 + \dots + p_n)_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ p_1^2 = m^2, \dots, p_n^2 = m^2. \end{cases} \quad (5)$$

Однако для формулировки полной динамической теории и, в частности, принципа причинности УП необходимо расширение  $S$ -матрицы за пределы м.п. <sup>x)</sup>. При "расширении по полю", т.е. когда квантованные  $\Psi$ -поля приобретают классические добавки и перестают подчиняться свободному уравнению (4а), предполагается, что соответствующая расширенная матрица рассеяния по-прежнему задается разложением (I). Считается также, что после расширения за м.п. остаются в силе и требования I-VI. Таким образом, например, при пространственно-временных сдвигах

$$x \rightarrow x + a \quad (6)$$

закон преобразования расширенного поля  $\Psi(p)$  имеет обычный вид:

$$e^{iPa} \Psi(p) e^{-iPa} = e^{ipa} \Psi(p) \quad (7)$$

( $P_\mu$  - оператор энергии-импульса поля). Отсюда вытекает, что расширенные к.ф.  $S_n(p_1, \dots, p_n)$  остаются на поверхности

$$(p_1 + \dots + p_n)_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (8)$$

(ср. с (5)).

Величины  $S_n(p_1, \dots, p_n)$  могут быть записаны как вакуумные ожидания радиационных операторов

$$S^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{\delta^n S}{\delta \Psi(p_1) \dots \delta \Psi(p_n)} S^t. \quad (9)$$

<sup>x)</sup> Детальное изложение метода расширенной  $S$ -матрицы дано в <sup>13</sup>. В этой же работе имеется исчерпывающая библиография по данному вопросу.

Оператор  $i S^{(1)}(-p)$  отождествляется с гайзенберговым оператором тока в  $p$ -представлении:

$$i S^{(1)}(-p) = i \frac{\delta S}{\delta \psi(-p)} S^+ = j(p). \quad (10)$$

В конфигурационном пространстве имеем соответственно:

$$j(x) = \frac{1}{(2\pi)^5/2} \int e^{ipx} j(p) d^5 p. \quad (11)$$

Ясно, что при сдвигах (6)

$$j(p) \rightarrow e^{iPa} j(p) e^{-iPa} = e^{ipa} j(p) \quad (12)$$

(ср. с (7)).

Выполнение соотношения (8) для 4-импульсов  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), от которых зависит к.ф.  $S_n(p_1, \dots, p_n)$ , очевидно, означает, что

$$S_n(p_1, \dots, p_n) = \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) S_n'(p_1, \dots, p_n). \quad (13)$$

Выразим величину  $S_n'$  через исходную к.ф.  $S_n$ . С этой целью рассмотрим в разложении (I) слагаемое

$$\int d^5 p_1 \dots d^5 p_n S_n(p_1, \dots, p_n) : \psi(p_1) \dots \psi(p_n) : \quad (14)$$

В силу (13) выражение (14) тождественно следующему:

$$\int d^5 p_1 \dots d^5 p_n S_n(p_1, \dots, p_n) : \psi(p_1 - U^{(p_1, \dots, p_n)}) \dots \psi(p_n - U^{(p_1, \dots, p_n)}) : , \quad (15)$$

где

$$U^{(p_1, \dots, p_n)} = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}. \quad (16)$$

Произведем теперь в (15) замену переменных

$$p_i = q_i + U^{(p_1, \dots, p_n)}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i = 0$$

Поскольку

$$d^5 p_1 \dots d^5 p_n = d^5 q_1 \dots d^5 q_n \delta^{(4)}(U^{(q_1, \dots, q_n)}) d^5 U, \quad (18)$$

то вместо (15) будем иметь:

$$\int d^4 q_1 \dots d^4 q_n \delta^{(4)}(U^{(q_1, \dots, q_n)}) \int d^4 k S_n(q_1 + k, \dots, q_n + k) : \varphi(q_1) \dots \varphi(q_n) : \quad (19)$$

Сравнивая (19) с (14), находим:

$$S_n(p_1, \dots, p_n) = \delta^{(4)}\left(\frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right) \int d^4 k S_n(p_1 + k, \dots, p_n + k), \quad (20)$$

или

$$S_n(p_1, \dots, p_n) = \delta^{(4)}(U^{(p_1, \dots, p_n)}) \tilde{S}_n(p_1, \dots, p_n) \quad (21)$$

$$\tilde{S}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d k S_n(p_1 + k, \dots, p_n + k). \quad (22)$$

Таким образом, функция  $S_n'$  в (13) определяется соотношением

$$S_n'(p_1, \dots, p_n) = n^4 \tilde{S}_n(p_1, \dots, p_n). \quad (23)$$

Заметим, что зависимость правой части тождества (21) от 4-импульсов  $p_1, \dots, p_n$  имеет специфический характер по отношению к преобразованиям сдвига

$$p_\mu' = p_\mu + b_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (24)$$

в  $p$ -пространстве. В самом деле, аргумент  $\delta$ -функции — 4-вектор  $U_\mu^{(p_1, \dots, p_n)}$  — преобразуется по тому же закону (24), что и каждый из импульсов  $p_\mu$ :

$$U_\mu^{(p_1, \dots, p_n)} = U_\mu^{(p_1, \dots, p_n)} + b_\mu, \quad (25)$$

а функция  $\tilde{S}_n(p_1, \dots, p_n)$  при этих преобразованиях остается инвариантной:

$$\tilde{S}_n(p_1 + b, \dots, p_n + b) = \tilde{S}_n(p_1, \dots, p_n). \quad (26)$$

Принимая во внимание (26) и очевидную релятивистскую инвариантность  $\tilde{S}_n$ , можно утверждать, что данные функции инвариантны относительно всей 10-параметрической группы движений  $p$ -пространства Мinkовского:

$$p_\mu' = \Lambda_\mu^\nu p_\nu + b_\mu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (27)$$

Следовательно,

$$\widetilde{S}_n(p_1, \dots, p_n) = \widetilde{S}_n\left(\left(\frac{p_i - p_j}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{p_i - p_j}{2}\right)^2, \dots\right), \quad (28)$$

Величины типа  $\frac{p_i - p_j}{2}$  в дальнейшем будут условно называться относительными 4-импульсами.

Особый интерес представляет случай, когда к.ф.  $S_n(p_1, \dots, p_n)$  является несвязанной, т.е. содержит, например, слагаемое вида

$$S_m(p_1, \dots, p_m) S_{n-m}(p_{m+1}, \dots, p_n), \quad (29)$$

где  $S_m$  и  $S_{n-m}$  - к.ф. низшего порядка, для которых справедливы тождества типа (21). Тогда можно показать, что к.ф. (29) обязательно удовлетворяет аналогичному тождеству:

$$S_m S_{n-m} = \delta^{(4)}(v^{(p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n)}) \widetilde{S_m} \widetilde{S_{n-m}}. \quad (30)$$

Важнейшая роль в методе расширенной  $\mathcal{S}$ -матрицы принадлежит условию причинности Боголюбова (требование УП). Это условие может быть записано в следующем виде<sup>10, 11, 13</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\delta j(x_1)}{\delta \gamma(x_2)} = i \theta(x_2^o - x_1^o) [j(x_1), j(x_2)] + \text{квазилокальные} \\ \text{члены} \\ [j(x_1), j(x_2)] = 0, \text{ если } (x_1 - x_2)^2 < 0 \end{cases} \quad (31)$$

("условие локальности")

Соотношение (31) в сочетании с (32) представляет собой своеобразное уравнение движения для оператора тока (II).

Квазилокальные члены в (31) имеют принципиальное значение и не могут быть опущены. С одной стороны, они отражают тот произвол, который возникает при перемножении обобщенных функций  $\theta(x_2^o - x_1^o)$  и  $[j(x_1), j(x_2)]$ , имеющих совпадающие сингулярности в вершине светового конуса

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

Этот момент, как мы уже говорили, рассматривается как основной дефект локальной теории. С другой стороны, однако, среди квазилокальных членов содержится и "затравочное" взаимодействие, гарантирующее нетривиальность матрицы рассеяния<sup>(13)</sup>.

По-видимому, квантовая теория поля была бы более последовательной и более совершенной схемой, если бы квазилокальный произвол в ней удалось свести до минимума, например, до нескольких "затравочных" взаимодействий вполне определенного вида. При этом, конечно, пришлось бы отказаться от условий причинности и локальности в форме (31)-(32), как чересчур сингулярных, и найти им подходящую замену. Ясно, что такая программа, в первую очередь, означает отказ от обычной процедуры расширения  $S$ -матрицы за м.п.

§2. В настоящем докладе мы хотим обсудить один из возможных путей обобщения квантовой теории поля, приводящий к естественному появлению в её аппарате фундаментальной длины  $\ell_0$ . Метод расширенной  $S$ -матрицы, обсуждавшийся выше, будет играть в наших построениях основную роль.

Подчеркнем ещё раз, что выбор определенного варианта расширения матрицы рассеяния за м.п. фактически эквивалентен принятию определенного способа описания взаимодействия квантовенных полей. В том случае, когда расширение подчиняется требованиям I-УП, возникает общепринятая локальная квантовая теория поля. Следовательно, если мы намерены видоизменить законы взаимодействия элементарных частиц в области малых длин волн де Броиля, сравнимых с некоторой фундаментальной длиной  $\ell_0$ , то это обязательно должно найти свое отражение и в способе расширения  $S$ -матрицы за м.п. Очевидно, что новые расширенные объекты (поля, к.ф., токи и т.п.) в области энергий и импульсов  $\gtrsim \frac{1}{\ell_0}$  и пространственно-временных расстояний  $\lesssim \ell_0$ .

будут заметно отличаться от своих "классических"<sup>x)</sup> аналогов.

Разумеется, "классические" условия причинности и локальности (3I)-(32), отвечающие требованиям УП, в новой схеме должны быть модифицированы, поскольку в них заведомо фигурируют малые 4-расстояния  $|x_4 - x_4| \lesssim l_0$ . Можно ли сохранить в новой теории условия I-VI?

Для отказа от требований лоренцевской инвариантности (I) и трансляционной инвариантности (II) в настоящее время нет никаких аргументов, основанных на экспериментальных данных, включая данные из опытов при высоких энергиях. Не вызывает сомнений и необходимость условия унитарности матрицы рассеяния (III). Вполне обоснованными и не нуждающимися в какой-либо ревизии представляются также требования IV-VI.

Теперь естественно возникает вопрос: что может послужить исходной руководящей идеей для формулировки новой процедуры расширения, эффективно учитывающей существование фундаментальной длины  $l_0$ ? В этой связи обратим внимание на то обстоятельство, что к требованиям I-VII фактически нужно добавить ещё одно условие, необходимость соблюдения которого при "классическом" расширении

$S$ -матрицы считается самоочевидной. Речь идёт о псевдоэвклидности импульсного 4-пространства, в которое погружен гиперболоид массовой поверхности

$$m^2 - p^2 = 0 \quad (33)$$

Иначе говоря, в обычной теории молчаливо предполагается, что при экстраполяции за поверхность (33) 4-импульс  $p_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ , от

<sup>x)</sup> Термин "классический" в данном контексте применяется к величинам и соотношениям, отвечающим предельному случаю  $l_0 = 0$ .

которого зависит расширенный оператор поля  $\Psi(p)$ , становится произвольным вектором пространства Минковского  $(M)^x$ :

$$p \in M. \quad (34)$$

Таким образом, расширенная за м.п. (5) к.ф.  $\delta_n(p_1, \dots, p_n)$  задаётся в топологическом произведении  $n$  пространств Минковского с дополнительным условием (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1 + \dots + p_n)_\mu = 0 \quad , \mu = 0, 1, 2, 3 \\ p_1 \in M \\ p_2 \in M \\ \vdots \\ p_n \in M \end{array} \right. \quad (35)$$

В силу (34) конфигурационное пространство также оказывается псевдоевклидовым (это отражено в преобразованиях Фурье (2) и (II)).

Псевдоевклидовыми 4-векторами, очевидно, являются и величины типа

$$\xi_\mu = (x_1 - x_2)_\mu.$$

Однако из общих принципов I-VI не следует однозначный вывод о том, что импульсное пространство, которому принадлежит аргумент расширенного оператора  $\Psi(p)$ , должно быть с необходимостью пространством Минковского. В частности, условие релятивистской инвариантности не фиксирует определённой метрики в этом пространстве, а лишь требует, чтобы величины  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  преобразовывались при лоренцевских вращениях как 4-вектор.

Может показаться, если вспомнить о тождестве (21) и связанных с ним соотношениях (17)–(18), что псевдоевклидость  $p$ –пространства является обязательным следствием трансляционной инвариантности  $S$ –матрицы. Однако в действительности для трансляционной инвариантности  $S$  достаточно лишь задания закона преобразования (?) для  $\Psi$ -полей и выполнения соотношений типа (13) для к.ф.,

<sup>x)</sup> В теории возмущений 4-импульсы  $p_\mu$ , не лежащие на гиперболоиде (33), обычно называют виртуальными.

а тождество (21) выводится на основе (13) и принятой а priori псевдоевклидности пространства импульсов<sup>x)</sup>.

Нетрудно убедиться, что постулат (34) никак не следует из требований Ш-У1.

Принимая во внимание сказанное, сформулируем теперь гипотезу, которая во всех дальнейших построениях будет играть ключевую роль:

искомое расширение  $S$  - матрицы за м.п., дающее последовательное описание взаимодействий элементарных частиц с любыми длинами волн де Бройля, должно опираться не на псевдоевклидово пространство импульсов, а на пространство импульсов постоянной кривизны<sup>xx)</sup>. Реализацией последнего является гиперсфера

$$P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 + M^2 P_4^2 = M^2 = \frac{1}{\ell_o^2} \quad (36)$$

в псевдоевклидовом 5-пространстве  $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ . Постоянная  $\ell_o$ , определяющая кривизну поверхности (36), играет роль фундаментальной длины ( $M$  - соответствующая фундаментальная масса).

Кривое 4-пространство, описываемое уравнением (36), называют также пространством де Ситтера. С геометрической точки зрения оно является ближайшим соседом к плоскому пространству Минковского, отличаясь от него формой "постулата о параллельных"<sup>xxx)</sup>.

x) Последнее отражено в явном виде элемента объема  $d^4p = dP_0 dP_1$ , замене переменных (17) и соотношении (18).

xx) В математическом отношении рассматриваемый здесь формализм будет напоминать схему квантованного пространства-времени Снайдера 14-19. Однако исходная идея и физическая интерпретация развивающейся теории принципиально другие по сравнению с 14-19.

xxx) В обычной планиметрии это знаменитый У постулат Евклида.

Теоремы и соотношения, которые не зависят от "постулата о параллельных", составляют содержание так называемой абсолютной геометрии. В этом смысле слова требования I-VI, которые мы на основании проведённого выше анализа имеем право перенести в теорию поля с неевклидовым  $\rho$  - пространством, тоже можно называть абсолютными<sup>х</sup>). Условия причинности и локальности, очевидно, не имеют абсолютного характера и должны быть сформулированы заново, как соответствующие обобщения равенств (31 - 32) в духе геометрии  $\rho$  - пространства де Ситтера (36).

Группой движений  $\rho$  - пространства (36) является группа де Ситтера  $SO(2,3)$ :

$$P_L' = \Lambda_L^M P_M ; \quad L, M = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (37)$$

В "классическом" пределе  $\ell_o \rightarrow 0 (M \rightarrow \infty)$  она вырождается в группу Цуанкаре (27). При этом вращения в  $(\mu^4)$  - плоскостях переходят в абелеву группу сдвигов (24). В дальнейшем мы будем использовать систему единиц, в которой

$$\hbar = c = \ell_o = M = 1. \quad (38)$$

Переход к "классическому" плоскому пределу будет означать, что рассматривается область импульсов

$$|P| \ll 1. \quad (39)$$

В единицах (38) 5-вращения в  $(\mu^4)$  - плоскостях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_r' &= P_r \pm b_r \left( P_4 \mp \frac{\rho b}{1 + b_4} \right) = (P(\pm)b)_r \\ P_4' &= P_4 b_4 \mp \rho b = (P(\pm)b)_4. \end{aligned} \quad (40)$$

<sup>х</sup>) Подобным образом определяется абсолютная механика, инвариантная относительно перехода от нерелятивистского евклидова пространства скоростей к релятивистскому пространству скоростей Лобачевского<sup>20</sup>.

Все 5-векторы  $P_M = (P_{\mu}, P_\nu)$ ,  $P'_M = (P'_{\mu}, P'_\nu)$ ,  $b_M = (b_\mu, b_\nu)$ , фигурирующие в (40), являются единичными, т.е. принадлежат поверхности (36). Из соотношений (40) непосредственно видно, что операция  $(\pm)$  для малых 4-импульсов действительно эквивалентна обычному параллельному переносу по правилу (24).

Легко убедиться, что 5-инвариант  $P_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + P_\nu q_\nu = P_L q_L$  может быть записан следующим образом:

$$P_L q_L = (P \cdot q)_L = \sqrt{1 - (P \cdot q)^2}. \quad (41)$$

Нетрудно проверить также, что для любого единичного 5-вектора  $P_L$  тождественно справедливо разложение:

$$P_L = (P^\perp (+) P'')_L, \quad (42)$$

где

$$P_L^\perp = (0, \vec{P}, \sqrt{1 + \vec{P}^2}), \quad P_L'' = \left( \frac{P_0}{\sqrt{1 + \vec{P}^2}}, \vec{0}, \frac{P_\nu}{\sqrt{1 + \vec{P}^2}} \right). \quad (43)$$

Таким образом, 5-вектор  $P_L$  возникает из 5-вектора  $P_L^\perp$  в результате поворота в (04) - плоскости. Поскольку эта плоскость евклидова (см. (36)), то естественно положить

$$\frac{P_0}{\sqrt{1 + \vec{P}^2}} = \sin \omega, \quad \frac{P_\nu}{\sqrt{1 + \vec{P}^2}} = \cos \omega. \quad (44)$$

Величины  $(\omega, \vec{P})$  являются ортогональными координатами в  $P$ -пространстве (36). Инвариантный элемент объёма в их терминах записывается особенно просто:

$$d\Omega_P = 2 \delta(P_L^2 - 1) d^3 P = d\omega d\vec{P}. \quad (45)$$

В "классическом" пределе, очевидно,

$$P_0 \approx \omega. \quad (46)$$

В  $P$  - пространстве де Ситтера существуют непосредственные аналоги соотношений (I7)-(I8). Введём в рассмотрение единичный 5-вектор

$$U_M^{(P_1, \dots, P_n)} = \left( \frac{(P_1 + \dots + P_n)_M}{\sqrt{(P_1 + \dots + P_n)^2 + (P_{14} + \dots + P_{n4})^2}}, \frac{P_{14} + \dots + P_{n4}}{\sqrt{(P_1 + \dots + P_n)^2 + (P_{14} + \dots + P_{n4})^2}} \right) \quad (47)$$

Легко видеть, что при преобразованиях (40) над каждым из векторов  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$P_i' = P_i (+) b \quad (48)$$

величина  $U^{(P_1, \dots, P_n)}$  преобразуется по тому же закону:

$$U^{(P_1', \dots, P_n')} = U^{(P_1, \dots, P_n)} (+) b. \quad (49)$$

Далее, используя (41), нетрудно показать, что

$$(P_1 + \dots + P_n)_M^2 = (P_1 + \dots + P_n)^2 + (P_{14} + \dots + P_{n4})^2 = n + \sum_{i \neq j}^n \sqrt{1 - (P_i \cdot P_j)^2}, \quad (50)$$

откуда следует, что в плоском пределе (39)

$$\sqrt{(P_1 + \dots + P_n)_M^2} \rightarrow n. \quad (51)$$

Таким образом,  $U$  - вектор (47) является прямым сбображением величины (I6) в духе геометрии де Ситтера.

Положим теперь (ср. (I7)):

$$P_1 = q_1 (+) U^{(P_1, \dots, P_n)}, \dots, P_n = q_n (+) U^{(P_1, \dots, P_n)}; \sum_{i=1}^n q_i = 0. \quad (52)$$

Тогда в полной аналогии с (I8) будем иметь:

$$d\Omega_{P_1} \dots d\Omega_{P_n} = \delta^{(4)}(U^{(q_1, \dots, q_n)}, 0) dq_1 \dots dq_n d\Omega_U^{(P_1, \dots, P_n)}, \quad (53)$$

где  $d\Omega_P$  - элемент объёма (45), а  $\delta$  - функция определяется соотношениями:

$$\delta^{(4)}(P_1, P_2) = \delta(w_1 - w_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \delta(P_{14} P_{24}) \delta^{(4)}(P_1 - P_2) \quad (54)$$

$$f(P_1) = \int \delta^{(4)}(P_1, P_2) f(P_2) d\Omega_{P_2}.$$

В случае  $n=2$  равенства (52) дают:

$$q_1 = p_2 \leftarrow U^{(p_1, p_2)} = \frac{\mu_2 p_1 - \mu_1 p_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

$$q_2 = p_1 \leftarrow U^{(p_1, p_2)} = \frac{\mu_1 p_2 - \mu_2 p_1}{\mu_1 + \mu_2} = -q_1, \quad (55)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} (p_1 + \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 + p_2)_M^2}), \quad \mu_2 = \frac{1}{2} (p_2 + \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 + p_2)_M^2})$$

В пределе малых импульсов отсюда имеем:  $q_1 = -q_2 \rightarrow (p_1 - p_2)/2$ . Поэтому величины (55) в новой схеме могут рассматриваться как аналоги относительных импульсов. Четырехмерные квадраты этих векторов являются 5-инвариантами:

$$q_1^2 = q_2^2 = \frac{1}{2} (1 - p_{1L} p_{2L}). \quad (56)$$

§ 3. Легко видеть, что гиперболоид (33) может быть погружен в  $p$  - пространство де Ситтера (36) лишь при соблюдении условия

$$m^2 \leq 1 \quad (57)$$

(в единицах (38)). Мы будем предполагать, что ограничение (57) всегда выполняется для масс тех объектов, которые описываются квантованными  $\varphi$ -полями<sup>x)</sup>. Тогда (33) эквивалентно соотношению

$$(p_4 - m_4)(p_4 + m_4) = 0, \quad (58)$$

где, по определению,  $m_4 \equiv \sqrt{1 - m^2} \vartheta$ . Поскольку на поверхности (36) каждому фиксированному значению  $p$  отвечают два отличающиеся лишь знаком значения  $p_4$ , то любая из скобок в (58) может обратиться в нуль:

$$p_4 - m_4 = 0; \quad (59a)$$

$$p_4 + m_4 = 0. \quad (59b)$$

<sup>x)</sup> Следуя М.А. Маркову<sup>21</sup>, частицы с массой равной фундаментальной массе  $M$  мы будем называть максимонами.

Сделаем важное физическое предположение: для свободного поля  $\Psi(p, p_4)$ , заданного в  $p$  - пространстве де Ситтера (36), выполняется лишь условие (59а). Другими словами,

$$2(p_4 - m_4) \Psi(p, p_4) = 0. \quad (60)$$

Множитель 2 здесь введён для того, чтобы в "классическом" пределе  $m, |p| \ll 1$  уравнение (60) точно переходило в (4а)<sup>х)</sup>.

Из (60) следует (ср. (4б)), что

$$\Psi(p, p_4) = \delta(2p_4 - 2m_4) \tilde{\Psi}(p, p_4), \quad (61)$$

где  $\tilde{\Psi}(p, p_4)$  - оператор, не имеющий сингулярностей на поверхности (59а).

Нам придётся рассматривать разложения различных величин теории по произведениям свободных  $\Psi$  - полей. При этом в соответствующих интегралах каждый оператор  $\Psi(p, p_4)$  будет появляться в сопровождении "своего" элемента объёма (45):

$$\int \dots d\Omega_p \Psi(p, p_4) \dots \quad (62)$$

(знаки многоточия здесь заменяют коэффициентные функции, все другие  $\Psi$  - операторы и элементы объёма). Принимая во внимание (61) и (45), выражение (62) можно преобразовать следующим образом:

х) Уравнение, основанное на равенстве (59б), формально не обладает правильным "классическим" пределом. Заметим, однако, что при оптимистическом отношении к развивающейся теории нельзя исключить возможность того, что состояния частиц с  $p_4 < 0$  могут иметь для новой схемы такое же фундаментальное значение, как, например, состояния с отрицательной энергией в теории электрона Дирака.

$$\int \dots d\Omega_p \Psi(p, p_4) \dots = \int \dots 2 \delta(p^2 - 1) d^5 p \delta(2p_4 - 2m_4) \tilde{\Psi}(p, m_4) \dots = \\ = \int \dots d^4 p \delta(p^2 - m^2) \tilde{\Psi}(p, m_4) \dots \quad (63)$$

В "классическом" случае вместо (62) мы бы имели с учётом (46):

$$\int \dots d^4 p \Psi(p) \dots = \int \dots d^4 p \delta(p^2 - m^2) \tilde{\Psi}(p) \dots \quad (64)$$

Сравнивая (64) и (63), заключаем, что на поверхности (33) должно выполняться равенство:

$$\tilde{\Psi}(p, m_4) = \tilde{\Psi}(p). \quad (65)$$

Подчеркнём, что между расширенными за поверхность (33) операторами  $\Psi(p)$  и  $\Psi(p, p_4)$  уже нет никакой связи, поскольку каждому расширению отвечает своя индивидуальная геометрия в  $p$  - пространстве. В частности, "классическое" поле  $\Psi(p)$  определено для всех значений  $p$ , а поле  $\Psi(p, p_4)$  может быть задано, в силу (36), лишь в области

$$p^2 \leq 1. \quad (66)$$

Соотношение (65) играет роль своеобразного "принципа соответствия". С его помощью можно установить, каким коммутационным соотношениям должны удовлетворять решения уравнения (2.9). Простые вычисления дают:

$$[\Psi(p_1, p_{24}), \Psi(p_2, p_{24})] = \overset{(4)}{\delta}(p_1, -p_2) \epsilon(p_2) \delta(2p_{24} - 2m_4) \tilde{\Psi}(p_2, m_4) \\ = \overset{(4)}{\delta}(p_1, -p_2) \mathcal{D}(p_2). \quad (67)$$

Без каких-либо принципиальных изменений в новую схему переходят понятия о нормальном произведении операторов поля и соот-

вествующая теорема Вика. При этом  $\mathcal{N}$  — произведение и нормальное спаривание двух операторов определяются соотношениями (ср. 19/):

$$\Psi(p_1, p_{14}) \Psi(p_2, p_{24}) = : \Psi(p_1, p_{14}) \Psi(p_2, p_{24}) : + \underline{\Psi(p_1, p_{14}) \Psi(p_2, p_{24})} \quad (68)$$

$$\underline{\Psi(p_1, p_{14}) \Psi(p_2, p_{24})} = \delta^{(4)}(p_1, -p_2) \theta(-p_1^0) \delta(2p_{14} - 2m_4) = \delta^{(4)}(p_1, -p_2) \mathcal{D}_{(p_1)}^{(4)} \quad (69)$$

Теперь по аналогии с (I) мы можем написать новую  $S$ -матрицу в виде ряда по нормальным произведениям операторов  $\Psi(p, p_4)$ , заданных в импульсном пространстве де Ситтера (36) и удовлетворяющих уравнению (60):

$$S = \sum_n \left( d\Omega_{p_1} \dots d\Omega_{p_n} S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4}) : \Psi(p_1, p_{14}) \dots \Psi(p_n, p_{n4}) : \right) \quad (70)$$

М.п., на которой определены к.ф  $S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4})$ , описывается системой уравнений

$$\begin{cases} (p_1 + \dots + p_n)_\mu = 0 & , \mu = 0, 1, 2, 3 \\ p_{14} = m_4, \dots, p_{n4} = m_4 & , \end{cases} \quad (71)$$

которая при соблюдении условия (57) полностью эквивалентна (5).

§ 4. Будем предполагать далее, что разложение (70) остаётся справедливым и при расширении  $S$ -матрицы за м.п. (71), т.е. и в том случае, когда операторы  $\Psi(p, p_4)$  уже не подчиняются урав-

нению (60) и 4-импульс  $P_\mu$  становится произвольным вектором пространства де Ситтера. Примем, по определению, что область, в которой задаются расширенные к.ф.  $S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4})$  • имеет вид:

$$\begin{cases} (p_1 + \dots + p_n)_\mu = 0, \mu = 0, 1, 2, 3 \\ p_1^2 + p_{14}^2 = 1, \dots, p_n^2 + p_{n4}^2 = 1 \end{cases} \quad (72)$$

(ср. с (35)).

Таким образом, в полной аналогии с (13) можно положить:

$$S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4}) = \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \delta'(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4}) \quad (73)$$

Следовательно, расширенная матрица рассеяния в нашей схеме инвариантна относительно преобразования вида

$$\Psi(p, p_4) \rightarrow e^{ipa} \Psi(p, p_4) \quad (74)$$

над  $\Psi$  - операторами.

Мы вправе рассматривать этот факт как проявление трансляционной инвариантности новой теории (требование II). При этом привлечение понятия конфигурационного пространства и преобразования сдвига в нём (формула (6)) не является логически необходимым. Важно лишь, что инвариантность относительно преобразований (74) гарантирует выполнение закона сохранения 4-импульса (ср. § 2). Сам оператор 4-импульса  $P_\mu$  может быть определён обычным образом (ср. (7)):

$$e^{ipa} \Psi(p, p_4) e^{-ipa} = e^{ipa} \Psi(p, p_4), \quad (75)$$

если предположить, что новое расширенное поле  $\Psi(p, p_4)$  удовлетворяет условию нейтральности (3):

$$\Psi(p, p_4)^+ = \Psi(-p, p_4) \quad (76)$$

Замечательно, что в новом формализме, как и в "классической" теории, величина  $S'$  в (73) может быть выражена через первоначальную к.ф.  $S_n$ , так что в итоге возникает тождество, представляющее собой непосредственное обобщение "классического" тождества (21) на случай  $p$  - пространства де Ситтера.\*

$$S_n(p_1, p_{1a}; \dots; p_n, p_{na}) = \delta^{(4)}(U^{(p_1, \dots, p_n)}, 0) \tilde{S}_n(p_1, p_{1a}; \dots; p_n, p_{na}) \quad (77)$$

где

$$\tilde{S}_n(p_1, p_{1a}; \dots; p_n, p_{na}) = \int dS_k S_n(p_1 + k, (p_1 + k)_a; \dots; (p_n + k), (p_n + k)_a) \quad (78)$$

Вывод тождества (77) почти дословно повторяет соответствующую процедуру в  $p$  - пространстве Минковского. При этом вместо равенств (17)-(18) используются их "кривые" аналоги (52)-(53).

Оказывается далее, что "тильдованная" к.ф. (78) инвариантна относительно группы де Ситтера (37). В силу (55)-(56) это позволяет считать её зависящей лишь от квадратов "кривых" относительных импульсов (ср. (28)).

Принципиально важным является то обстоятельство, что в применении к несвязным к.ф. тождество (77), подобно (21), обладает свойством факторизуемости (30).

\* Заметим, что из (47) и (54) следует равенство

$$\delta^{(4)}(U^{(p_1, \dots, p_n)}, 0) = \left| (p_1 + \dots + p_n)_L^2 \right|^{\frac{1}{2}} \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n)$$

Резюмируя содержание данного параграфа, мы можем утверждать следующее: требование трансляционной инвариантности  $\Pi$  и новый принцип расширения за м.п. полностью совместимы. Иначе говоря (см. § 2), требование  $\Pi$  в самом деле имеет абсолютный характер по отношению к тому, какая в  $\mathcal{P}$  — пространстве выбрана геометрия — Минковского или де Ситтера.

Нетрудно убедиться, что требования I, III-VI, которые в § 2 мы тоже определили как абсолютные, в терминах расширенной  $\mathcal{S}$ -матрицы (70) формулируются в принципе точно так же, как и в "классической" теории. Это позволяет, в частности, выразить к.ф.  $S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4})$  через вакуумные средние от радиационных операторов:

$$S_n(p_1, p_{14}; \dots; p_n, p_{n4}) = \frac{1}{n!} \langle 0 | \frac{\delta^n S}{\delta \Psi(p_1, p_{14}) \dots \delta \Psi(p_n, p_{n4})} S^\dagger | 0 \rangle, \quad (79)$$

по определению, функциональные производные  $\frac{\delta}{\delta \Psi}$  перестановочны, причём

$$\frac{\delta \Psi(p_1, p_{14})}{\delta \Psi(p_2, p_{24})} = \delta^{(4)}(p_1, p_2).$$

§ 5. Введём в рассмотрение оператор тока (ср. (10))

$$j(p, p_4) = i \frac{\delta S}{\delta \Psi(-p, p_4)} S^\dagger. \quad (80)$$

В силу унитарности расширенной  $\mathcal{S}$ -матрицы оператор (80) удовлетворяет условию нейтральности, аналогичному (76):

$$j(p, p_4)^\dagger = j(-p, p_4). \quad (81)$$

Кроме того, из-за перестановочности вариационных производных по  $\Psi$ -полям ток  $j(p, p_4)$  должен подчиняться "условию разрешимости" (ср. I0, II, I3):

$$\frac{\delta j(p_1, p_{14})}{\delta \Psi(-p_2, p_{24})} - \frac{\delta j(p_2, p_{24})}{\delta \Psi(-p_1, p_{14})} = i \left[ j(p_1, p_{14}), j(p_2, p_{24}) \right]. \quad (82)$$

Наконец, при преобразовании трансляции (75), учитывая инвариантность  $S$ , будем иметь:

$$e^{i p_a} j(p, p_4) e^{-i p_a} = e^{i p_a} j(p, p_4), \quad (83)$$

что совпадает с (75).

Оператор тока  $j(p, p_4)$ , очевидно, должен играть основную роль при формулировке условия причинности, адекватного новому способу расширения  $S$  - матрицы за м.п. При этом, однако, уже нельзя обойтись без введения в теорию конфигурационного представления. Положим

$$j(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle j(p, p_4) d\Omega_p \quad (84)$$

$$\varphi^{out}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle \Psi(p, p_4) d\Omega_p, \quad (85)$$

где  $\langle \xi | p, p_4 \rangle$  - базисные функции, с помощью которых осуществляется преобразование Фурье в  $p$  - пространстве (36). Эти величины являются собственными функциями оператора Казимира группы де Ситтера (37):

$$-\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial p_r} \left( g_{\mu\nu}^{-1} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial p_r} \right) \langle \xi | p, p_4 \rangle = \lambda \langle \xi | p, p_4 \rangle \quad (86)$$

( $g_{\mu\nu}$  - метрический тензор кривого 4-пространства (36);  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ ;  $\xi$  - полный набор наблюдаемых в новом конфигурационном представлении). Опуская детали (см. /2,3/), отметим только, что спектр  $\lambda$  в (86) соответствует максимально вырожденной серии унитарных представлений группы  $SO(2,3)/22/$  и состоит из двух

ветвей - дискретной и непрерывной:

$$\lambda = \begin{cases} L(L+3) & , L = -1, 0, 1, 2, \dots \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \Lambda^2 & , 0 < \Lambda < \infty. \end{cases} \quad (87a)$$

$$\lambda = \begin{cases} L(L+3) & , L = -1, 0, 1, 2, \dots \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \Lambda^2 & , 0 < \Lambda < \infty. \end{cases} \quad (87b)$$

В плоском пределе из (86) мы получаем задачу на собственные значения для оператора псевдоевклидова интервала  $(i \frac{\partial}{\partial p})^2 \mathbf{x}$ . При этом  $L$  - область переходит во временно-подобные интервалы, а  $\Lambda$  - область - в пространственно-подобные. Подчеркнём, что "световой конус" в спектре (87) однозначно выделить нельзя: эта поверхность возникает лишь после предельного перехода к плоскому случаю.

Базисные функции  $\langle \xi | p, p_4 \rangle$ , отвечающие спектру (87), могут быть записаны в релятивистски инвариантном виде:

$$\langle \xi_L | p, p_4 \rangle = (p_4 - i p N)^{-L-3}; N_\mu = (N_0, \vec{N}), N^2 = 1; \quad (88)$$

$$\langle \xi_\Lambda | p, p_4 \rangle = (p_4 + p N)^{-\frac{3}{2} + i \Lambda}; N_\mu = (N_0, \vec{N}), N^2 = -1, \quad (89)$$

причём функция (88) в соответствии с дискретным характером спектра (87a) является квадратично-интегрируемой в метрике (45).

В "классическом" пределе каждая из этих величин превращается в плоскую волну:

$$(p_4 - i p N)^{-L-3} \rightarrow e^{i L (N p)} = e^{i \xi p}, \xi_\mu = L N_\mu; \quad (90)$$

$$(p_4 + p N)^{-\frac{3}{2} + i \Lambda} \rightarrow e^{i \Lambda (N p)} = e^{i \xi p}, \xi_\mu = \Lambda N_\mu. \quad (91)$$

Нетрудно убедиться далее, что по переменным  $\xi_4 = (L, N)$  и  $\xi_\Lambda = (\Lambda, N)$  функции (88)-(89) удовлетворяют дифференциально-разностным уравнениям, представляющим собой своеобразное обобщение

x) Эта величина является оператором Казимира группы Пуанкаре (27).

ние четырехмерного уравнения Лапласа:

$$\left[ 2ch \frac{\partial}{\partial L} + \frac{3}{L+2} sh \frac{\partial}{\partial L} - \frac{e^{-i\frac{\partial}{\partial L}}}{(L+\frac{3}{2})(L+2)} \Delta^{(3)}_{(N)} \right] \langle \xi_L | p, p_4 \rangle = K_L \langle \xi_L | p, p_4 \rangle = \lambda_{p_4} \langle \xi_L | p, p_4 \rangle \quad (92)$$

$$\left[ 2ch i \frac{\partial}{\partial L} - \frac{3}{iL} sh i \frac{\partial}{\partial L} - \frac{e^{-i\frac{\partial}{\partial L}}}{iL(iL-\frac{1}{2})} \Delta^{(3)}_{(N)} \right] \langle \xi_L | p, p_4 \rangle = K_L \langle \xi_L | p, p_4 \rangle = \lambda_{p_4} \langle \xi_L | p, p_4 \rangle \quad (93)$$

Отсюда с помощью (60) и (85) находим, что свободное поле  $\Psi^{out}(\xi)$  подчиняется следующим уравнениям типа Клейна-Гордона:

$$(K_L - \lambda_{p_4}) \Psi^{out}(\xi_L) = 0, \quad (K_L - \lambda_{p_4}) \Psi^{out}(\xi_A) = 0. \quad (94)$$

В "классическом" пределе вместо (94) получаем обычное дифференциальное уравнение Клейна-Гордона.

§ 6. Применим теперь к каждой из величин  $j(p, p_4)$  и  $\Psi(p, p_4)$  сразу две операции – преобразование Фурье (84)–(85) с "плоскими волнами" (88)–(89) и преобразование сдвига (83) с параметром  $x$  :

$$\left( \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle e^{iP_X} \right) j(p, p_4) e^{-iP_X} d\Omega_p = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle e^{iP_X} \Psi(p, p_4) d\Omega_p = j_x(\xi) \quad (95)$$

$$\left( \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle e^{iP_X} \Psi(p, p_4) e^{-iP_X} d\Omega_p \right) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \langle \xi | p, p_4 \rangle e^{iP_X} \Psi(p, p_4) d\Omega_p = \Psi_x(\xi) \quad (96)$$

Операторы  $j_x(\xi)$  и  $\Psi_x(\xi)$ , определяемые соотношениями (95) и (96), реально зависят от двух переменных  $x$  и  $\xi$ , поскольку  $\langle \xi | p, p_4 \rangle$  и  $e^{iP_X}$  – различные математические объекты<sup>x)</sup>. Если над этими операторами совершить ещё одно преобразование сдвига (83) с параметром  $a$ , то полученный результат можно представить как сдвиг "индекса"  $x$  при фиксированном  $\xi$  :

$$e^{iPa} j_x(\xi) e^{-iPa} = j_{x+a}(\xi), \quad (98)$$

<sup>x)</sup> В "классической" пределе, разумеется,

$$j_x(\xi) = j(\xi + x), \quad \Psi_x(\xi) = \Psi(\xi + x). \quad (97)$$

$$e^{iP_a \text{cut}} \Psi_x(\xi) e^{-iP_a} = \Psi_{x+a}^{\text{out}}(\xi). \quad (99)$$

Инвариантность  $\xi$  при преобразованиях сдвига в соотношениях (98)–(99) наводит на мысль, что эта переменная может быть использована в новом аппарате как аналог "классической" относительной координаты  $x_1 - x_2$  или пропорциональной ей величины.

Рассмотрим в качестве примера два коммутационных соотношения для свободных  $\Psi$  – полей:

$$[\Psi_x^{\text{out}}(\xi), \Psi_x^{\text{out}}(0)], \quad (100)$$

$$[\Psi_x^{\text{cut}}(\xi), \Psi_x^{\text{cut}}(-\xi)], \quad (101)$$

где, по определению,

$$\Psi_x^{\text{out}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{iP_A} \Psi(p_1, p_2) d\Omega_P; \quad -\xi_L = (L, -N); \quad -\xi_A = (A, -N).$$

Принимая во внимание (67), легко установить, что оба коммутатора (100) и (101) не зависят от  $x$ , т.е. в силу (99) являются трансляционно-инвариантными. В явном виде

$$[\Psi_x^{\text{out}}(\xi), \Psi_x^{\text{out}}(0)] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \xi | p_1, p_2 \rangle \delta(p_0) \delta(2p_1 - 2m_1) d\Omega_P = \frac{1}{i} \mathcal{D}(\xi, 0) \quad (102)$$

$$[\Psi_x^{\text{out}}(\xi), \Psi_x^{\text{out}}(-\xi)] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \xi | p_1, p_2 \rangle^2 \delta(p_0) \delta(2p_1 - 2m_1) d\Omega_P = \frac{1}{i} \mathcal{D}(\xi, -\xi). \quad (103)$$

Сравнивая (102)–(103) с "классическим" коммутационным соотношением

$$[\Psi^{\text{cut}}(x_1), \Psi^{\text{cut}}(x_2)] = \frac{1}{i} \mathcal{D}(x_1 - x_2) \quad (104)$$

и учитывая (97), приходим к следующему выводу: в (102) новая переменная  $\xi$  играет роль относительной координаты  $x_1 - x_2$ , а в (103) эта переменная является обобщением величины  $\frac{x_1 - x_2}{2}$ .

Используя (89), нетрудно убедиться, что в "пространственно-подобной"  $\Lambda$ -области имеет место равенство:

$$\mathcal{D}(\xi_1, 0) = \mathcal{D}(\xi_1, -\xi_1) = 0. \quad (105)$$

Таким образом, коммутаторы (100)-(101) обладают своеобразным свойством локальности:

$$[\Psi_x^{\text{out}}(\xi), \Psi_x^{\text{out}}(0)] = 0, \text{ если } \xi = \xi_{\Lambda}, \quad x - \text{произв.} \quad (106)$$

$$[\Psi_x^{\text{out}}(\xi), \Psi_x^{\text{out}}(-\xi)] = 0, \text{ если } \xi = \xi_{\Lambda}, \quad x - \text{произв.} \quad (107)$$

Напомним, что в "классической" теории, как для свободных операторов, так и для операторов, описывающих взаимодействующие системы, в частности, оператора тока (II), условие локальности выглядит одинаково и сводится к равенству нулю соответствующего коммутатора вне светового конуса (см., например, (32)). Заманчиво предположить, что и в новой схеме одно из равенств (106)-(107) может быть взято за образец при формулировке условия локальности для оператора тока (95). Если отдать предпочтение соотношению (107), как более симметричному, то это предположение означает, что

$$[j_x(\xi), j_x(-\xi)] = 0, \text{ если } \xi = \xi_{\Lambda}, \quad x - \text{произв.} \quad (108)$$

Очевидно, условие локальности (108) является трансляционно-инвариантным, поскольку в нём при преобразовании (98) меняется лишь произвольный параметр  $x$ . Ясно также, что в "классическом" пределе равенство (108) совпадает с (32).

Наша следующая задача — построение аналога соотношения (31) в новой схеме. При этом мы отдаём себе отчёт в том, что обобщаем вовсе не принцип причинности "классической" теории со всеми его атрибутами (анализом причинно-следственных связей, процедурой измерений, филосовским толкованием и т.д.). Формулировка нового принципа причинности — дело будущего, если вообще имеет смысл сама постановка этого вопроса.

Сейчас наша цель состоит лишь в том, чтобы найти обобщение "уравнения движения" (31) для тока в терминах тех величин, которые

характерны для новой процедуры расширения.

Вначале выясним, что является аналогом временной  $\theta$ -функции в данном формализме. В связи с этим рассмотрим генераторы 5-вращений (40) в  $(^4)$ -плоскостях:

$$-i p_4 \frac{\partial}{\partial p_\mu} = \hat{\xi}^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (109)$$

Нулевая компонента 4-вектора  $\hat{\xi}^\mu$  в  $(\omega, \vec{p})$ -координатах равна  $\hat{\xi}^0 = -i \frac{\partial}{\partial \omega}$ . Отсюда, налагая условие периодичности по  $\omega$ , получаем, что в каждой лоренцевской системе отсчёта собственные значения оператора  $\hat{\xi}^0$  суть целые числа  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а соответствующие собственные функции имеют вид:

$$\langle n | \omega \rangle = e^{in\omega}. \quad (110)$$

Поскольку  $\hat{\xi}^0$  коммутирует с оператором Казимира группы  $SO(2,3)$ , то  $n$  можно включить в полный набор наблюдаемых  $\xi$  вместе с  $\lambda$ . В результате возникает ещё одна совокупность базисных функций<sup>(x)</sup>:  $\langle \lambda, n, \dots | p, p_4 \rangle$ . Привлекательной особенностью их по сравнению с (88)-(89) является простая зависимость от параметра  $\omega$ :

$$\langle \lambda, n, \dots | p, p_4 \rangle = \langle n | \omega \rangle \langle \lambda, n, \dots | \vec{p} \rangle = e^{in\omega} \langle \lambda, n, \dots | \vec{p} \rangle. \quad (III)$$

Дискретный параметр  $n$  мы будем называть "временем", поскольку в плоском пределе величина  $\hat{\xi}^0$  совпадает с оператором времени  $-i \frac{\partial}{\partial p_0}$  "классической" теории.

Замечательным свойством дискретного времени  $n$  является инвариантность его знака в представлениях группы  $SO(2,3)$ , отвечающих дискретной "времениподобной"  $\Lambda$ -области (87a)<sup>xx</sup>.

<sup>x)</sup> Многоточие в символе  $\langle \lambda, n, \dots | p, p_4 \rangle$  соответствует переменным, входящим в полный набор  $\xi$  помимо  $\lambda$  и  $n$ .

<sup>xx)</sup> Пределы изменения модуля  $n$  при этом определяются соотношением:  $|n| \geq L+3$ .

$$\frac{n}{|n|} = \text{invar} , \text{ если } \lambda = L(L+3). \quad (\text{II2})$$

Следовательно, по параметру  $n$  в  $L$  - области можно инвариантным образом упорядочивать действие операторов. Соответствующая "ступенчатая" функция, которую как раз мы искали, имеет вид<sup>x)</sup>

$$\Theta(n) = \frac{1}{4\pi i} \int \frac{e^{inw}}{t_2 w - i\varepsilon} dw = \begin{cases} 1 & , n > 0 \\ 0 & , n < 0. \end{cases} \quad (\text{II3})$$

Умножая далее  $\Theta(-N_0) = \Theta(-n)$  на локальный в смысле (108) коммутатор  $[j_x(\xi), j_x(-\xi)]$ , получаем аналог инвариантного опережающего коммутатора токов, фигурирующего в "классическом" соотношении (31):

$$\Theta(-N_0) [j_x(\xi), j_x(-\xi)]. \quad (\text{II4})$$

Вводя теперь в полной аналогии с (95)–(96) "билиокальную" вариационную производную

$$\left( \frac{\delta}{\delta \psi(\xi)} \right)_x \equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\Omega_p e^{-ipx} \langle -\xi | p, p_4 \rangle \frac{\delta}{\delta \psi(p, p_4)} \quad (\text{II5})$$

постулируем следующее "уравнение движения" для нового оператора тока  $j_x(\xi)$ :

$$\left( \frac{\delta}{\delta \psi(-\xi)} \right)_x j_x(\xi) = i \Theta(-N_0) [j_x(\xi), j_x(-\xi)] + \dots \quad (\text{II6})$$

Иногородиче здесь соответствует произволу, который может содержаться в произведении (II4), включая и неизвестное "затравочное" взаимодействие. Насколько широк этот произвол и насколько он сингулярен – принципиально важные вопросы для развиваемой теории (см. § I). Мы вернёмся к их обсуждению в § 9. А сейчас заметим, что соотношение (II6) несомненно удовлетворяет требованиям трансляционной и релятивистской инвариантности и в "классическом" пределе переходит в уравнение (31).

<sup>x)</sup>Разлагая функцию (88) по базису (III), легко убедиться, что в области (87a)  $\frac{n}{|n|} = \frac{N_0}{|N_0|}$ . Поэтому здесь  $\Theta(n) = \Theta(N_0)$ .

В силу (I08) и (II6)

$$\left( \frac{\delta}{\delta \psi(-\xi)} \right)_x j_x(\xi) = 0 \quad \text{для } \xi \geq 0, x\text{-произв.}, \quad (II7)$$

где символ  $\xi \geq 0$  нужно понимать следующим образом:

1) либо  $\xi = \xi_L = (L, N)$ , причём  $\frac{N_0}{|N_0|} > 0$ ,

2) либо  $\xi = \xi_N = (1, N)$ .

Очевидно, "классическим" пределом (II7) является условие причинности Боголюбова в канонической дифференциальной форме<sup>9-II/</sup>:

$$\frac{\delta j(\xi+x)}{\delta \psi(-\xi+x)} = 0 \quad \text{для } \xi \geq 0, x\text{-произв.} \quad (II8)$$

Здесь символ  $\xi \geq 0$  уже имеет "классический" смысл:

1) либо  $\xi^2 > 0$  и  $\xi_0 > 0$ , 2) либо  $\xi^2 < 0$ .

Из (II7) можно, в свою очередь, получить соотношения (I08) и (II6), если привлечь "условие разрешимости" (82).

§ 7. Положим

$$T_n \Psi^{\text{out}}(\xi_1) \Psi^{\text{out}}(\xi_2) = \theta(n_1 - n_2) \Psi^{\text{out}}(\xi_1) \Psi^{\text{out}}(\xi_2) + \theta(n_2 - n_1) \Psi^{\text{out}}(\xi_2) \Psi^{\text{out}}(\xi_1) \quad (II9)$$

Здесь  $\Psi^{\text{out}}(\xi)$  – оператор свободного поля, определяемый интегралом Фурье (85) с базисными функциями (III). Принимая во внимание (68)–(69) легко показать, что

$$T_n \Psi^{\text{out}}(\xi_1) \Psi^{\text{out}}(\xi_2) =: \Psi^{\text{out}}(\xi_1) \Psi^{\text{out}}(\xi_2) : + \overline{\Psi^{\text{out}}(\xi_1)} \Psi^{\text{out}}(\xi_2), \quad (I20)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\Psi^{\text{out}}(\xi_1)} \Psi^{\text{out}}(\xi_2) &= \theta(n_1 - n_2) \overline{\Psi^{\text{out}}(\xi_1)} \Psi^{\text{out}}(\xi_2) + \theta(n_2 - n_1) \overline{\Psi^{\text{out}}(\xi_2)} \Psi^{\text{out}}(\xi_1) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d\Omega_P \langle \xi_1 | P \rangle \frac{1}{2(p_4 - m_4 - i\varepsilon)} \langle \xi_2 | -P \rangle = \end{aligned} \quad (I21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dw d\vec{p} e^{i(n_1 - n_2)w} \langle n_1, \lambda_1, \dots | \vec{P} \rangle \frac{1}{2(\sqrt{1 + \vec{p}^2} c_0 + w - m_4 - i\varepsilon)} \langle n_2, \lambda_2, \dots | \vec{P} \rangle \\ &= \frac{1}{i} D^C(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

Таким образом, мы вправе интерпретировать величину

$$D^c(p) = \frac{1}{2(p_4 - m_4 - i\epsilon)} \quad (I22)$$

как пропагатор свободной частицы. Очевидно, (I22) является функцией Грина уравнения (60).

§ 8. Из вида пропагатора (I22) непосредственно вытекает, что 4-импульс любой виртуальной частицы должен удовлетворять ограничению (66). Это должно приводить к экспериментально проверяемым следствиям. В частности, ряд качественных предсказаний можно сделать для процесса однофотонной аннигиляции электрон-позитронной пары, рождения лептонных пар в глубонеупругих реакциях и т.п.

Мы используем здесь модифицированный пропагатор (I22) для получения эвристической нижней оценки на массу максимона  $M$ .

Как известно, из сравнения четырехфермionной формулировки теории слабых взаимодействий с формулировкой этой теории в терминах  $W$ -бозона возникает соотношение между фермиевской константой  $G$ , константой "полуслабого" (Лавского) взаимодействия  $g$  и статическим пределом пропагатора  $W$ -бозона:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = g^2 \lim_{p \rightarrow 0} D_w^c(p) = \frac{g^2}{m_w^2} \quad (I23)$$

Поскольку статический предел пропагатора (I22) при  $m = m_w$  равен<sup>x)</sup>

$$\lim_{p \rightarrow 0} D_w^c(p) = \frac{1}{2M^2(1 - \sqrt{1 - \frac{m_w^2}{M^2}})} \quad (I24)$$

то вместо (I23) будем иметь:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2M^2(1 - \sqrt{1 - \frac{m_w^2}{M^2}})} \quad (I25)$$

<sup>x)</sup> Спиновая структура при этом несущественна.

Отсюда вытекает, что

$$M \geq \frac{g}{G\sqrt{2}}. \quad (126)$$

Дальнейшая конкретизация оценки (126) может быть достигнута, например, в рамках моделей, претендующих на единное описание слабых и электромагнитных взаимодействий лептонов. В частности, согласно <sup>23/</sup>,  $\frac{g^2}{4\pi} = \frac{a}{8}$ , где  $a$  – постоянная тонкой структуры. Используя это равенство, находим из (126):

$$M \geq \sqrt{\frac{a\pi}{2\sqrt{2}G}} \simeq 26.5 \text{ ГэВ}; \quad l_0 \lesssim 0.7 \cdot 10^{-15} \text{ см}. \quad (127)$$

Оценки (127) выглядят как вполне разумные в свете сегодняшних экспериментальных данных. Принимая во внимание (125) и (127), легко установить следующий интервал возможных значений для массы  $W$  – бозона:

$$26.5 \text{ ГэВ} \leq m_W \leq 37.3 \text{ ГэВ}. \quad (128)$$

§ 9. В этом параграфе мы изложим некоторые результаты, полученные при исследовании проблемы умножения сингулярных обобщенных функций в данном подходе. Начнем с одномерного примера из обычной теории – произведения ступенчатой функции  $\theta(\xi^0)$  на функцию  $\delta(\xi^0)$ , являющегося хорошей иллюстрацией сути дела.

Поскольку  $\theta(\xi^0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{iE\xi^0}}{E - iE}$ , то формально  $\theta(\xi^0)\delta(\xi^0) = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{E - iE} \right\} \delta(\xi^0) = \infty \delta(\xi^0)$ .

Более общий подход с привлечением теории обобщенных функций дает:

$$\theta(\xi^0)\delta(\xi^0) = C \delta(\xi^0), \quad \text{где } C \text{ – произвольная постоянная.}$$

В новой схеме аналогом произведения  $\theta(\xi^0)\delta(\xi^0)$  является выражение  $\theta(n)\delta_{n,0}$ , где  $\theta(n)$  – ступенчатая функция (II3), а  $\delta_{n,0}$  – символ Кронекера. Следовательно,

$$\theta(n)\delta_{n,0} = \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dw}{t g \frac{w}{2} - iE} \right\} \delta_{n,0} = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{E - iE} \frac{1}{1 + E^2} \right\} \delta_{n,0} = \frac{1}{2} \delta_{n,0} \quad (129)$$

( $t_1 \frac{w}{2} = E$  — новая переменная интегрирования).

Вывод, который можно сделать из рассмотренного примера, состоит в следующем: функции  $\theta(n)$  и  $\delta_{n,0}$ , в отличие от своих непрерывных аналогов, являются обычными (не обобщенными!) функциями  $n$ , и их произведение строится совершенно однозначно.

Оказывается, что подобная ситуация имеет место и в более общем случае. Например, перестановочная функция (102) для частиц нулевой массы, как нетрудно убедиться прямым вычислением, даётся выражением:

$$D(\xi, 0) \Big|_{m=0} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(n) \frac{1}{l+2} \delta_{l,-1} ; \quad \varepsilon(n) = \theta(n) - \theta(-n), |n| > l+3; l=-1, 0, 1, 2, \dots$$

Соответственно, в "классическом" случае мы имели бы (130)

$$D(\xi) \Big|_{m=0} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(\xi^0) \delta(\xi^2). \quad (131)$$

Сопоставление формул (130) и (131) показывает, что первая из них имеет совершенно определённый математический смысл и может быть интерпретирована как обычное произведение обычных функций<sup>x)</sup>, в то время как вторая формула представляет собой типичный для "классической" теории поля пример умножения сингулярных обобщенных функций с совпадающими особенностями.

Следует ясно понимать, что появление в нашем формализме дискретных (квантованных) переменных  $l$  и  $n$  непосредственно связано с ограниченностью нового  $P$  — пространства во времениподобном направлении в смысле метрики де Ситтера. По той же причине "плоские волны" (88), отвечающие "времениподобной"  $l$  — области, являются квадратично интегрируемыми. Последнее обстоятельство будет играть

<sup>x)</sup> Аналогичное утверждение справедливо для функции  $D(\xi, 0)$  при  $m \neq 0$ , для всех остальных рассмотренных выше перестановочных функций и пропагаторов, а также для любых степеней и произведений этих величин.

важную роль в том примере, который мы рассмотрим ниже.

Пусть

$$J_x(\xi) = :(\Psi_x^{out}(\xi))^n: \quad (I32)$$

есть некий "бидекальный" токоподобный оператор, построенный из полей (96). В силу (I07), очевидно,

$$[J_x(\xi), J_x(-\xi)] = 0, \quad \text{если } \xi = \xi_L, x - \text{произв.} \quad (I33)$$

Ясно также (см. (98)), что  $\langle 0 | [J_x(\xi), J_x(-\xi)] | 0 \rangle = \langle 0 | [J(\xi), J(-\xi)] | 0 \rangle$ , где  $J(\xi) = :(\Psi(\xi))^n:$ .

Теперь рассмотрим интеграл

$$g(P) = i \int \langle \xi | P, P_4 \rangle \theta(N_0) \langle 0 | [J(\xi), J(-\xi)] | 0 \rangle \langle \xi | P, P_4 \rangle d\Omega_\xi, \quad (I34)$$

$$2(L+1)(L+2)(L+\frac{1}{2}) \delta(N+1) d^N.$$

где  $d\Omega_\xi = \frac{1}{(2L+1)^{1/2}} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{N+1} d^N N$  - "элемент объёма" конфигурационного  $\xi$ -пространства. В "классическом" пределе величина (I34) с точностью до постоянного множителя совпадает с реальной частью одночастичного пропагатора во 2-м порядке теории возмущений в модели со взаимодействием вида:  $\Psi^{n+1}(x) : (n \geq 2)$ . При этом соответствующий интеграл расходится, поскольку произведение обобщённых функций  $\theta(\xi)$  и  $\langle 0 | [J(\xi), J(-\xi)] | 0 \rangle$  из-за совпадения их сингулярностей в точке  $\xi = 0$  не является интегрируемым. В данном случае, благодаря условию локальности (I33), вклад в выражение (I34) вносит лишь  $L$ -область. Принимая во внимание квадратичную интегрируемость функций  $\langle \xi | P, P_4 \rangle$  в этой области, нетрудно показать, что интеграл (I34) абсолютно сходится<sup>3/</sup>.

Приведённые нами примеры, по-видимому, свидетельствуют о том, что расширение  $S$ -матрицы за м.п., опирающееся на  $P$ -пространство де Ситтера, действительно является менее сингулярным, чем "классическое" расширение, использующее плоское  $P$ -пространство Минковского. Теперь имеются основания ожидать, что и в уравнении движения (II6) произвольные дополнительные слагаемые в правой час-

ти, обозначенные многоточием, могут быть сведены до минимума. Большой удачей теории было бы однозначное самосогласованное определение указанных слагаемых, поскольку это в принципе позволило бы ответить на вопрос: какие взаимодействия между квантованными полями реально осуществляются в природе (ср. конец § I)?

§ 10. Вернемся к формулам (44) § 2, определяющим связь между координатами  $(p_0, \vec{p})$  и  $(\omega, \vec{p})$ . Каков физический смысл переменной  $\omega$ ?

Для свободных частиц  $p_0 = m_4$ , и поэтому из (44) следует, что  $p_0 = \sqrt{1 - m^2} \operatorname{tg} \omega$ ,  $\omega \leq \frac{\pi}{2}$ . В частности, для фотона

$$p_0 = \operatorname{tg} \omega, \quad \omega \leq \frac{\pi}{2}. \quad (I35)$$

Выясним вначале, какую размерность должна иметь величина  $\omega$ . В нормальных единицах дискретное время может быть представлено как  $\frac{\hbar}{c} n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому вместо (I10) получаем:  $\langle n | \omega \rangle = e^{\frac{i \hbar \omega}{c} n}$ . Таким образом,  $\omega$  можно присвоить размерность частоты. Следовательно, формула (I35) в нормальных единицах выглядит так:

$$p_0 = M c^2 \operatorname{tg} \frac{\hbar \omega}{M c^2}, \quad \omega \leq \frac{\pi M c^2}{2 \hbar} \quad (I36)$$

В "классическом" пределе отсюда находим (ср. (46))

$$p_0 = \hbar \omega, \quad (I37)$$

что совпадает с формулой Планка для световых квантов. Заманчиво предположить, что соотношение (I36) есть обобщение формулы Планка на всю область значений энергии  $p_0$ , адекватное тем идеям, которые лежат в основе нашего подхода. Угловую переменную  $\omega$  в (I36) при этом следует интерпретировать как частоту света<sup>x)</sup>.

<sup>x)</sup> Формулы (I36) и (I37) находятся примерно в таком же отношении друг к другу, как выражения для 3-импульса в терминах скорости в релятивистской и нерелятивистской теориях:

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \vec{p} = m \vec{v}.$$

Заметим, что частота не должна быть аддитивной сохраняющейся величиной. Таковой является лишь энергия. Однако в формуле Планка (I37) частота "случайно" обладает всеми свойствами энергии; в новой формуле (I36) эта "случайность" не имеет места.

Очевидно, связь между Э-импульсом и волновым вектором в данном формализме остаётся прежней:  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ . Отсюда и из (I36) получаем следующий "закон дисперсии" для света:

$$E_0 |\vec{k}| = \hbar \omega_0 \frac{c}{\lambda} \quad , \quad \omega_0 \leq \frac{\pi}{2} \frac{c}{\lambda} . \quad (I38)$$

Соотношение (I36) можно подвергнуть экспериментальной проверке, если независимо измерить энергию и частоту кванта в области ультравысоких частот. Однако предварительно необходимо сформулировать соответствующую измерительную процедуру, принимая во внимание то обстоятельство, что распространение сверхжёстких квантов описывается модифицированным пропагатором, являющимся функцией Грина дифференциально-разностного волнового уравнения (см. (I21) при  $m_4=1$ ).

§ II. Этот параграф мы посвящаем чисто эвристическим рассуждениям, цель которых - "перебросить мост" между нашим подходом и формализмом калибровочных теорий.

Рассмотрим в рамках обычной квантовой электродинамики группу калибровочных преобразований II рода:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x) &\rightarrow e^{i \epsilon \lambda(x)} \Psi_\alpha(x) \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 ; \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^\mu} \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 . \end{aligned} \quad (I39)$$

Как известно, требование инвариантности теории относительно преобразований (I39) приводит к "минимальному" электромагнитному взаимодействию.

Оказывается, однако, что для получения взаимодействия в минимальной форме нет необходимости рассматривать произвольные функции  $\lambda(x)$ , а достаточно ограничиться лишь линейными функциями вида

$$\lambda(x) = \lambda(0) + \omega_\mu x^\mu . \quad (I40)$$

Подставляя (140) в (139) и опуская множитель  $e^{\frac{i\omega}{c}x^\mu}$  (он отвечает калибровочному преобразованию I рода), будем иметь:

$$\Psi_d(x) \rightarrow e^{i\omega_d x^\mu} \Psi_d(x) \quad (\text{в } p\text{-пространстве: } \Psi_d(p) \rightarrow \Psi_d(p - e\omega), \text{ при } d = 1, 2, 3, 4) \quad (141a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \omega_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (141b)$$

Мы видим, что соотношения (141) можно интерпретировать как преобразования сдвига в  $p$ -пространстве Минковского, причём закон преобразования величины  $eA_\mu(x)$  совпадает с законом преобразования 4-вектора  $P_\mu$ .

При переходе к  $p$ -пространству де Ситтера формулы (141) модифицируются нетривиальным образом. Роль преобразований сдвига на вектор  $e\omega_\mu$  теперь играют 5-вращения в  $(M^4)$ -плоскостях с параметром  $e\omega_\mu$  (см. (40)). При этом компоненты спинора  $\Psi_d(p)$  уже перемешиваются между собой:

$$\Psi_d(p) \rightarrow S(e\omega)_d \Psi_d(p + e\omega). \quad (142)$$

Наиболее интересным моментом здесь является то, что при обобщении закона преобразования (141b) для электромагнитного поля мы вынуждены "дополнить" 4-вектор  $eA_\mu$  до 5-вектора  $A_M = (eA_\mu, A_5)$ . Если не вводить новых полей, то естественно предположить, что 5-вектор  $A_M$ , подобно 5-вектору  $P_M = (p_\mu, p_5)$ , принадлежит пространству де Ситтера (36). Тогда в теории возникает нелинейность, связанная с компонентой  $A_5 = \sqrt{1 - \frac{e^2 A^2}{M^2}}$  и ограничение Фона (66) на предельно допустимую величину поля:

$$e^2 A^2 \leq M^2. \quad (143)$$

И, наконец, последнее замечание. Оно относится к "классической" теории с плоским  $p$ -пространством. Как известно (см., например, /24/), при сдвигах (24), совершаемых в таком пространстве, возможны два закона преобразования спинора  $\Psi_d(p)$ . Одни из них есть  $\Psi_d \rightarrow \Psi_d(p - b)$ , что эквивалентно при  $b = e\omega$  соотношению (141a),

уже использованному нами в качестве калибровочного преобразования в электродинамике. Второй закон преобразования выглядит так:

$$\Psi_a(p) \rightarrow (e^{i\hat{x}^\mu b_\mu})_a \Psi_p(p-b), \quad a, \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (144)$$

где генератор  $\hat{x}^\mu$  пропорционален либо  $(V+A)$ , либо  $(V-A)$  - комбинации  $\gamma$  - матриц:  $\hat{x}^\mu = \text{const} \gamma^\mu \frac{(1 \pm i\gamma^5)}{\sqrt{2}}$ . Неизвестная постоянная должна быть универсальной и иметь размерность длины. Отождествим её с константой  $\sqrt{\frac{G}{\kappa c}}$ , где  $G$  - постоянная Ферми. Тогда преобразования (144) можно рассматривать на правах калибровочных преобразований в ряде вариантов теории слабых взаимодействий.

#### Литература:

1. Кадышевский В.Г., ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.
2. Кадышевский В.Г., Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны, статья в сборнике "Проблемы теоретической физики", посвященном памяти И.Е. Тамма, Москва, Наука, 1972 г.
3. Donkov A.D., Kadyshhevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. JINR, E2-6992, Dubna, 1973.
4. Wataghin G., Zs.Phys. 98, 92 (1934).
5. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, ОИЯИ, Р2-3590, Дубна, 1967.
6. Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля; Материалы II совещания по нелокальным теориям поля в Азазе, Дубна, 1970.
7. См. настоящий сборник.
8. Блохинцев Л.И., Пространство и время в микромире, Москва, Наука, 1970.
9. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, Москва, Гостехиздат, 1957.

I0. Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, Москва, Физматгиз, 1958.

II. Боголюбов Н.Н., Йогунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, Москва, Наука, 1969.

I2. Abdus Salam, Progress in Renormalization Theory Since 1949, Trieste preprint IC/73/2, 1973.

I3. Медведев Б.В., Павлов В.П., Поливанов М.К., Суханов А.Д., ТМФ, I3, 3, 1972.

I4. Snyder H., Phys.Rev. 71, 38 (1947); 72, 68 (1947).

I5. Yang C.N., Phys.Rev., 72, 874 (1947).

I6. Гольфанд Ю.А., ЖЭТФ, 37, 504 (1959), 43, 256 (1962), 44, I248 (1963).

I7. Кадышевский В.Г., ЖЭТФ, 41, I885 (1961), Докл. АН СССР I47, 588, I336 (1962).

I8. Мир-Касимов Р.М., ЖЭТФ, 49, 905, II6I (1965); 52, 533 (1967).

I9. Киржнич Д.А., Чечин В.А., ЯФ 7, 43I (1968).

20. Черников Н.А., НДНШ, физико-математические науки, 2, I58 (1958); труды Международной школы по теоретической физике, Дубна, 1964.

2I. Markov M.A., Suppl. of the Progress of Theor. Phys.

Commemoration Issue for 30-th anniversary of meson theory by Dr. H. Yukawa, p. 85, (1965).

22. Limic N., Niederle J., Raoska R., J.Math.Phys. 9, 1079 (1967).

23. Lee T.D., Phys.Rev.Lett. 26, 801 (1971).

24. Kadyshovskiy V.G., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N., Todorov I.T., Phys.Lett., 12, 182 (1965).

ПРИМЕНЕНИЕ СУПЕРПРОПАГАТОРНОГО МЕТОДА В  
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

М.К. Волков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

В настоящее время существует весьма обширная литература, посвященная исследованию квантовых теорий поля с неполиномиальными лагранжианами. Имеется большое число оригинальных исследований ( см., например, ссылки в работе <sup>I</sup> ), а также несколько обзоров по этой теме <sup>I-6</sup> . Каковы же итоги последней пятилетки в этой области физики? <sup>x</sup>.

Основным результатом, по нашему мнению, является разработка математического аппарата, позволяющего описывать в неренормируемых теориях поля низкоэнергетическое поведение частиц с учетом петлевых диаграмм Фейнмана. Расходящиеся интегралы регуляризуются способом, близким к методу аналитического продолжения по степеням пропагаторов, перенормировки физических величин становится конечными и выражаются в терминах констант связи.

В следующем параграфе мы покажем, что между методом регуляризации с использованием суперпропагаторной техники и хорошо известным методом регуляризации Паули-Вилларса можно обнаружить

<sup>x</sup> Первые корректные работы по интересующей нас теме появились еще в 1963 г. ( Г.В. Ефимов /7/, Е.С. Фрадкин /8/ ). Однако наиболее интенсивно эта область физики стала развиваться начиная с 1967 -1968 годов.

весма заметную аналогию. Регуляризованный суперпропагатор напоминает обычный пропагатор с бесконечным числом вычитаний, сделанных по Паули-Вилларсу. Только роль компенсирующих полей здесь играют вполне реальные диаграммы с двумя, тремя и т.д. внутренними линиями. Индифинитная метрика вносится с помощью введения параметра  $\gamma$  и устраняется на конечном этапе вычислений после перехода к пределу  $\gamma = 1$ . Условия унитарности  $S$ -матрицы не нарушаются при использовании этого метода.

Прежде всего мы покажем, как используется суперпропагаторный метод для получения конечных результатов в неренормируемых теориях на примере хорошо известной модели нейтральной псевдовекторной мезодинамики. Первая попытка описания этой модели с помощью метода, близкого по духу к суперпропагаторному подходу, принадлежит Окубо (1954 г.)<sup>9</sup> (см. также работу Арновита и Дезера<sup>10</sup>). Однако метод, предложенный Окубо, приводил к нарушению условия унитарности  $S$ -матрицы. Впервые корректные результаты с использованием интересующих нас методов в данной модели были получены в наших работах в 1967 г.<sup>11</sup> и в работе Н.Христа в 1969 г.<sup>12</sup>, а также в работах Б.А.Арбузова и А.Т.Филиппова<sup>13</sup> в 1967 г. с использованием несколько иного подхода.

В 1968 году появилась работа Т.Д.Ли, посвященная исследованию модели нейтрального слабого взаимодействия с векторным мезоном<sup>14</sup>. В этой работе был предложен метод "суммирования главных расходимостей". Нетрудно показать, что суперпропагаторный метод решает подобные проблемы на значительно более простом языке<sup>1,15</sup>.

В 1971 году А.Салам с сотрудниками использовал суперпропагаторную технику для построения конечной электродинамики с учетом нелинейного взаимодействия с гравитационным полем<sup>16</sup>. Сдвиг массы спинорной частицы в такой теории становится конечным и выражается через логарифм гравитационной константы связи.

Однако наиболее интересными, по нашему мнению, являются попытки описания взаимодействий квантовых полей, соответствующих кирально-симметричным лагранжианам. Суперпропагаторный подход позволяет получать низкоэнергетические поправки к так называемому приближению "древесных" диаграмм, учитывая вклады от петлевых диаграмм. Первые работы в этой области появились в 1970-1971 г.г.<sup>17</sup> В 1972 г. была опубликована серия работ Лемана, посвященная описание низкоэнергетических поправок, получаемых для ион-ионного рассеяния с использованием суперпропагаторного метода.<sup>18</sup> Тем самым наметилась весьма перспективная тенденция перехода от исследования более-менее абстрактных моделей с неполиномиальными лагранжианами к описанию реальных физических явлений.

Заглянувши несколько вперед, нам хотелось бы высказать надежду, на то, что использование кирально-инвариантных по форме лагранжианов взаимодействия, с одной стороны, и суперпропагаторной техникой, с другой стороны, позволит в недалеком будущем построить теорию поля с конечными перенормировками физических величин для сильных, а, возможно, также и для слабых взаимодействий.

## §2. Суперпропагатор

Суперпропагатор  $F(x)$  для случая взаимодействий безмассовых скалярных частиц имеет вид

$$F(x) = i \sum_{n=1}^{\infty} c(n) [ -i \Delta^0(x) ]^n, \quad (2.1)$$

где

$$\Delta^0(x) = -i [(2\pi)^2 (x^2 - i\epsilon)]^{-1/2} \quad (2.2)$$

а коэффициенты  $c(n)$  для экспоненциального взаимодействия частиц равны

$$C(n) = \frac{g^{2n}}{\Gamma(n+1)} . \quad (2.3)$$

$\Gamma(n+1)$  гамма-функция,  $g$  - константа связи. В импульсном пространстве суперпропагатор  $\tilde{F}(p)$  можно записать в форме<sup>1,19</sup>

$$\tilde{F}(p) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \tilde{F}_\gamma(p) . \quad (2.4)$$

$$\tilde{F}_\gamma(p) = \frac{i}{2(p^2 + \epsilon)} \int_{-0-i\infty}^{0+i\infty} dz \cos \gamma z \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)} C(z+1) \left[ \frac{p^2 + \epsilon}{(4\pi)^2} e^{-iz} \right]^z . \quad (2.5)$$

Для экспоненциального взаимодействия параметр  $\gamma$  следует выбрать большим четырех в представлении (2.5). Для перехода к пределу  $\gamma = 1$  необходимо использовать иное представление для  $\tilde{F}_\gamma(p)$  (например, тот же интеграл по  $z$ , но с контуром, идущим над и под реальной положительной осью и обходящим точку  $0$  слева). Представление (2.5) оказывается весьма полезным при вычислении интегралов по промежуточным импульсам в выражениях, соответствующих петлевым диаграммам Фейнмана. Введение параметра  $\gamma$  представляет собой промежуточную регуляризацию, имеющую некоторые сходные черты с регуляризацией Паули-Вилларса.

Чтобы сделать более явной эту аналогию, перепишем формулу (2.5) в следующей форме

$$\tilde{F}_\gamma(p) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_\gamma(M^2)}{M^2 - p^2 - \epsilon} , \quad (2.6)$$

где

$$\rho_\gamma(M^2) = \frac{C(1)}{\gamma} \delta(M^2) - \frac{2i}{(4\pi)^3} \int_{-0-i\infty}^{0+i\infty} dz \cos \gamma z \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)} C(z+1) \left( \frac{M^2}{(4\pi)^2} \right)^{z-1} . \quad (2.7)$$

Формулу (2.6) можно считать спектральным представлением для суперпропагатора  $\tilde{F}_Y(p)$ . Оно справедливо лишь при значениях параметра  $\gamma$ , больших четырех (в экспоненциальном случае).

Посмотрим теперь, как ведет себя спектральная функция  $\rho_Y(\mu^2)$  в зависимости от значений параметра  $\gamma$ .

При  $\gamma = 1$  она выражается через бесконечный знакопостоянный ряд, растущий экспоненциально при  $\mu^2 \rightarrow \infty$ . Это - бесконечная сумма фазовых объемов  $n$  - скалярных частиц, как то и следует из условия унитарности  $S$ -матрицы.

Однако при  $\gamma > 4$   $\rho_Y(\mu^2)$  становится экспоненциально убывающей функцией  $\mu^2$  при  $\mu^2 \rightarrow \infty$ . Бесконечный ряд, через который выражается теперь  $\rho_Y(\mu^2)$ , перестает быть знакопостоянным. Тем самым в спектральном представлении (2.6) как бы появляются состояния с индифинитной метрикой. Подобная же ситуация имеет место при введении компенсирующих полей в регуляризации Паули-Вилларса. Роль этих компенсирующих полей играют здесь диаграммы с двумя и больше, чем два, количеством внутренних линий. Выполнены здесь и соотношения, подобные тем, которым удовлетворяют коэффициенты при компенсирующих полях в регуляризации Паули-Вилларса

$$\int_0^\infty d\mu^2 \mu^{2n} \rho_Y(\mu^2) = 0, \quad (2.8)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда видно, что суперпропагатор в экспоненциальном случае может обладать весьма мощным регуляризующим свойством. А именно, при интегрировании по внутренним импульсам функция  $\tilde{F}_Y(p)$  может регуляризовать любую степенную

расходимость по импульсу  $P^2$  <sup>x</sup>.

В выражении (2.5) для суперпропагатора, вообще говоря, может содержаться неопределенная константа <sup>19</sup>. Однако для локализуемых взаимодействий эту константу можно фиксировать, привлекая, например, так называемый "принцип минимальных сингулярностей", предложенный Лемаюм и Полмайером <sup>20</sup>.

Покажем теперь, как с помощью суперпропагаторного метода можно получать корректные результаты в различных областях квантовой теории поля.

§3. Нейтральная псевдовекторная мезодинамика <sup>II-12</sup> и слабое взаимодействие нейтрального векторного мезона <sup>I4-15</sup>

Рассмотрим псевдовекторное взаимодействие скалярных безмассовых полей  $\varphi(x)$  с массовым спинорным полем  $\psi(x)$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(\psi, \varphi) - ig \cdot \bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \varphi(x); \quad (3.1)$$

Используя преобразование Дайсона для спинорного поля

$$\psi'(x) = \exp \{ -g \gamma^5 \varphi(x) \} \psi(x), \quad (3.2)$$

можно избавиться от производной в лагранжиане взаимодействия.

Тогда (3.1) принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(\psi', \varphi) - m \bar{\psi}'(x) [e^{-2g\gamma^5 \varphi(x)} - 1] \psi(x); \quad (3.3)$$

<sup>x</sup> Заметим, что, если коэффициенты  $C(n)$  отличаются от случая (2.3), и функция  $C(z)$  имеет особенности в левой полу-плоскости, регуляризующие свойства суперпропагатора  $\tilde{F}_\gamma(p)$  могут быть более ограниченными.

Здесь знак нормального произведения относится лишь к спинорным полям. Если в (3.3) знак нормального произведения распространить на все поля, то мы приходим к теории, в которой суперпропагаторные методы дают конечные перенормировки для всех физических величин.

Покажем это на примере вычисления поправки к массе спинорной частицы во втором "модифицированном" порядке по  $(mg)^2$ .

Спинорная функция Грина  $G(x, x')$  в двухвершинном приближении записывается в виде

$$G(x, x') = S^c(x - x') + m^2 \int \int d^4 y_1 d^4 y_2 S^c(x - y_1) S^c(y_1 - y_2) \times \\ \times \left[ \exp \{ -i(2y)^2 A^c(y_1, y_2) \} - 1 \right] S^c(y_2 - x'), \quad (3.4)$$

где  $S^c(x)$  и  $A^c(x)$  — спинорные и скалярные пропагаторы соответственно. В импульсном пространстве функция  $G$  можно записать в форме

$$\bar{G}(p) = \frac{1}{m \cdot \hat{p} - i\varepsilon} - \frac{1}{m \cdot \hat{p} - i\varepsilon} \Sigma(p) \frac{1}{m \cdot \hat{p} - i\varepsilon} \approx (m \cdot \Sigma(p) - \hat{p} - i\varepsilon)^{-1}. \quad (3.5)$$

Оператор  $\Sigma(p)$  равен

$$\Sigma(p) = -m^2 \int d^4 x e^{ipx} S^c(x) \left[ \exp \{ -i(2y)^2 A^c(x) \} - 1 \right]. \quad (3.6)$$

Используя представление (2.5), функцию  $\Sigma(p)$  можно переписать в следующем виде

х

Модифицированным порядком мы будем называть такой порядок по константе связи, в котором кроме указанных степеней константы связи могут содержаться еще и ее логарифмы.

$$\sum_y(p) = \frac{m^2 \alpha}{2\pi^2} \int_{-0-i\infty}^{0+i\infty} dz \operatorname{ctg} \pi z e^{-i\pi z} \alpha^z \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+2)} f(p, z), \quad (3.7)$$

где

$$f(p, z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} dq \frac{(m + \hat{p} - q)(q^2 + i\varepsilon)^{z-1}}{(p - q)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \alpha = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2. \quad (3.8)$$

При  $p^2 = m^2$  этот интеграл равен

$$f(p, z) = -i\pi^2 m^{2z} \frac{e^{i\pi z} \Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} \left( \frac{m}{z+1} + \frac{\hat{p}}{z+2} \right). \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.7), интегрируя по  $z$  и переходя к пределу  $z = 1$ , получаем

$$\sum(m^2) = m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha m^2)^n}{(n!)^2 (n-1)!} \left[ \ln \frac{1}{\alpha m^2} + 4\psi(1/2) + 2\psi(n+2) \right] + \\ + \hat{p} \Big|_{p^2=m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha m^2)^n}{(n+1)!(n-1)!} \left[ \ln \frac{1}{\alpha m^2} + 2\psi(1/2) + \psi(n+2) \right]. \quad (3.10)$$

Здесь  $\psi(n)$  - psi-функция Эйлера.

Нетрудно видеть, что поправка к массе спинорной частицы выражается через конечную величину. Во "втором" порядке по  $(mg)$  имеем

$$\frac{\Delta m}{m} = \alpha m^2 \left[ \frac{3}{2} \ln(\alpha m^2) - 2\psi(1) - 2\psi(2) - \frac{1}{2}\psi(3) \right]. \quad (3.11)$$

К сожалению, в реальной мезодинамике величина параметра  $(\alpha m^2)$  близка к единице. Хотя полное значение  $\sum(m^2)$  при  $\alpha m^2 \sim 1$  равно  $\sim 0,6m$ , т.е. дает вполне разумную поправку к массе нуклона, однако сама теория возмущений по  $(\alpha m^2)$  становится плохой. Поэтому рассмотренный пример имеет скорее модельный характер.

Иная ситуация имеет место в теории слабых взаимодействий, где константа связи  $G$  существенно меньше. Там "модифицированная" теория возмущений, получаемая суперпропагаторным методом,

строится по значительно более малому параметру разложения.

Покажем, как в теории слабых взаимодействий можно прийти

к неполиномиальному лагранжиану типа (3.3) (см. работы I, I4-I5).

Рассмотрим несохраняющее четность слабое взаимодействие нейтрального векторного мезона со спинорным полем

$$\mathcal{L}_{\theta_3}(x) = G : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\alpha + i \gamma^5 \beta) \psi(x) W_\mu(x) : . \quad (3.12)$$

Используя преобразование Штиkelьберга<sup>21</sup>

$$W_\mu(x) = \varphi_\mu(x) + m_W^{-1} \partial_\mu \theta(x), \quad (3.13)$$

где  $\theta(x)$  - скалярное поле, а  $\varphi_\mu(x)$  - векторное поле с пропагатором

$$A_{\mu\nu}^{(4)}(p) = \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2 - p^2 - i\epsilon} : \quad (3.14)$$

(спин-нулевая часть поля  $\varphi_\mu(x)$  имеет отрицательную метрику), можно выделить из (3.12) неперенормируемую часть взаимодействия. Она зализется в форме

$$\mathcal{L}_{\theta_3(\text{норм.})} = \frac{G}{m_W} : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\alpha + i \gamma^5 \beta) \psi(x) \partial_\mu \theta(x) . \quad (3.15)$$

Вновь используя преобразование Дайсона

$$\psi'(x) = \exp \left\{ -i G (\alpha + i \gamma^5 \beta) \frac{\theta(x)}{m_W} \right\} \psi(x), \quad (3.16)$$

снова приходим к взаимодействию типа (3.3), но уже с малой константой связи  $G$ . При описании этой неполиномиальной части взаимодействия вполне применима "модифицированная" теория возмущений, получаемая при использовании суперпропагаторной техники.

Оставшаяся часть взаимодействия приводит к ренормируемой теории, подобной электродинамике. Расходимости, которые возникают при работе с этой частью лагранжиана взаимодействия, можно устранить обычным методом, что приводит к перенормировке конечного количества наблюдаемых величин.

Наконец, в диаграммах смешанного типа, где одновременно присутствуют те и другие вершины, суперпропагаторы могут выступать в роли неких регуляризующих форм-факторов.

#### §4. Электродинамика с учетом гравитации I6

В 1970 году Саламом совместно с его сотрудниками был выпущен ряд работ, посвященных построению гравитационно-модифицированной электродинамики, приводящей к конечным перенормировкам наблюдаемых величин  $5,6,16$ . Это достигалось учетом нелинейности гравитационного взаимодействия и применением суперпропагаторных методов для вычисления различных физических величин.

В гравитационно-модифицированной электродинамике, в отличие от рассмотренных выше взаимодействий, мы встречаемся с целым рядом дополнительных трудностей. Это такие проблемы, как, например, проблема устранения замкнутых петель, возникающих в теории помимо обычных диаграмм Фейнмана из-за наличия производных в лагранжиане взаимодействия; проблема выбора лагранжиана в той или иной форме через посредство эквивалентных преобразований и введение нормального произведения в лагранжиан взаимодействия, а также проблема сохранения градиентной инвариантности теории, которая становится весьма нетривиальной при учете нелинейного взаимодействия с гравитационным полем.

Большинство из указанных вопросов пока еще остается открытыми. Однако некоторые заметные успехи в их разрешении наблюдаются. Из работ, выполненных в последнее время в этой области, наиболее интересной нам кажется работа Ишама, Салама и Стадли  $16$ . В этой работе авторы используют экспоненциальное тензорное представление для эйнштейновского метрического тензора  $g_{\alpha\beta}(x)$  и пытаются построить градиентно-инвариантную

электродинамику с конечными перенормировками.

Не вдаваясь в детали расчетов, мы постараемся в общих чертах продемонстрировать основной идея работы на примере вычисления поправки к массе электрона.

Гравитационно-модифицированный лагранжиан для квантовой электродинамики можно записать в форме

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{sp.}(x) - g^{MN} g^{\mu\nu} E_{MN} E_{\mu\nu} (4 \det h)^{-2} + \\ + \left[ i h^{M\alpha}(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\alpha (\partial_M - i e A_M) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right] (\det h)^{2M_p+2} . \quad (4.1)$$

Здесь  $h^{M\alpha}(x)$  - релятивистская тетрада, связанная с метрическим тензором соотношением

$$g_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\alpha}(x) h_{\beta\beta}(x) g^{\alpha\beta} . \quad (4.2)$$

В экспоненциальной параметризации она выражается через  $\exp\{\alpha \beta_{AB} h^{AB}(x)\}$ , где  $\beta_{AB}$  -  $4 \times 4$  псевдосимметричная матрица и  $h^{AB}(x)$  - тензорное квантовое поле гравитона.

$\partial_\mu$  - ковариантная производная,  $E_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

В работе <sup>16</sup> сначала находится градиентно-инвариантное выражение для двухточечной функции фотона в форме суперпропагатора и затем оно используется для вычисления электромагнитного сдвига массы электрона. Покажем схематически как это делается.

Массовый оператор электрона с учетом экспоненциального взаимодействия с гравитационным полем имеет вид

$$\Sigma(x) = -ie \int^n \mathcal{N}^c(x) \gamma_\mu \partial_\mu(x) \exp\{-i\alpha^2 \Delta_{sp.}^c(x)\} = \\ = \frac{e^2}{\alpha^2} \int^n \mathcal{N}^c(x) \gamma_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-i\alpha^2 \Delta_{sp.}^c(x)]^n}{n!} , \quad (4.3)$$

где  $S^c(x)$  - пропагатор электрона,  $g^{\mu\nu}D_\nu(x)$  - пропагатор фотона,  $\Delta_{\gamma\gamma}^c(x)$  - пропагатор гравитона,  $\Delta_\phi^c(x)$  - пропагатор скайдной безмассовой частицы. Вновь используя представление (2.5), в импульсном пространстве запишем для  $\tilde{\Sigma}(p)$  следующее выражение

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-0-i\infty}^{0+i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^{2z} \int_{-0-i\infty}^{0+i\infty} d\bar{q} \frac{(\bar{p} \cdot \bar{q} - 2m)(q^2 + i\epsilon)^{z-1}}{(\bar{p} \cdot \bar{q})^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.4)$$

Интеграл по  $d^4\bar{q}$  при  $\bar{p}^2 = m^2$  легко вычисляется,  $\gamma \rightarrow 1$ , после чего

$$\tilde{\Sigma}(p) = -i \frac{e^2 m}{16\pi} \int_L dz \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{(z+3)\left(\frac{zm}{4\pi}\right)^{2z}}{\Gamma^2(z+1)\Gamma(z+3)}. \quad (4.5)$$

$L$  - контур, окружающий реальную положительную ось.

Беря вычет в точке  $z=0$ , имеем

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \left( \frac{4\pi}{zm} \right)^2. \quad (\alpha = \frac{e^2}{4\pi}) \quad (4.6)$$

Это и есть основной результат, полученный Саламом с сотрудниками. Обычные логарифмически расходящееся выражение для  $\Delta m$  получается при стремлении  $z$  к нулю. Так как на самом деле  $\ln \left( \frac{4\pi}{zm} \right)^2 \sim 100$ , величина  $\frac{\Delta m}{m}$  меньше единицы.

## §5. Кирально-инвариантные лагранжианы

Как мы уже говорили, весьма перспективным, по нашему мнению, является применение суперпропагаторного метода к описанию полей с кирально-инвариантными лагранжианами. Здесь, как и в случае гравитационно-модифицированной электродинамики, помимо основной трудности, связанной с устранением ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля, существует целый ряд дополнитель-

ных проблем: возникновение замкнутых петель - "головастиков" - из-за наличия производных в лагранжиане взаимодействия<sup>22</sup> ; проблема выбора лагранжиана в той или иной кирально-симметричной форме и т.п. Оставляя в стороне обсуждение всех этих дополнительных проблем, мы хотим рассмотреть здесь в основном вопрос, связанный с получением конечных низкоэнергетических поправок к различным физическим процессам в однопетлевом приближении.

Прежде всего мы остановимся на обсуждении результатов, полученных в последнее время Леманом для описания  $\pi$ - $\pi$  - рассеяния при низких энергиях в киральных теориях<sup>18</sup>. Леман рассмотрел кирально-инвариантный лагранжиан в экспоненциальной параметризации. Одним из оснований для выбора лагранжиана в такой параметризации служит то обстоятельство, что лишь при такой форме нормально упорядоченный лагранжиан взаимодействия приводит к локализуемой микропричинной теории ( см. <sup>18</sup> ).

Классический кирально-инвариантный лагранжиан может быть записан в следующей форме<sup>18,23</sup> x

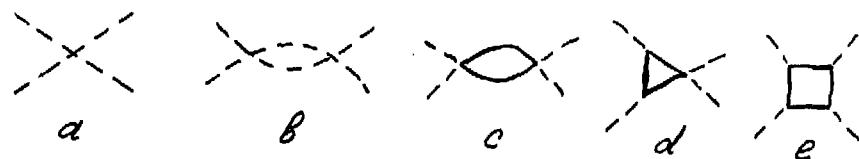
$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re} \left\{ \bar{\psi}_m e^{i2f_\pi \bar{\psi} \bar{\psi}} \partial^m e^{-i2f_\pi \bar{\psi} \bar{\psi}} \right\} + \\ + i\bar{\psi} \partial^1 \psi - M_\pi \bar{\psi} e^{-2f_\pi \bar{\psi} \bar{\psi}} \psi. \quad (5.1)$$

Обратим внимание на явное сходство последнего члена в (5.1) с лагранжианом (3.3), получившимся из псевдовекторного взаимодействия нуклонов с  $\pi$ - мезонами.

x Здесь не учтен еще псевдовекторный ток. Леман учитывает вклад от него с помощью перенормировки сильной константы связи.

Эквивалентным преобразованием спинорных полей можно заменить псевдоскалярную связь нуклон-мезонных полей на псевдовекторную в лагранжиане (5.1) <sup>23</sup>. Леман использовал для своих вычислений первый вариант связи.

Разлагая лагранжиан (5.1) по степеням поля  $\varphi$  и вводя нормальное упорядочивание, переходим к формулировке теории возмущений квантованных полей. Нас будет интересовать  $f_\pi^4$ -приближение. Это приближение вполне приемлемо для описания при малых энергиях членов не выше четвертой степени по импульсу пionов в амплитуде рассеяния. В данном приближении в амплитуду рассеяния будут давать вклад пять диаграмм (см. рис. I). В случае псевдоскалярной связи использование низкоэнергетических теорем позволяет определить однозначно вклады в



--- ПИОНЫ, — НУКЛОНЫ.

Рис. I

амплитуду рассеяния от нуклонных диаграмм  $c$ ,  $d$  и  $e$  при любой регуляризации расходящихся интегралов. Иная ситуация имеет место при вычислении вклада в амплитуду рассеяния от диаграммы  $b$ . Здесь лишь суперпропагаторный метод позволяет получить однозначный результат <sup>x</sup>. Поэтому на вычислении выражения, связанного с диаграммой  $b$ , мы здесь и остановимся.

x) Укажем, что при псевдовекторной связи нуклон-пционных полей вклад от диаграммы  $c$  следует вычислять, используя суперпропагаторный метод.

Записывая амплитуду рассеяния в обычной форме

$$T = \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} A(t, s, u) + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} A(u, t, s), \quad (5.2)$$

мы получаем следующие вклады от интересующих нас диаграмм:

$$A_{(a)} = 4 f \pi^2 \lambda^2, \quad (5.3)$$

$$A_{(b)} = - \frac{f \pi^4}{6 \pi^2} \left\{ 3 s^2 \ln \left[ \alpha_{15} (-s - i0) \right] + t(t - u) \ln \left[ \alpha_{25} (-t - i0) \right] + u(u - t) \ln \left[ \alpha_{25} (-u - i0) \right] \right\}. \quad (5.4)$$

Общий вклад от нуклонных петель равен

$$A_N = A_{(a)} + A_{(b)} + A_{(c)} = - \frac{4 f \pi^4}{3 \pi^2} (s^2 - t^2 - u^2). \quad (5.5)$$

Теперь наша задача заключается в определении неизвестных параметров  $\alpha_{15}$  и  $\alpha_{25}$ . Покажем, как они вычисляются.

Из лагранжиана (5.1) находим для  $\pi - \pi$  взаимодействия следующую формулу

$$L_{\pi\pi} = \frac{[(\vec{\phi} \partial_\mu \vec{\phi})^2 - \vec{\phi}^2 (\partial_\mu \vec{\phi})^2]}{2 \vec{\phi}^2} \left[ 1 - \frac{\kappa \pi^2 2 f \pi^2 \sqrt{\vec{\phi}^2}}{4 f \pi^2 \vec{\phi}^2} \right]. \quad (5.6)$$

Для матричного элемента в двухвершинном приближении с двумя свободными концами в каждой вершине получаем отсюда выражение

$$\begin{aligned} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle 12 | L_{\pi\pi}(x_1) L_{\pi\pi}(x_2) | 34 \rangle &= i \langle 12 | \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left[ E_1^C(x_1 - x_2) \vec{\phi}(x_1) \vec{\phi}(x_2) \right. \\ &\quad \left. + E_2^C(x_1 - x_2) (\vec{\phi}(x_1) \vec{\phi}(x_2))^2 + E_3^C(x_1 - x_2) (\partial_\mu \vec{\phi}(x_1) \partial^\mu \vec{\phi}(x_2)) \right] / (\vec{\phi}(x_1) \vec{\phi}(x_2)) \rangle_{(5.7)} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 iE_1^c &= \frac{32}{15} (2\pi f_\pi)^4 \sum_{n=0}^{\infty} (4f_\pi)^{4n} (-i\Delta^c)^{2n+4} \alpha^2(n)(2n+3)!(2n+2)(3n+5)(2n^2+4n+3), \\
 iE_2^c &= \frac{32}{15} (2\pi f_\pi)^4 \sum_{n=0}^{\infty} (4f_\pi)^{4n} (-i\Delta^c)^{2n+4} \alpha^2(n)(2n+3)!(2n+2)(2n^3+19n^2+38n+20), \\
 iE_3^c &= -\frac{8}{3} (2\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (4f_\pi)^{4n} (-i\Delta^c)^{2n+3} \alpha^2(n)(2n+2)!(2n+2)^2.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь

$$\alpha(n) = \frac{16(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)!} \tag{5.9}$$

Вновь используя представление (2.5), получаем в импульсном пространстве

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_1^c(q) &= -\frac{f_\pi^4}{15} \frac{1}{2\pi i} \int_L^0 dz \left( \frac{4f_\pi^2}{\pi^2} \right)^{2z} \left( \frac{-q^2-i0}{4} \right)^{2z+2} \frac{\alpha^2(z)(3z+5)(2z^2+4z+3)}{\Gamma(2z+2) \sin^2 \pi z}, \\
 \tilde{E}_2^c(q) &= -\frac{f_\pi^4}{15} \frac{1}{2\pi i} \int_L^0 dz \left( \frac{4f_\pi^2}{\pi^2} \right)^{2z} \left( \frac{-q^2-i0}{4} \right)^{2z+2} \frac{\alpha^2(z)(2z^3+19z^2+38z+20)}{\Gamma(2z+2) \sin^2 \pi z}, \\
 \tilde{E}_3^c(q) &= -\frac{f_\pi^4}{12} \frac{1}{2\pi i} \int_L^0 dz \left( \frac{4f_\pi^2}{\pi^2} \right)^{2z} \left( \frac{-q^2-i0}{4} \right)^{2z+1} \frac{\alpha^2(z)(2z+2)^2}{\Gamma(2z+2) \sin^2 \pi z}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Контур  $L$  окружает реальную полонительную ось, обходя точку нуль по часовой стрелке. В  $f_\pi^4$  - приближение дает вклад лишь вчет в точке  $z=0$ . Вычисляя его, приходим к результату

$$\begin{aligned}
 A_{f_\pi^4} &= -\frac{1}{6\pi^2} \left\{ 3s^2 \ln \left[ \frac{f_\pi^2}{\pi^2} (-s-i0) \right] + t(t-u) \ln \left[ \frac{f_\pi^2}{\pi^2} (-t-i0) \right] + \right. \\
 &+ u(u-t) \ln \left[ \frac{f_\pi^2}{\pi^2} (-u-i0) \right] + 2(s^2+t^2+u^2)(\alpha/10) + c - \frac{1}{20} \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь  $\alpha'(0) = \left. \frac{d\alpha(z)}{dz} \right|_{z=0}$  зависит от выбора кирального лагранжиана,  $C$  - константа Эйлера. Сравнение (5.11) с (5.4) приводит к следующим значениям для параметров  $\alpha_{1\pi}$  и  $\alpha_{2\pi}$

$$\alpha_{1\pi} = \alpha_{2\pi} = \frac{f_\pi^2}{\pi^2} \exp \left[ 3C - \frac{g_A^2}{20} \right]. \quad (5.12)$$

Следует заметить, что величина  $\alpha_{1\pi}$  оказывается зависящей от выбора кирального лагранжиана в той или иной форме. Здесь уместно заметить, что в работе Хонеркампа была сделана попытка построить кирально-инвариантный суперпропагатор <sup>24</sup>. Параметры  $\alpha_{1\pi}$ , вычисление в таком подходе, уже не будут зависеть от выбора лагранжиана.

Используя полученные значения для  $\alpha_{1\pi}$  и дополнительно учитывая перенормировку пин-нуклонных вершин, Леману удалось получить следующее выражение для массы  $\rho$  - мезона

$$m_\rho \approx 925 \text{ мэв}, \quad (5.13)$$

если  $f_\pi = \frac{1}{2F_\pi}$ , где  $F_\pi = 92$  мэв и  $g_A = 1,25$  ( $g_A f_\pi$  - перенормированный заряд пин-нуклонного взаимодействия). Главный вклад в поведение  $\rho$  - волн в его расчетах дают диаграмма  $\alpha$  и нуклонные диаграммы. Для описания поведения  $\rho$  - волн важен учет пиновой диаграммы  $\beta$ .

Заметим, что, на наш взгляд, было бы интересно учесть массы  $\bar{\pi}$  - мезонов в диаграмме  $\beta$ , используя, например, метод, предложенный в работе <sup>25</sup>, а также рассмотреть вариант псевдовекторной мезон-нуклонной связи, при которой известна точная форма перенормировки вершин, а вклад нуклонных петель включить суперпропагаторным методом. Эти расчеты мы надеемся провести в ближайшем будущем.

В качестве других приложений суперпропагаторного метода в теориях кирального типа мы приведем здесь примеры вычисления характерных диаграмм, дающих существенные вклады в поведение электромагнитных форм-факторов пionов и нуклонов и в разность масс  $\pi^+ - \pi^-$  мезонов.

Вводя градиентно-инвариантным образом электромагнитное взаимодействие в лагранжиан (5.1), приходим к форме

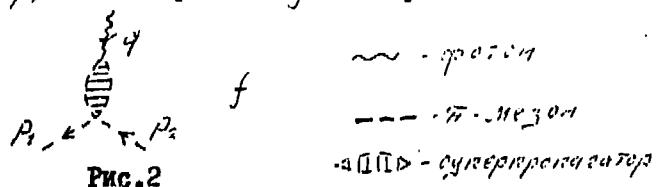
$$\mathcal{L}_{\pi A} = e \left[ (q_2^2 \partial^2 q_2 - q_1^2 \partial^2 q_1) A_{\mu} + \frac{e}{2} A_{\mu}^2 (q_1^2 + q_2^2) \right] \frac{m \omega^2 f_{\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{q_1^2 q_2^2} . \quad (5.14)$$

Используя лагранжианы (5.6) и (5.14) для вычисления матричного элемента, соответствующего диаграмме, изображенной на рис.2, получаем

$$\langle \pi^+ | W | \pi^+ \rangle = -i \frac{e}{2} \frac{\rho^{\mu\nu} A^{\nu}(q)}{(2\pi)^3 \omega_1 \omega_2} \Pi_{\mu\nu}(q) , \quad (5.15)$$

где  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $q = \rho_1 - \rho_2$ ,  $A^{\nu}(q)$  - внешнее электромагнитное поле,  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  - электромагнитный форм-фактор  $\pi$ -мезона.

Вклад в  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  от диаграммы  $f$  равен



$$\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q) = \int d^4x e^{i q x} \left[ \partial_{\mu} A^{\nu}(x) \partial_{\nu} A^{\mu}(x) - A^{\mu}(x) \partial_{\mu} \partial_{\nu} A^{\nu}(x) \right] G(x) , \quad (5.16)$$

где

$$G(x) = i \frac{4}{3F_{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} C(n) \left[ -i A^c(x) \right]^{2n} , \quad (5.17)$$

$$(f_{\pi} = (2F_{\pi})^{-1})$$

$$C(\kappa) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2\kappa} \frac{4(2\kappa+3)}{(2\kappa+1)(2\kappa+4)\Gamma(2\kappa+3)} . \quad (5.18)$$

Поскольку нас всегда будет интересовать лишь однопетлевое приближение, то диаграммы с 4-мя и более внутренними линиями нам интересны лишь с точки зрения их регуляризующих свойств. Поэтому мы будем считать, что пропагаторы, не входящие в  $G(x)$ , берутся в точной форме массивных пионных пропагаторов, а для пропагаторов из  $G(x)$  мы используем безмассовую форму, сохраняющую лишь вид главных особенностей массивных пропагаторов (см. работу <sup>25</sup>). В результате получаем следующее выражение для  $\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q)$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q) = -\frac{2}{3} \int_{-c-i\infty}^{c+i\infty} dz \frac{\cos qz}{\sin qz} \frac{C(z)}{(2\pi)^4 z} \Pi_{\mu\nu}(q, z) , \quad (5.19)$$

где

$$C(z) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2z} \frac{4(2z+3)}{(2z+1)(2z+4)\Gamma(2z+3)} . \quad (5.20)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q, z) = i \left(\frac{q+q_0}{q^2} - q_{\mu\nu}\right) \frac{m^{2+4z}}{(4\pi)^2 z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^k \frac{1/(k+2z+3) \Gamma(k+2z+1) \Gamma(k+2z) \Gamma(k+2z-1)}{(k+1) \Gamma(k+2) \Gamma(2k-4z+2)} \quad (5.21)$$

$$+ A_{\mu\nu}^{\epsilon}(q, z)$$

$$A_{\mu\nu}^{\epsilon}(q, z) = ig_{\mu\nu} \frac{3m^{2+4z}}{(4\pi)^2 z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^k \frac{1/(k+2z+2) \Gamma(k+2z+1) \Gamma(k+2z) \Gamma(k+2z-1)}{k \Gamma(k+2) \Gamma(2k-4z+2)} \quad (5.22)$$

Здесь  $A_{\mu\nu}^{\epsilon}(q, z)$  - градиентно-ненвариантный член, который не будет давать вклада в однопетлевое приближение, если, следя Саламу <sup>16</sup>, ввести множитель  $\left(\frac{z}{z+\epsilon}\right)^2$ , и к пределу  $\epsilon=0$  переходить в конце вычислений (обсуждение подобной процедуры см. в работе Салама <sup>16</sup>).

Чтобы вычислить  $\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q)$  в однопетлевом приближении достаточно в интеграле (5.19) взять вычет только в точке  $z=c$ .

$$(5.23) \quad \frac{1}{f_{\pi^0}}(q) = \frac{q_u q_v - g_{\pi\pi} q^2}{3(3\pi F_\pi)^2} \left[ 4 \ln\left(\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi}\right) + 6c - \frac{13}{6} \right] -$$

$$- \frac{m^2}{3(2\pi F_\pi)^2} \left( \frac{q_u q_v}{q^2} - g_{\pi\pi} \right) \left[ 1 + \frac{q^2}{3m^2} + \sqrt{\frac{4m^2}{q^2} \left( 1 - \frac{q^2}{4m^2} \right)} \operatorname{arctg} \left( \frac{4m^2}{q^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Первый член в (5.23) дает вклад в квадратичный радиус  $\bar{\pi}$ -мезона. Оставшаяся часть при малых энергиях пропорциональна  $q^4/m^4$  и описывает энергетическое поведение пионного форм-фактора при малых  $q^2$ . При  $q^2 = 4m^2$  здесь появляется минимум, поскольку начинается разрез в плоскости  $q^2$ . Если просуммировать цепочку, состоящую из диаграммы типа  $f$ , то можно получить  $\bar{\pi}$ -мезонный резонанс со значением массы  $m_p \sim 960$  Мэв.

Скажем еще несколько слов по поводу вычисления разности масс  $\bar{\pi}^0$ - и  $\bar{\pi}^+$ -мезонов. Существенный вклад в разность масс этих частиц дает следующая диаграмма (см. рис.3)

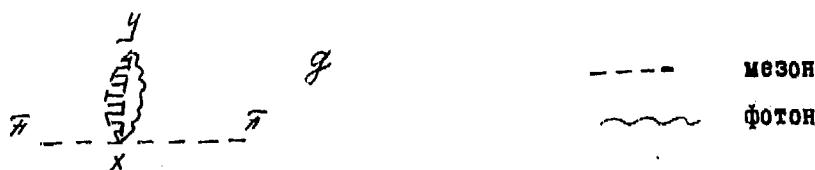


Рис.3

суперпропагатор

<sup>x)</sup> Заметим, что учет в  $f_{\pi^0}(q)$  в том же порядке по  $F_\pi$  треугольной нуклонной диаграммы, дает значение для  $m_p = 730$  Мэв.

Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, равен

$$\mathcal{D} = \frac{4^3 \epsilon^2}{\omega \epsilon (2\pi)^3 15 \pi^2} \int \int \int dx^i dy^i \langle \bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi} \psi(y) \rangle_c [\partial^{\mu} A^{\nu}(x-y) \partial^{\nu} A^{\mu}(x-y) - A^{\mu}(x-y) \partial^{\nu} \partial^{\mu} A^{\nu}(x-y)] G(x-y), \quad (5.24)$$

где

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -i \frac{4}{\pi^2} A^{\mu}(x) \right]^{2n} \frac{5+2n}{(2n+4) \Gamma(2n+3)}. \quad (5.25)$$

Выбирая фотонный пропагатор в калибровке Ландау, можно перенести одну производную во втором члене (5.24) на свободный мезонный пропагатор и привести выражение (5.24) к виду

$$\mathcal{D} = \frac{174^3 \epsilon^2}{(2\pi)^3 \omega 15 \pi^2} \int dx^i \bar{\psi} \psi(x) \epsilon^{\mu\nu} A^{\nu}(x) \epsilon^{\mu\nu} A^{\nu}(x) \bar{G}(x), \quad (5.26)$$

где

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -i \frac{4}{\pi^2} A^{\mu}(x) \right]^{2n} \frac{5+2n}{(2n+4) \Gamma(2n+3)}, \quad (5.27)$$

а  $\bar{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(x)$  - фотонный пропагатор. Представляя  $\bar{G}(x)$  в интегральной форме

$$\bar{G}_j(x) = \frac{i}{2} \int_{-i-\infty}^{i-\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{5+2z}{(2z+4)\Gamma(2z+2)} \left[ -i \frac{4}{z} \Delta^4 x \right]^{2z}, \quad (5.28)$$

где параметр  $\gamma > 2$ , можно сделать сходящимся интеграл по  $\Delta^4 x$ . Переходя к евклидовой метрике и вычисля интеграл по углам, получаем

$$\varphi = \frac{\sqrt{17}}{(2\pi)^3} \frac{e^2 m^4}{20175 \pi^6 \gamma^2} \int_{-i-\infty}^{i-\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{(5+2z)(\pi^2/16z^2)}{(2z+4)\Gamma(2z+2)} \psi(z). \quad (5.29)$$

Здесь функцию  $\psi(z)$  удобно разделить на две части. Одна из них  $\psi_1(z)$  соответствует части  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$ , содержащей  $g_{\mu\nu}$ , а  $\psi_2(z)$  соответствует продольной части  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$ .

Тогда

$$\psi_2(z) = \int_0^z \frac{dz'}{z'} K_2^2(z') \left( \frac{K_1(z')}{z'} \right)^{2z}. \quad (5.30)$$

$K_1(z)$  - функция Кельвина. Основной вклад в интеграл (5.29) дает вычет в точке  $z = -1$ . Этот вычет обязан своим происхождением полюсу функции  $\psi_2(z)$  при  $z = -1$ . Если разбить область интегрирования в (5.30) на две части, то полюс у функции  $\psi_2(z)$  будет лишь в той части, где содержится точка  $0$ .

$$\psi_2''(z) = \int_0^z \frac{dz'}{z'} K_2^2(z') \left( \frac{K_1(z')}{z'} \right)^{2z} \quad (5.31)$$

Оценивая этот интеграл при малых значениях  $z$ , получаем

$$\varphi_1''(z) = - \frac{e^{-i/(z+1)}}{z+1} \quad (5.32)$$

Теперь подставим это выражение в (5.29) и вычислим вычет в точке  $z = -1$  ( $\gamma = 1$ )

$$F_{\pi^0\pi^0\pi^0} = \frac{1/\pi}{(2\pi)^3} \frac{e^{2\pi i}}{5\omega} \quad (5.33)$$

Подобным же образом вычисляется и остальная часть  $\mathcal{D}$ .

Вычитая из этого выражения вклад от  $\pi^0$ -мезона, равный половине  $\mathcal{D}$ , получаем для разности масс  $\pi^0 \pi^0$  мезонов следующее значение, связанное с учетом только диаграммы  $\mathcal{G}$

$$\Delta m \approx 1 \text{ Мэв.} \quad (5.34)$$

Это составляет приблизительно четверть истинного значения, равного 4,6 Мэв. Учет других диаграмм должен улучшить этот результат.

На этом мы заканчиваем обзор различных приложений суперпропагаторного метода в квантовой теории поля.

## §6. Заключение

Рассмотренные здесь примеры показывают, что суперпропагаторный метод обладает весьма универсальными качествами и применим в самых разнообразных областях квантовой теории поля. В мезодинамике, электродинамике, в теории слабых взаимодействий и для описания кирально-симметричных взаимодействий с успехом можно использовать этот метод, что приводит к теориям с конеч-

<sup>х</sup>Заметим, что разность масс  $\pi^0$ -мезонов вычислялась суперпропагаторным методом в работе <sup>26</sup>. Но, к сожалению, вычисления там проведены не совсем корректно.

ными перенормировками физических величин. Конечно, трудности, связанные, например, со слабой сходимостью ряда теории возмущений при описании сильных взаимодействий, остаются. Однако при малых энергиях теорию возмущений все же можно использовать и получать вполне корректные поправки, например, для процессов рассеяния частиц (см. <sup>18</sup>).

Особенно перспективным, как уже было отмечено, мы считаем приложение суперпропагаторного метода к теориям кирального типа. В любую вершину, содержащую  $\pi$ -мезонные или нуклонные линии, можно ввести нелинейное  $\pi$ -мезонное взаимодействие кирального типа, дающее как бы конкретный вид "мезонного обла-ка", и с его помощью, используя суперпропагаторный метод, регуляризовать ультрафиолетовые расходимости в петлевых диаграммах. Это на новом языке осуществляет старую программу описания "одетых" частиц.

### Литература

1. М.К.Волков, ЭЧАЯ т.2, вып.1, 33, 1971; Fortschr. Physik 19, 757 (1971).
2. Д.И.Блохинцев. Препринт ОИЯИ Р2-4941 Дубна (1970).
3. G.V.Efimov Preprint CERN-Geneva TH-1087 (1969)
4. "Нелинейные, нелокальные и перенормируемые теории поля", Препринт ОИЯИ 2-540 Дубна (1970).
5. A.Salam Preprint ICTP IC/71/3 (1971).
6. "Nonpolynomial Lagrangians, Renormalization and Gravity" N.Y. 1971
7. Г.В.Ефимов, ЖЭТФ 44, 2107 (1963),

8.E.S.Fradkin, Nucl.Phys. 49, 624 (1963)

9.S.Okubo, Progr. Theor. Phys. II, 80 (1954).

10. R.Arnowit, S.Deser, Phys.Rev. 100, 349 (1955).

11. М.К.Волков, И.Ф. 6, 1100 (1967); 7, 448 (1968), Препринт ИТФ 69-60, КИСБ (1969).

12.N.Christ, Phys.Rev. D5, 2486 (1972).

13. Б.А.Арбузов, А.Т.Филиппов, И.Ф. 8, 365 (1968); Б.А.Арбузов, А.И.Атакишин, А.Т.Филиппов, Препринт ОИИМ №2-3610 Дубна (1967).

14. T.D.Lee, Nuovo Cim. 59, 579 (1968).

15.Q.Shafi, Preprint ICTP (69) 22 London (1970); P.K. Mitter Preprint, University of Oxford (1970)

16.C.J.Isham, A.Salam and J.Strathdee, Phys.Rev.D3, 1805 (1971); Preprint ICTP IC /71/ 14 (1971)

17.A.P.Hant, K.Koller and G.Shafi, Imperial College, London, preprint ICTP 69/19 (1970); A.Salam, J.Strathdee, Phys.Rev. D1, 3296 (1970), B.W.Keck and J.C. Taylor, Phys.Rev., D3, 1846 (1971)

18.H.Lehmann and H.Trüte, Nucl.Phys. 52, 280 (1973); H.Lehmann, Preprint DESY 72/33; Phys.Lett. 51B, 529 (1972)

19.M.K.Volkov, Ann.Phys.(N.Y.) 49, 202 (1968)

20.H.Lehmann and K.Pohlmeyer, Comm.Math.Phys. 20, 101 (1971)

21.Stueckelberg E.C.G. Helv.Phys.Acta 11, 225 (1936)

22.B.S.De-Witt, J.Math.Phys. 3, 1073 (1962);  
L.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys.Letters 25B, 29 (1967)  
E.S.Fradkin and I.V.Tytin, Preprint IC/70/1 (1970)  
J.Honerkamp and K.Meetz, Phys.Rev. D3, 1996 (1971)

23.P.Chang and F.Gursey, Phys.Rev. 164, 1752 (1967)

24.G.Ecker and J.Honerkamp Nucl.Phys. 52, 211 (1973),  
Preprint CERN TH-1559 (1972)

25.М.К.Волков ТИФ 6, 21 (1971)

26.А.Н. Иванов Я.Ф. 15, 108 (1972)

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ЭИКОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Б.М. Барбашов, В.В. Несторенко

Объединенный институт ядерных исследований

Почти все без исключения методы, которые являются современным "рабочим инструментом" физиков при анализе адронных взаимодействий (дисперсионные соотношения, полюса Редже, дуальные модели, оптическая модель и т.д.), проходят проверку или же находят своё обоснование в рамках лагранжевого подхода в теории поля. Одно из свойств систем, рассматриваемых в квантовой теории поля (КТП), — это наличие бесконечного числа степеней свободы и поэтому адекватным математическим аппаратом для описания таких систем является метод функционалов<sup>1</sup>, который вместе с тем предоставляет кардинальный выход за рамки теории возмущений в лагранжевом формализме<sup>2-8</sup>.

Компактная запись решений уравнений квантовой теории поля через функциональные интегралы оказывается полезной для многих приложений<sup>9-13</sup>. Эффективность этого подхода в таких направлениях, как квантование полей Янга-Милса, построение квантовой теории гравитации, была продемонстрирована в работах<sup>14</sup>.

В рамках функционального метода предпринимаются попытки получить приближенные решения уравнений квантовой теории поля в тех или иных упрощающих предположениях. В этой связи следует отметить работы<sup>15-17</sup> по исследованию функций Грина и амплитуды рассеяния в инфракрасной области с помощью приближённых оценок функциональных интегралов. Эти работы дали возможность в последнее время распространить метод функционального интегрирования на исследование высокoenергетических процессов в теории поля.

В работах <sup>7,8</sup> была предложена приближённая аппроксимация функциональных интегралов (приближение прямолинейных путей), приводящая к эйкональному описанию рассеяния в области больших энергий и фиксированных передач. Обоснование эйконального представления амплитуды рассеяния в квантовой теории поля имеет не только самостоятельный интерес, но является важным ещё и по следующей причине. Для описания высокозенергетических адронных взаимодействий предлагаются различные полупhenоменологические модели, например, оптическая модель <sup>18</sup>, "кальпельная" модель Чу и Янга <sup>19</sup>, редже-эйкональная модель, предложенная Арнольдом <sup>20</sup>, и т.д. Эти модели берут за основу эйкональное представление амплитуды рассеяния

$$f(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{p}{2\pi^2} \int d^2 b e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{b}_1} (e^{i\chi(b, s)} - 1), \quad (I)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{p}', \vec{p})|^2,$$

где  $\vec{b}_1$  – двухмерный вектор, перпендикулярный направлению столкновения (прицельный параметр). С помощью эйкональных моделей удается воспроизвести основные черты высокозенергетических процессов <sup>21</sup>.

Представление амплитуды высокозенергетического рассеяния в эйкональной форме (I) является весьма общим в том случае, что оно не базируется на конкретном механизме взаимодействия и легко получается переходом от суммирования к интегрированию при учёте вкладов от больших моментов в обычном разложении амплитуды по перциельным волнам <sup>22</sup>. Вся динамика процесса в эйкональных моделях должна быть введена путём задания конкретного вида фазы  $\chi$  как функции прицельного параметра  $b$  и энергии  $s$ .

Если процесс рассеяния можно считать потенциальным и вид потенциала известен или же подбирается феноменологически, то, как было показано Мольэром <sup>23</sup>, эйкональная фаза  $\chi$  определяется соотношением:

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dz V(\sqrt{\beta^2 + z^2}). \quad (2)$$

В этом случае амплитуда рассеяния в форме (1) с эйкональной фазой (2) является просто приближенным решением уравнения Шредингера в высокозергетической области<sup>24</sup>.

При рассмотрении адронных взаимодействий эйкональная фаза в различных моделях связывается с различными характеристиками адрона. Так, например, в "капельной" модели Чу к Янга<sup>19</sup> стаживающиеся частицы рассматриваются как пространственно протяжённые объекты, адронные плотности которых описываются функциями  $\rho(\vec{z}_i)$  ( $i=1,2$ ) и эйкональная фаза даётся выражением

$$f(\beta) = \iint d\vec{z}_1 d\vec{z}_2 \rho(\vec{z}_1) K(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \rho(\vec{z}_2), \quad (3)$$

где  $K(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  - функция, описывающая механизм взаимодействия. При контактном взаимодействии  $K(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \sim \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2)$ , а в случае обмена виртуальными частицами  $K(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  заменяется соответствующим пропагатором этих частиц. Практически при анализе экспериментальных данных  $\rho(\vec{z}_i)$  отождествляются с электромагнитными форм-факторами рассеивавшихся адронов. Как будет показано в дальнейшем, такие модели могут быть получены в квантовой теории поля путём суммирования определённого класса диаграмм.

### I. Эйкональное представление амплитуды рассеяния для некоторых видов взаимодействия в теории поля

Прежде чем переходить к непосредственному исследованию высокозергетических процессов функциональным методом, кратко изложим основные моменты этого метода.

В функциональном подходе исходят из представления функций Грина через функциональные интегралы. Амплитуды рассеяния связаны с

соответствующими функциями Грина, хорошо известными редукционными формулами 8. Например, в случае нуклон-нуклонного рассеяния в скалярной модели  $\varphi \Psi \Psi \Psi$  имеем:

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) T(q_1, q_2; p_1, p_2) = \\ & = \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} \tilde{\chi}^2 \prod_{i=1}^2 (p_i^2 - m^2) (q_i^2 - m^2) \tilde{G}(q_1, q_2; p_1, p_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tilde{\chi}$  - константа перенормировки поля  $\Psi$ . Чертка у двухчастичной функции Грина  $\tilde{G}$  в формуле (4) означает, что вклад несвязанных диаграмм, описывающих независимо действующие нуклоны, вычен.

Квантовая функция Грина поля  $\Psi$  получается путем функционального уравнения 8 "классических" функций Грина

$$G(y_1, y_2; x_1, x_2) = \epsilon^2 C_\varphi \int_x^\infty \prod_i d\varphi(x) \exp \left\{ \frac{\epsilon}{2} \int \varphi(x) (\Box - m^2) \varphi(x) dx \right\}, \quad (5)$$

$$\cdot [G(y_1, x_1/\varphi) G(y_2, x_2/\varphi) + G(y_1, x_2/\varphi) G(y_2, x_1/\varphi)] \cdot \\ \cdot S_0(\varphi) \langle 0 | S | 0 \rangle^{-1}.$$

$G(x, y/\varphi)$  и  $S_0(\varphi)$  в формуле (5) представляет собой, соответственно, одночастичную функцию Грина нуклона во внешнем поле  $\varphi(x)$  и среднее значение  $\delta$ -матрицы по вакууму поля  $\Psi$  в классическом поле  $\varphi$ .  $G(x, y/\varphi)$  удовлетворяет уравнению:

$$(\Box_x - m^2 + g \varphi(x)) G(x, y/\varphi) = - \delta^{(4)}(x - y). \quad (6)$$

В дальнейшем будет использоваться запись решения уравнения (6) с помощью формализма собственного времени и функционального интегрирования по нуклонным траекториям 16

$$\begin{aligned} G(x, y/\varphi) = & \epsilon \int\limits_{\tau}^{\infty} d\tau e^{-im\tau} C_\varphi \int_1^\infty \prod_i d\varphi(\eta) \exp \left\{ -\epsilon \int_0^\tau \varphi(\eta) d\eta \right\} + \\ & + \epsilon g \int_0^\infty d\zeta \left\{ \varphi(x - 2 \int_0^\zeta \varphi(\eta) d\eta) \right\} \delta^{(4)}(x - y - 2 \int_0^\zeta \varphi(\eta) d\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

Если учсть, что  $\langle 0 | S | 0 \rangle = C_\varphi \int \prod d\varphi(x) S_0(\varphi)$ , где  
 $S_0(\varphi) = \exp \left\{ g \int d\lambda \int d^4x G(x, x/\lambda \varphi) \varphi(x) \right\}$ , (8)

то, подставляя (7) в (5), получаем замкнутое выражение для двухчастичной функции Грина.

Однако функциональные интегралы по  $d\varphi(x)$  и  $d\varphi(y)$  точно не берутся, и дальнейшее исследование возможно лишь в рамках приближенного вычисления функциональных квадратур.

Одним из таких приближений является пренебрежение вкладом от поляризации нуклонного вакуума, описываемой диаграммами с замкнутыми нуклонными линиями (множитель  $S_0(\varphi)$  в формуле (5)). Если положить  $S_0(\varphi) = 1$ , то функциональное интегрирование по  $d\varphi(x)$  в (5) легко выполняется, так как возникают гауссовые квадратуры.

Переход к импульским переменным в функции  $\bar{G}(x_1, x_2; y_1, y_2)$

$$\bar{G}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \int \prod_{i=1}^2 dx_i dy_i e^{-i p_i x_i + i q_i y_i} G(y_1, y_2; x_1, x_2)$$

и последующие несложные замены переменных интегрирования  $x_i \rightarrow y_i$ , а также функциональных переменных  $y_i \rightarrow \psi_i$  (см. <sup>7</sup>) позволяют выделить поле у функции  $\bar{G}(q_1, q_2; p_1, p_2)$ , которые соответствуют рассеивающим частицам до и после взаимодействия. В результате для амплитуды рассеяния, согласно формуле (4), получаем следующее выражение:

$$T(q_1, q_2; p_1, p_2) = g^2 \int d^4 b e^{i(q_1 - p_2) b} D^c(b) \cdot \quad \quad \quad (8)$$

$$\cdot \prod_{i=1}^2 \left( C_\psi \int d^4 \psi_i \exp \left\{ -i \int \psi_i^2 d\eta + i \frac{g^2}{2} j_i \cdot D^c j_i \right\} \right) \int d\lambda \exp \left\{ i \lambda j_1 \cdot D^c j_2 \right\},$$

где введена сокращенная запись

$$j_i \cdot D^c j_i = \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 j_i(x_1) D^c e_{i-2} j_i(x_2), \\ (i, \kappa = 1, 2).$$

$j_i(z)$  представляет собой классический ток нуклона, движущегося по траектории, которая задается начальным и конечным импульсами ( $p_i$  и  $q_i$  соответственно), относительной координатой  $x_i - x_c = \xi$  и функциональной переменной  $2 \int_{\eta}^{\xi} q_i d\eta$ , описываемой отклонение от прямолинейного пути<sup>x)</sup> (см. рис. I):

$$j_i(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \delta^{(4)} \left\{ z - x_c - 2 \int_0^{\xi} \nu_i(\eta) d\eta - 2 \xi [p_i \theta(\xi) + q_i \theta(\xi)] \right\}, \quad (9)$$

$(i = 1, 2).$

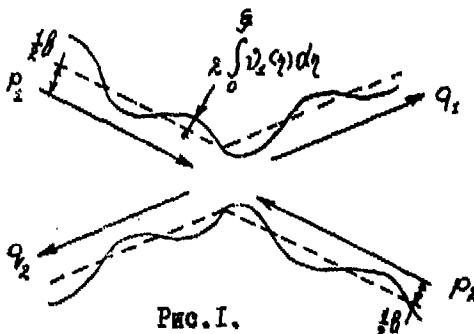


Рис. I.

При разложении (8) в ряд по  $\delta^{(2)}$  функциональные интегралы по  $d\nu_i(\eta)$  вычисляются точно и получается выражение, соответствующее диаграммам (рис. 2)

x) В действительности  $j(z)$  является классическим током точечного нуклона только при векторном обмене. В этом случае  $j(z)$  имеет вид:

$$j_i(z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi [ \nu_i(\xi) + p_i \theta(\xi) + q_i \theta(\xi) ] \delta^{(4)} \left\{ z - x_c - 2 \int_0^{\xi} q_i d\eta - 2 \xi [p_i \theta(\xi) + q_i \theta(\xi)] \right\}.$$

В скалярной модели  $j(z)$  описывает пространственную плотность "нуклона", движущегося по классической траектории. Однако в обоих случаях  $j(z)$  будем называть током.



Рис.2.

Интересно отметить, что здесь возникает замкнутое выражение для этой суммы диаграмм данного порядка по  $q^2$  в компактной форме одного многократного интеграла по фейнмановским параметрам /25/

$$T_{n+1} = \left[ \frac{1}{(2\pi)^n} \right] \frac{(i q^2)^{n+1}}{(n+1)!} \int \prod_{i=1}^n d\alpha_i \prod_{j=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_j dy_j \int d^2 k_j \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \alpha_i (K_i^2 - \mu_i^2) + i \alpha_{n+1} \left[ (P_2 - q_1 + \sum_{j=1}^n K_j)^2 - \mu^2 \right] + \right. \\ + i \sum_{i=1}^n (i x_i + i y_i) K_i^2 + 2i \sum_{i < j} K_i K_j C_{ij} (\alpha_i, x_j, y_j, y_i) + \\ \left. + 2i \sum_{j=1}^n K_j [x_j (P_2 \theta(x_j) + q_1 \theta(x_j)) - y_j (P_2 \theta(y_j) + q_2 \theta(y_j))] \right\}, \quad (10)$$

где

$$C_{ij} (\alpha_i, x_j, y_i, y_j) = 2(x_i, x_j) + 2(y_i, y_j),$$

$$\Sigma (x_1, x_2) = x_1 \theta(x_1) + x_2 \theta(x_2) - x_1 \theta(x_1 - x_2) - x_2 \theta(x_2 - x_1),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При получении формулы (10) разлагалась в ряд лишь последняя экспонента в (8), которая соответствует обменным мезонам на диаграммах рис.2. Неучитываемые множители  $\exp \left\{ i \frac{q^2}{2} j \cdot D^0 \cdot f_\sigma \right\}$  ( $\sigma = 1, 2$ ) определяют вклад радиационных поправок к куплонным линиям. После выполнения в (10) интегрирования по виртуальным импульсам  $d^2 k_j$  получим:

$$T_{n+1} = \frac{(i q^2)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(4\pi)^{2n}} \prod_{k=1}^{n+1} \int_0^\infty d\alpha_k \int_{-\infty}^\infty \prod_{j=1}^n dx_j dy_j \frac{C_n(\alpha, x, y)}{C_n^2(\alpha, x, y)} \exp \left\{ i \frac{D_n(s, t, x, y)}{C_n(\alpha, x, y)} \right\} \quad (II)$$

Здесь  $D_n(s, t, \alpha, x, y)$  и  $C_n(s, x, y)$  - детерминанты Чихольма<sup>26</sup> квадратичной формы по  $\kappa_i$ , стоящей в показателе экспонента в формуле (10). Параметры  $\alpha$  относятся к мезонным линиям, а параметры  $x_i, y_i$  сопоставляются нуклонным пропагаторам. Правила Фейнмана дают интегральное представление для каждой отдельной диаграммы теории возмущений. С помощью функционального подхода вся сумма лестничных диаграмм данного порядка по  $g^2$  записана в виде одиночного многократного интеграла (II). Эта запись оказывается полезной при исследовании высокозергетического поведения такой суммы диаграмм<sup>25</sup>.

Вернемся к представлению амплитуды рассеяния через функциональные интегралы (8). На этом примере продемонстрируем приближенную оценку функциональных интегралов в высокозергетической области (приближение прямолинейных путей или зиканельское приближение).

Интегрирование по функциональным переменным  $\mathcal{V}_i, c_i$  ( $i=1, 2$ ) в (8) осуществляет суммирование вкладов, которые вносят в амплитуду рассеяния все возможные траектории взаимодействующих нуклонов<sup>8</sup>.

Предполагается, что при высокозергетическом рассеянии вперед  $S = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$ ,  $t = (p_1 - q_1)^2 = \text{const}$  для каждого фиксированного значения относительной координаты  $x_1 - x_2$  из всех возможных траекторий нуклонов (волнистые линии на рис. I) основной вклад дает прямолинейные пути (пунктирные линии на рис. I), задаваемые направлением импульсов нуклонов до и после рассеяния<sup>77</sup>. Это означает, что в рассматриваемой кинематической области можно спустить в нуклонных токах (9) функциональные переменные  $\mathcal{V}_i, c_i$ , описывающие отклонение от прямолинейных траекторий. На языке диаграмм Фейнмана такое приближение приводит к линеаризации нуклонных пропагаторов по импульсам виртуальных мезонов, то есть к замене:

$$[(p + \sum \kappa_i)^2 - m^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow (2p \sum \kappa_i)^{\frac{1}{2}}, \quad (I2)$$

где  $P$  - импульс одного из рассеивающихся куклонов,  $K_i$  - импульсы виртуальных мезонов. Однако более удовлетворительной с точки зрения оходимости фейнмановских интегралов является аппроксимация пропагаторов, охранившая  $K_i^2$ :

$$[(P + \sum K_i)^2 - m^2]^{-1} \rightarrow (2P \sum K_i + \sum K_i^2)^{-1}.$$

Таким образом, предполагается, что произведения  $P K_i$  эффективно более важны в высокозергетической области, чем  $K_i K_j (i \neq j)$ .

В функциональном подходе это соответствует следующему приближенному вычислению континуальных интегралов<sup>16</sup>

$$C_\nu \int \prod_q d^4 q \exp \left\{ -i \int_a^b \nu^k(q) d\eta + F[\nu] \right\} \approx \exp \{ \langle F \rangle \}, \quad (13)$$

где

$$\langle F \rangle = C_\nu \int \prod_q d^4 q \exp \left\{ -i \int_a^b \nu^k(q) d\eta \right\} F[\nu].$$

Приближение получило название приближения прямолинейных путей<sup>8</sup> или эйконального.

В потенциальном рассеянии эйкональное приближение также приводится к модификации пропагаторов в данном случае неуплотнительных. При этом соответствующие формулы полностью аналогичны заменам (12), (13).

Вычисление функциональных интегралов в формуле (8) с помощью приближения прямолинейных путей приводит в высокозергетической области к эйкональному представлению суммы обобщенных лестничных драграмм<sup>7,8,27</sup>:

$$T(s, t) = -2is e^{-atl} \int d^4 \theta e^{i(P_2 - q_0) \theta} (e^{i f(\theta, s)} - 1), \quad (14)$$

где

$$a = \frac{q^2}{3(2\pi)^2 m^2} \left( \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right).$$

При обмене скалярными частицами вакуальная фаза  $\chi$  оказывается равной

$$\chi(b, s) = \frac{g^2}{8\pi^2 s} \int \frac{dk^2 e^{ikb}}{k^2 + m^2} = \frac{g^2}{4\pi s} K_0(bm), \quad (15)$$

а в модели с векторными мезонами

$$\chi(b) = \frac{g^2}{2\pi} K_0(bm),$$

где  $K_0$  - функция Кельвина нулевого порядка.

Радиационные поправки к пуклонным линиям на рис.2 приводят к множителю  $e^{-a|t|}$  в (14). Фаза  $\chi$  (15) соответствует потенциальному взаимодействию пуклонами, убывающему с энергией в скалярном случае  $V(s, S) = -\frac{g^2}{8\pi s} \frac{e^{-m^2}}{2}$  и не зависящему от энергии в векторной модели  $V(s) = -\frac{g^2}{4\pi} e^{-m^2}/2$ .

Как следует отсюда, более реалистичной оказывается модель с векторным обменом, которая приводит к полному сечению, стремящемуся к константе при  $S \rightarrow \infty$ . В случае скалярной модели  $\sigma^t$  оказывается убывающим как  $\frac{1}{S}$  и доминирует лишь борновский член.

В обоих случаях фазы получается чисто действительными и, следовательно, влияние неупругого рассеяния в рассматриваемом приближении не учитывается.  $\sigma^{in} = 0$ .

Учет собственно энергетических вставок в мезонные линии из диаграмм рис.2 может быть осуществлен заменой свободной функции распространения  $D^c$  в (3) на полную функцию Грина  $D^{c'}$ . Однако было показано<sup>28</sup>, что такой учет не приводит к изменению энергетической зависимости в вакуальной фазе и соответствующий потенциал остается по-

х) Амплитуда  $T$  в системе центра масс нормирована условием:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|T(s, t)|^2}{64\pi^2 s}, \quad \sigma^{tot} = \frac{1}{2\rho\sqrt{s}} \operatorname{Im} T(s, t=0).$$

прежнему действительным и сингулярным в вуле. Последнее утверждение следует из того факта, что замена  $D^c$  на  $D^{c'}$  не улучшает сходимости интеграла по  $d^4k$  в выражении  $\int j_1 \cdot D^c j_2$ , приводящем к ейко-нальной фазе. (Известно, что полная функция Грика  $D^c(k)$  убывает при больших  $k$ , по крайней мере, не быстрее  $D^c(k)$ ). Тот же класс диаграмм (рис.2) рассмотрен в другой кинематической области

$S \sim |t| \rightarrow \infty$  29 (высоконергетическое рассеяние на больших углах).

В этом случае выражения вида:  $\exp\left\{ -\frac{q^2}{2} j_1 \cdot D^c j_2 \right\}$  ( $c=1,2$ ) в формуле (8) приводят к появлению в амплитуде формфакторов рассеивавшихся частиц (высота  $e^{-a|t|}$  в (15) ):

$$T(s, t) = -24s [\Phi(t)]^2 \int d^4k e^{i(p_1 - q_1) \cdot k} (e^{-a|t|} - 1) ,$$

где  $\Phi(t) = \exp\left\{ -\frac{q^2}{32\pi^2} \frac{e^2 \cdot \frac{1}{m}}{|t|} \right\}$  - упругий формфактор рассеивавше-

гося нуклонов в двойном логарифмическом приближении 30 (модель  $\bar{g} \gamma^* \gamma \gamma$ ).

Сечение в этом случае пропорционально четвертой степени формфактора, что можно рассматривать как подтверждение в рамках К.Т.П. гипотезы

Ву и Янга о роли упругих формфакторов в высоконергетическом рассеянии 19.

Возникновение в (14) фазы, соответствующей потенциалу Окавы, было обусловлено простым мезонным обменом между нуклонными линиями (рис.2). В теоретико-полевом подходе можно уточнить характер обмена между рассеивавшими нуклонами и ввисти, например, промежуточное изоинное поле  $U(x)$ , взаимодействующее с нуклонами и создавшее их структуру. Выбирая диаграммные взаимодействия в виде:  $\mathcal{L}_{int} = \bar{g} \gamma^* \gamma + \frac{h}{2} U \gamma^4$ , где  $h$  - константа взаимодействия скалярных полей  $U$  (с массой  $\infty$ ) и  $\gamma$  (с массой  $M$ ), мы тем самым приходим к графикам нуклон-нуклонного рассеяния на рис.3, которые и суммируются в рамках функционального подхода.

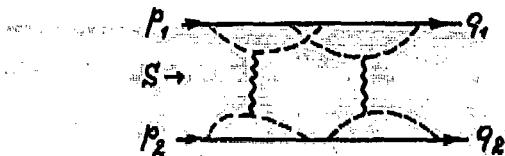


Рис.3.

Как было показано в работе 28, такая модификация взаимодействия также приводит к эйкенальному представлению амплитуды рассеяния, но с новой фазой, пропорциональной произведению формфакторов рассеивающихся нуклонов (см. (15) ):

$$f(\theta, S) = \frac{g^4}{8 S m^2 M^2} \int \frac{d^4 k}{(4\pi)^4} \frac{e^{i k \theta}}{k^2 + M^2} \left[ F\left(\frac{k}{S}\right) \right]^2, \quad (16)$$

где величина  $F(x) = h x^{-1} \arcsin(1 + \frac{h}{x^2})^{-\frac{1}{2}}$  является формфактором нуклона в низшем порядке теории возмущений по константе  $h$ . Такая структура эйкенальной фазы (16) соответствует "капельной" модели высокозергетического взаимодействия 19. За счет быстрого убывания  $F\left(\frac{k}{S}\right)$  при  $k \rightarrow \infty$  интеграл по  $d^4 k$  в (16) конечен при любых значениях  $\theta$ , т.е. такая эйкенальная фаза соответствует несингулярному потенциальному (см. также 27). Как известно, предположение о гладкости эффективного потенциала, или квазипотенциала является основным при исследовании высокозергетического рассеяния в рамках квантовой механики 18,31.

Убывание эйкенальной фазы  $f$  в формуле (16) с ростом  $S$  приводит к тому, что вся амплитуда стремится к константе при  $S \rightarrow \infty$ , а полное сечение падает как  $\frac{1}{S}$ . Таким образом, высокозергетическое поведение амплитуды и сечения в рассмотренной модели оказывается таким же, как и при суммировании всех основных нестичных диаграмм в теории  $\mathcal{L}_{int} = g \gamma^* \gamma \varphi$ .

Рассмотрим следующую модель высокoenергетического рассеяния <sup>32</sup>. Каждый из нуклонов (поля  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ) связан со своим мезонным полем  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно. Эти мезонные поля взаимодействуют друг с другом "контактным" образом:  $\mathcal{L}' = h \varphi_1 \varphi_2$ ,  $h$  — константа связи, имеющая размерность квадрата массы. Введение такого лагранжиана можно рассматривать как моделирование  $\rho\gamma$  — взаимодействия:

$$\mathcal{L}'_{\rho\gamma} = e \frac{m_f^2}{\gamma_p} \rho_\mu A^\mu.$$

Полный лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int} = \partial \psi_1^* \psi_1 \varphi_1 + \partial \psi_2^* \psi_2 \varphi_2 + h \varphi_1 \varphi_2.$$

Все поля  $\psi_1$  и  $\varphi_1$  для простоты считаются скалярными. Примеры диаграмм, описывающих рассеяние нуклонов в такой модели, даны на рис.4.

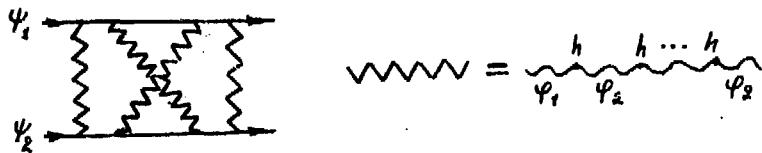


Рис.4.

Используя описанную выше технику <sup>32</sup>, получаем эйкональное представление для амплитуды рассеяния нуклонов:

$$T(s, t) = -2is \int d^2 b e^{i(p_1 - q_1) b} (\exp[i\chi(b, s)] - 1) \quad (17)$$

где

$$\chi(b, s) = \frac{g^2 h}{8\pi^2 s} \int \frac{d^2 k e^{i k b}}{(k^2 + \mu^2)^2 - h^2} = \frac{g^2}{8\pi s} [K_0(\mu b) - K_0(\mu b)]$$

$$\mu_{\pm} = \sqrt{\mu^2 \pm h^2},$$

$K_0$  — функция Кельвина.

Если  $|h| < \mu^2$ , то эйкональная фаза  $\chi$  соответствует равности двух потенциалов Окавы:

$$V_{(2,S)} = -\frac{q^2}{16\pi S} \left( \frac{e^{-\mu^2}}{2} - \frac{e^{-\mu^2}}{2} \right); \quad \sigma = \sqrt{B^2 + Z^2}.$$

Таким образом, эффективный потенциал оказывается гладким ( $V(0) = 0$ ) и убывающим с энергией.

Если же  $|h| > \mu^2$ , то фаза  $\chi$  в формуле (I7) становится комплексной:

$$\chi = \frac{q^2}{8\pi S} \left[ e \cdot \frac{\pi}{2} J_0(\sqrt{\mu^2 - h} B) - \frac{\pi}{2} N_0(\sqrt{\mu^2 - h} B) - K_0(\mu B) \right], \quad (I8)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  - функция Бесселя. Для определенности считаем, что  $h > 0$ , и при вычислении интеграла по  $d^2 k$  в формуле (I7) учтем правило обхода полюсов ( $\mu^2 \rightarrow \mu^2 - i\epsilon$ ). Фаза (I8) соответствует комплексному эффективному потенциалу, который будет гладким, так как  $\chi$  в (I8) конечна при  $B \rightarrow 0$ . Факт в (I7) и (I8) убывает с энергией, следовательно, полное сечение в данной модели падает с ростом  $S$  как  $\frac{1}{S}$ .

## 2. Учет эффектов поляризации вакуума при высоконергетической рассеянии

Приведенные выше исследования высоконергетических процессов не учитывали эффектов поляризации вакуума, то есть  $S_0(\varphi)$  в формуле (5) полагалось равным 1. Пренебрежение вакуумными вкладами приводит к тому, что влияние неупругих процессов на упругое рассеяние пренебрегается во внимание. Следствием этого является чисто деструктивная эйкональная фаза в формулах (15) и (16). Можно смыть, что общее более сложное взаимодействие комплексами с замкнутыми кольцами позволит на высоконергетическое поведение амплитуды, представляемой в эйкональной форме [33]. При этом малая часть вклада замкнутых петель должна приводить к отличной от нуля минимум частоты эйкональной фазы.

Возможность представить в эйкonalной форме амплитуду рассеяния с полным учетом вкладов от поляризации вакуума исследовалась в ряде работ функциональным методом <sup>34</sup> и в теории возмущений <sup>35</sup>.

Если предположить, что в процессе высокоэнергетического рассеяния исходные частицы (прямые линии на диаграммах рис.5) переносят большой импульс, а импульсы, протекающие по волнистым линиям, маль, то в этом случае можно линеаризовать нуклонные пропагаторы (формула (12)), то есть опустить функциональные переменные  $\psi$  в нуклонных токах (9). Как было показано в работе <sup>34</sup>,

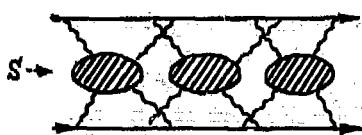


Рис.5

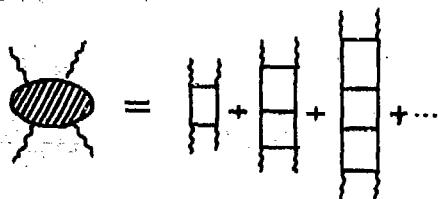


Рис.6

это сразу позволяет представить амплитуду рассеяния в следующем виде:

$$T(s, t) = -2e^2 s m_1 m_2 \int d^4 \theta e^{i \theta \Delta} (e^{i \chi} - 1), \quad (19)$$

где  $-\Delta^2 = t$ , а эйкональная фаза  $\chi$  выражается через  $m_1 j_1 + m_2 j_2$  так

$$i\chi = \ln m_1 j_1 + m_2 j_2.$$

Величина  $m_1 j_1$  записывается с помощью функционального интеграла по мезонному полю  $\varphi$  следующим образом

$$m_1 j_1 = C_\varphi \int_x \prod d\varphi(x) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \varphi \cdot D_e^{-1} \cdot \varphi + \Pi(\varphi) + i g \bar{j} \cdot \varphi \right\}. \quad (20)$$

Токи  $\bar{j}$  получается из точного выражения (9), если положить  $\psi_e(\zeta) = 0$

$$\bar{j}_e(x) = \int d\zeta \delta^{(4)}(x - 2p_e \zeta), \quad (e = 1, 2).$$

В работе <sup>36</sup> был выбран конкретный класс диаграмм, учитывающих вакуумные вклады, а именно диаграммы, в которых обмен между рассеи-

запущенными частицами осуществляется "лестницами" в  $t$  - канале (см. рис. 5 и 7). Хорошо известно<sup>37/</sup>, что суммирование таких диаграмм при  $S \rightarrow \infty$  приводит к реджевскому поведению амплитуды рассеяния  $(\frac{S}{S_0})^{\alpha(t)}$ . Поэтому, если проsumмировать в  $S$  - канале лестничные обмены, то можно получить эйкокальную фазу, растущую при  $S \rightarrow \infty$  ( $\alpha > 1$ ), а не убывающую, как это имеет место в формуле (15). Для такого суммирования в формулках (19) и (20) необходимо удержать в  $\Pi(\varphi)$  лишь член четвертой степени по  $\varphi$

$$\Pi(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \Pi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Беря вместо вклада одной петли  $\Pi$ , сумму лестничных диаграмм, получаем

$$T(s, t) = -2 \epsilon s \int d^4 q e^{i \theta(p_1 - q_1)} \cdot \left( \exp \left[ -i \frac{q^2}{sm^2} \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{i y \cdot q \theta} \mathcal{F}(-q^2) \left( \frac{S}{S_0} \right)^{\alpha(-q^2)} \right] - 1 \right), \quad (21)$$

где введен сигнатурный множитель

$$\mathcal{F}(-q^2) = \frac{\pi}{\Gamma[K(-q^2)]} \frac{1 + e^{-i \pi \alpha(-q^2)}}{\sin \pi \alpha(-q^2)};$$

$$\alpha(-q^2) = -1 + K(-q^2), \quad K(-q^2) = \frac{q^2}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dy}{1 + \frac{q^2}{m^2} y(1-y)}.$$

В формуле (21) эйкокальная фаза представляет собой двумерный фурье-образ от вклада полиса Реджо. Впервые такое представление получила Арнольд<sup>20</sup>. Требуя, чтобы борновский член амплитуды рассеяния, запиакной в эйкокальной форме, совпадал с амплитудой в модели полисов Реджо, он определил эйкокальную фазу  $\chi$ . Эта идея далее получила развитие в работах<sup>38</sup>.

Из-за сигнатурного множителя фаза  $\chi$  имеет действительную и минимум части, причем  $\text{Im } \chi > 0$ , как и требуется по условиям унитарности.

Если ограничиться линейным приближением для траектории  $\alpha(-q^2)$

$$\alpha(-q^2) = -1 + \frac{q^2}{16\pi^2 m^2} - \alpha' q^2 = \alpha_0 - \alpha' q^2,$$

то  $\chi$  оказывается пропорциональной следующему выражению:

$$f(\theta, s) \sim \frac{s^{\alpha_0-1}}{\ln s} e^{-\frac{\theta^2}{4\alpha' \ln s}} \left[ 1 + e^{-\frac{\pi i \theta^2}{4\alpha' \ln s}} \right].$$

Такая фаза соответствует комплексному гауссовскому потенциалу, величина которого растет с энергией как  $\frac{s^{\alpha_0-1}}{\sqrt{\ln s}}$ , а эффективный радиус взаимодействия увеличивается пропорционально  $\sqrt{\alpha' \ln s}$ .

Если  $\alpha_0 = -1 + \frac{q^2}{16\pi^2 m^2} > 1$ , то при прицельных параметрах  $\theta^2 > \theta_0^2 = 4\alpha' \ln^2 s (\alpha_0 - 1)$   $\chi$  экспоненциально убывает, и величина  $e^{i\chi} \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что главный вклад при интегрировании по  $\theta$  в викоальной формуле (21) дает область  $\theta < \theta_0$ . Поэтому амплитуда ведет себя так:

$$T(s, t) \sim 4\pi i s \int_0^{\theta_0} \theta d\theta J_0(\theta \Delta) = 4\pi i \frac{\theta_0}{\Delta} J_1(\theta_0 \Delta); \quad (22)$$

$$T(s, t=0) \sim 2\pi i \theta_0^2 = 8\pi i \alpha' \ln^2 s (\alpha_0 - 1).$$

Полное сечение взаимодействия  $\sigma = \frac{t}{s} \frac{\text{Im } T(s, 0)}{s}$  пропорционально  $\ln^2 s$ , что как раз удовлетворяет границе Фруассара. Нуклон-нуклонное рассеяние в этом случае можно рассматривать как дифракцию на объекте, размеры которого логарифмически увеличиваются с ростом энергии <sup>39</sup>.

Если  $\alpha_0 = 1$ , то  $T(s, t) \sim s \underset{s \rightarrow \infty}{\text{и}} \sigma^{\text{tot}} \rightarrow \text{const}$ . При  $\alpha_0 < 1$  в викоальной формуле (21) доминирует борновский член и  $T(s, t) \sim s^{\alpha_0}$ , а  $\sigma^{\text{tot}} \sim s^{\alpha_0-1} \rightarrow 0$ .

Таким образом, учет мезон-мезонного взаимодействия в процессах нуклонного рассеяния в высокозенергетической области даже в простой скалярной теории приводит к физически правильному энергетическому поведению амплитуды рассеяния нуклонов. Существенно, что константа

взаимодействия в этом случае должна быть велика

$$\frac{q^2}{16\pi^2 t \chi} > 2.$$

Согласно формуле (22) угловое распределение рассеяния имеет первый провал при  $t_0 = -\Delta^2 \sim \frac{1}{B_0^2} \sim \frac{1}{\ln^2 S}$ . Это значение  $t$  можно принять за ширину дифракционного пика. Следовательно, в редже-эйкональной модели дифракционный пик сужается с ростом  $S$ , а произведение ширины пика  $t_0$  на полное сечение остается постоянным (если считать, что  $\alpha_0 > 1$ ):

$$t_0 \cdot \sigma^{tot} \sim \frac{1}{B_0^2} \cdot B_0^2 = const.$$

Заканчивая обсуждение редже-эйконального представления амплитуды рассеяния, отметим следующее интересное свойство этой формулы. Оказывается, что  $n$ -ый член разложения в ряд по фазе  $\chi$  амплитуды (21) дает в высокоэнергетической области такой же вклад, как и разрез в комплексной плоскости углового момента в перекрестном канале<sup>40/</sup>. Этот разрез начинается в точке

$$j_0(t) = n\alpha\left(\frac{t}{n^2}\right) - n + 1. \quad (23)$$

Проиллюстрируем это на простейшем случае  $n=2$ . Для упрощения расчетов опустим сигнатурный множитель и функцию вычета будем считать константой.

Как известно<sup>41</sup>, парциальная амплитуда  $f_j(t)$  с точностью до множителя пропорциональна преобразованию Лапласа-Меллина  $\Phi_{f_j}(t)$  амплитуды  $T(s, t)$  по переменной  $\xi = \ln \frac{s}{S_0}$ :

$$f_j(t) \sim \Phi_{f_j}(t) = \int_{\xi_0}^{\infty} T(s, t) e^{-st} ds. \quad (24)$$

Подставляя в (24)  $T_2$  из (21), получим

$$\Phi_{f_j}(t) = C \int d^2 \theta e^{i \theta \Delta} \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \left( \int \frac{dq^2}{(2\pi)^2} e^{-i \theta q - \alpha \xi q^2} \right)^2 e^{-j - 2\alpha_0 + 1} \xi =$$

$$= C' \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} e^{-\xi - 2\alpha_0 + 1 + \frac{4^2}{2} \alpha' \xi} \sim \ln(\xi - 2\alpha_0 + 1 + \frac{4^2}{2} \alpha').$$

Действительно, вклад  $T_2(s, t)$  в  $\Phi g, t$  имеет логарифмическую точку ветвления при  $j = 2\alpha_0 - 1 - \frac{4^2}{2} \alpha'$ , что совпадает с формулой (23) при  $n = 2$ .

Возвращаясь к вопросу получения редже-эйкональной формулы из теории поля, надо отметить, что строго математического обоснования здесь нет. Исследование диаграмм с двумя лестничными обменами без аппроксимации нуклонных пролагаторов<sup>42</sup> показывает, что формула (21) в этом случае правильно воспроизводит асимптотику, которая получается при суммировании главных логарифмов. Таким приближением можно ограничиться только в том случае, если константа связи  $g$  мала.

Как отмечалось выше, интерес представляет как раз обратная ситуация, когда  $g$  велико. Однако получить эйкональное представление для суммы диаграмм на рис.5, которое бы правильно учитывало младшие логарифмы при линеаризации нуклонных пролагаторов, не удается<sup>43</sup>. Помимо этого открытым остается вопрос, к чему приводит суммирование неэйкональных вкладов<sup>44</sup>, которые не учитывались в нашем подходе.

Изучение обобщенных лестничных диаграмм в скалярной модели (рис.2) показывает<sup>44,45</sup>, что эйкональная формула соответствует суммированию в асимптотической области таких графов теории возмущения, в которых "лидирующая" частица, переносящая большой импульс, является рассеивающимся нуклоном и не изменяется в процессе виртуальных обменов с другим нуклоном. Неэйкональные графы возникают, когда изменяется сорт лидирующей частицы, например, с передачей большого импульса

от нуклона виртуальному мезону и наоборот. Примеры таких диаграмм, начиная с восьмого порядка по  $g$  и выше, были указаны в работе <sup>44</sup>. Если рассеиваются тождественные частицы, то неэйкональные графы появляются уже в четвертом порядке <sup>45</sup>. В этом случае наряду с диаграммами на рис.2 необходимо учитывать "перекрученные" графы (рис.7)

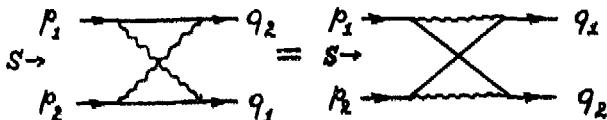


Рис. 7.

Перенос большого импульса мезонами приводит к тому, что асимптотика такого графа  $\frac{\ln S}{S}$  оказывается доминирующим по сравнению с асимптотикой эйкональных графов  $\sim \frac{1}{S}$  в том же порядке теории возмущений (рис.2).

Функциональный метод позволяет единным образом просуммировать эйкональные графы в различных процессах высокознергетического рассеяния и приводит к эйкональным формам амплитуды рассеяния, оставляя при этом пока открытым вопрос о вкладе неэйкональных графов. Анализ, проведенный в работе <sup>45</sup>, показывает, что в  $n$ -ом порядке по константе связи отношение неэйкональной к эйкональной амплитуде для суммы обобщенных лестничных диаграмм равно

$$\frac{f_{\text{НЕУК}}^{(n)}}{f_{\text{УК}}^{(n)}} \underset{S \rightarrow \infty}{\sim} \text{const} \frac{m^2}{m^2(m^2)} \left(\frac{S}{m^2}\right)^{\frac{n}{2}-4}, \quad (n \geq 8).$$

Более сложный класс диаграмм по сравнению с редже-эйкональными графами был рассмотрен в работах <sup>46</sup>. Основной вывод этих работ заключается в следующем утверждении. При учете диаграмм, в которых есть всевозможные связи между обменными лестницами (см. рис.8), могут иметь место взаимные сокращения главных асимптотик отдельных диаг-

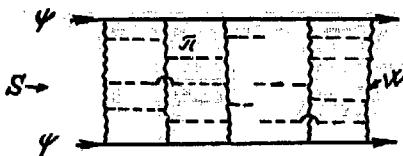


Рис.8.

рамм. В результате этого степень роста полного сечения может быть меньше, чем граница Фруассара и, в частности, в рассмотренной авторами модели:  $\mathcal{L}_{int} = g \sum_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi W^{\mu} + \frac{\lambda}{2} \pi \sum_{\mu} W_{\mu}^2$  путем суммирования диаграмм, представленных на рис.8, было получено постоянное сечение.

### Л и т е р а т у р а

1. В.А. Фок. Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1957.
2. Ю. Швингер. Теория квантованных полей., ИЛ, 1956.
3. R.P.Feynman. Rev.Mod.Phys., 20, 367 (1948).
4. R.P.Feynman. Phys.Rev., 80, 440 (1950); 84, 108 (1951).
5. S.F.Edwards, R.E.Peierls. Proc.Roy.Soc., A224, 24 (1954).
6. Н.Н. Боголюбов. ДАН СССР 99, 225 (1954).
7. В.М. Барбашов, С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян. ТМФ, 3, 442 (1970).
8. В.М.Барбашов, С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, В.Н.Певушин, А.Н.Сисакян, А.Н.Тавхелидзе. Phys.Lett., 33B, 484; ТМФ, 5, 330 (1970).
9. Р. Фейнман, А. Хисс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Мир, М., 1966.
10. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, М., 1957.
- II. Д.И. Блохинцев, Б.М. Барбашов. УФН, 106, 593 (1972).

12. И.М. Гельфанд, А.М. Яглом. УМН II, 77 (1956).  
 Ю.Л. Далецкий. УМН, 17, 3 (1962).  
 И.М. Ковальчик. УМН 18, 97 (1963).  
 Ф.А. Березин. Метод вторичного квантования М., "Наука", 1965.

13. N.Wiener. Ann.Math., 22, 66 (1920).  
 P.I.Daniel. Ann.Math., 19, 279 (1916),  
 21, 30 (1919).

14. Л.Д. Фаддеев. ТМФ, 1, 3 (1969).  
 А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев, ТМФ 3, 18 (1970).

15. Г.А. Милёхин, Е.С. Фрадкин. ЖЭТФ, 45, 1926 (1963).  
 Е.С. Фрадкин. Труды ФИАН 29, 7 (1965).

16. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).

17. Б.М. Барбашов, М.К. Волков, ЖЭТФ, 50, 660 (1966).

18. Д.И. Блохинцев, В.С. Барашенков, Б.М. Барбашов. УФН, 68, 417 (1959).  
 D.I.Blokhintsev, V.S.Barashenkov, B.M.Barbashov,  
 Nuovo Cim. 12, 602 (1959).

19. T.T.Chou, C.N.Yang. Phys.Rev., 170, 1591 (1968);  
 Phys.Rev.Lett., 20, 1213 (1968);  
 Phys.Rev., 175, 1832 (1968).

20. R.C.Arnold. Phys.Rev., 140B, 1022 (1965); Phys.Rev., 153,  
 1523 (1967).

21. C.B.Chiu, Rev.Mod.Phys., 41, 640 (1969).  
 J.D.Jackson, Rev.Mod.Phys., 42, 12 (1970).

22. Т.Ю. Бу, Т. Омур. Квантовая теория рассеяния, "Наука", М., 1969.

23. G.Moliere. Z.Naturforsch. 2A, 133 (1947).

24. R.I.Glauber. Lectures in Theoretical Physics, v.1, 315, N.Y.,  
 1959.

25. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Сообщение ОИЯИ Р2-6396, Дубна (1972).

26. R.Chisholm. Proc.Cambridge Phil.Soc. 48, 300 (1952).

27. H.D.I.Abarbanel, C.Itzykson. Phys.Rev.Lett., 25, 53 (1969).  
Н.В. Андреев. ИЯФ, 58, 253 (1970).

28. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ТМФ 9, 343 (1971).

29. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Препринт ОИЯИ Р2-6654 (1972).

30. E.Eichten, Phys.Rev., D4, 1225 (1971).

31. S.P.Alliluyev, S.S.Gershtein, A.A.Logunov, Phys.Lett., 18, 195 (1965).

32. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко, ТМФ 13, 83 (1972).

33. И.В. Андреев, И.А. Баталин. Препринт ФИАН № 60, Москва, 1970.  
I.V.Andreev. Preprint CERN TH-1257 (1970).

34. B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian. JINR E2-5827, Dubna (1971).  
H.M.Fried, Phys.Rev., D3, 2010 (1971).

35. H.Cheng, T.T.Wu, SLAC-PUB-956 (TH) (1971).

36. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ТМФ, 10, 196 (1972).

37. B.W.Lee, R.F.Sawyer. Phys.Rev., 127, 2266 (1962).  
J.C.Polkinghorne. Journ.Math.Phys., 4, 503 (1963),  
5, 431 (1964).

38. S.Frautschi, B.Margolici. Nuovo Cim., 56A, 1155 (1968).  
К.А. Тер-Мартиросян. Материалы 4-й зимней школы по теории ядра и физике высоких энергий, ФТИ, часть II, стр. 38, Ленинград, 1969.

39. В.Н. Первушин. Сообщение ОИЯИ Р2-5990, Дубна, 1971.  
V.N.Pervushin, JINR, E2-5938, Dubna, 1971.

40. M.M.Islam, in Lectures in Theor.Physics, ed. by A.O.Barut and W.E.Brittin (Colorado Associated University Press, 1972), v.14A.

41. N.N.Khuri. Phys.Rev., 132, 914 (1963).

42. D.Hasslacher, D.K.Sinclair. Phys.Rev., D3, 1770 (1971).

    G.M.Cicuta, R.L.Sugar. Phys.Rev., D3, 970 (1971).

    H.Cheng, T.T.Wu. Phys.Rev., 186, 1611 (1969); D1, 2775 (1970).

43. H.Cheng, T.T.Wu. Phys.Letters, 34B, 647 (1971).

    A.R.Swift. Phys.Rev., D5, 1400 (1972).

44. G.Tiktopoulos, S.B.Treiman. Phys.Rev., D3, 1037 (1971).

45. S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, M.A.Smondyrev,  
    A.N.Tavkhelidze, JINR, E2-7041, Dubna (1973).

46. R.Blankenbecler, H.M.Fried, SLAC-PUB 1125, 1972.

    H.M.Fried. Phys.Rev., D6, 3562 (1972).

МЕТОДЫ ЧАСТИЧНОГО СУММИРОВАНИЯ ДИАГРАММ В НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ  
ТЕОРИЯХ ПОЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ  
ЛЕПТОНОВ И СИЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ АДРОНОВ

А.Т. Филиппов

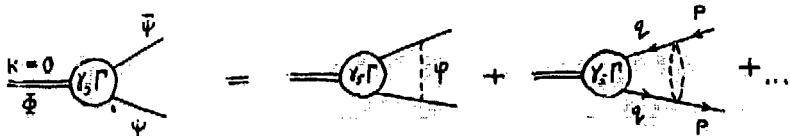
Объединённый институт ядерных исследований

I. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, неперенормируемые (Н) теории поля отличаются от перенормируемых ( $\Pi$ ) как в теории возмущений, так и при выходе за её рамки. В теории возмущений это отличие проявляется в характере расходимостей диаграмм и в их зависимости от импульсных переменных: логарифмические расходимости – для  $\Pi$ -теорий, степенные – для Н-теорий, и соответственно, нарастание степеней  $\ln \frac{p}{m}$  ( $\Pi$ ) и нарастание степеней импульсов  $p$  при росте порядка диаграмм (для Н). Для известных точных решений и частичных сумм диаграмм отличие следующее: существенная особенность по константе связи  $g$  при  $g = 0$  (типа  $e^{-1/g}$ ) для  $\Pi$ -теорий и точка ветвления (типа  $g^{\alpha}(\ln g)^n$  или  $g^{\alpha}$ ) – для Н-теорий; полиномиальная ограниченность при  $|p| \rightarrow \infty$  для  $\Pi$  и существенная особенность (типа  $p^{\alpha} \exp(p^{\beta})$ ) для Н.

Детально проследить соотношение между точным решением и рядом теории возмущений можно на примере уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом  $V(r)$ : перенормируемые потенциалы –  $V \sim \frac{\theta^2}{r^2} \ln(r/\kappa)$ , неперенормируемые потенциалы –  $V \sim g r^{-n}$ ,  $n > 2$ ;  $V = g r^{\alpha} \exp(g r^{-\beta})$ . Пользуясь квазипотенциальным методом, эти потенциалы можно получить соответственно в  $\Pi$ -теориях, Н-теориях и неполиномиальных (НП)-теориях. К аналогичной классификации можно прийти, исходя из уравнений Эдвардса, Бете-Солпитера и из линеаризованных уравнений Дейсона.

Рассмотрим, например, уравнение



для псевдоскалярного связанных состояния  $\Phi$  фермионов  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , взаимодействующих со скалярным полем  $\varphi$  (глюоны):

$$\mathcal{L}_{int} = f_1 : \bar{\psi} \psi \varphi : + \frac{1}{2} f_2 : \bar{\psi} \psi \varphi^2 : + \dots \quad (1)$$

Определив волновую функцию соотношением (4-мерное преобразование Фурье в евклидовом пространстве)

$$\Gamma(p^2) = p^{-1} (M^2 + p^2) \int_0^\infty d\tau J_{3/2}(p\tau) \tau^{1/2} u(\tau) \quad , \quad (2)$$

находим для  $u$  уравнение

$$u'' - \left[ M^2 + \frac{3}{4} \tau^{-2} + f_1^2 \Delta_F(\tau) + \frac{1}{2} f_2^2 \Delta_F^2(\tau) + \dots \right] u = 0,$$

$$\Delta_F(\tau) = m K_1(m\tau) (4\pi^2\tau)^{-1} \quad (3)$$

В этом уравнении потенциал есть просто произведение пропагаторов) глюона. Первый член есть  $\Pi$ -потенциал, второй –  $\Pi$ -потенциал. На этом примере нетрудно также понять, как получить потенциал, соответствующий суперпропагатору. Для этого достаточно в лагранжиане (1) взять бесконечное число членов

$$\mathcal{L}_{int} = f : \bar{\psi} \psi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} (g \varphi)^n : \quad (4)$$

Структура членов, появляющихся в уравнении (3), очевидна из предыдущих рассуждений, и мы приходим к потенциальному вида:

$$V(\tau) = f^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n [g^2 \Delta_F(\tau)]^n = f^2 v(\tau), \quad (5)$$

где  $c_n = d_n^2 / n!$ . Этот потенциал, очевидно, имеет смысл, если ряд сходится. Если ряд расходится при некоторых или при всех значениях  $\tau$ , то нужно использовать более сложные методы аналитического продолжения.

Аналогичные уравнения можно получить для амплитуды рассеяния. Так, уравнение Бете - Соллитера для рассеяния лептонов в четырехформационной теории

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu^+ j^\mu, \quad j_\mu = \bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_\mu \quad (6)$$

можно свести к уравнению Шредингера, которое при равном нулю 4-импульсе сталкивающихся лептонов имеет вид

$$u'' - [M^2 + (n(n+2) + \frac{3}{4}) r^{-2} + V(r)] u(r) = 0, \quad (7)$$

где  $V \sim \frac{G^2 r^{-6}}{r^{n+2}}$ ,  $n$  - номер парциальной волны в разложении амплитуды рассеяния по полиномам Гегенбауэра. Такого же типа уравнения можно построить и в теории с промежуточным  $W$ -бозоном

$$\mathcal{L}_{int} = g [j_\mu^+ W^\mu + j^\mu W_\mu^+], \quad (8)$$

а также в теориях с неполиномиальным взаимодействием, например, в теории, в которой  $j_\mu \rightarrow j_\mu \exp(f \varphi^+ \varphi / 2)$ , где  $\varphi$  - заряженное скалярное поле. В последнем случае борновский член содержит дополнительный множитель  $\sim [1 - f^2 \Delta_F^2(x)]^{-1}$ , т.е. потенциал в уравнении (7) имеет вид  $\sim \frac{V(r)}{1 - f^2 \Delta_F^2(r)}$ . Это выражение имеет при некотором значении  $r = r_0$  полюс, т.е. помимо особенности в нуле потенциал имеет особенность на конечном расстоянии (СКР-потенциал, или потенциал с поверхностью сингулярностью). Изучение свойств и приложениям таких потенциалов будет посвящена значительная часть доклада. Здесь отметим только, что сначала удобно рассмотреть СКР-потенциалы, регулярные при  $r = 0$ , например, потенциал (5) с коэффициентами  $c_n = 1$ , т.е.

$$V(r) = f^2 \Delta_F(r) [1 - g^2 \Delta_F(r)]^{-1} \quad (9)$$

Такие потенциалы представляют значительный интерес для составных моделей адронов, что будет показано в конце доклада.

Заметим, что проведенная классификация, строго говоря, имеет смысл лишь при использовании ТВ для потенциалов. Может случиться, что точное выражение для потенциала П-теории окажется неперенормируемым или же сверхперенормируемым, и наоборот. Однако пока нас интересуют теории с малой константой связи и не очень большие импульсы, эта классификация сохраняет смысл.

Отмеченная близкая аналогия между линейными приближениями в теории поля и уравнением Шредингера с сингулярным потенциалом наводит на мысль использовать методы, которые можно разработать для сингулярного уравнения Шредингера, в соответствующим образом сформированных задачах теории поля. В неперенормируемых теориях поля нам нужно в первую очередь решить две основных задачи: 1) научиться вычислять члены ряда модифицированной теории возмущений (с учетом точки ветвления по константе  $g$ ), 2) найти поведение амплитуд рассения при больших значениях энергии и малых передачах импульса. Со второй задачей тесно связана задача определения связанных и резонансных состояний. Для решения всех этих задач можно, как мы и делаем в настоящем докладе, систематически использовать лестничные приближения.

Поскольку характерные особенности неперенормируемых теорий проявляются лишь при учете бесконечного множества диаграмм, то на первый взгляд кажется необходимым искать точные решения соответствующих интегральных уравнений. Разумеется, решение такой задачи в общем случае совершенно нереально. Пользуясь малостью константы связи, можно, однако, существенно упростить решение задачи и разработать более простые методы, которые обсуждаются в следующем параграфе.

## § 2. Асимптотическая теория возмущений и дифференциальная интерпретация

Основываясь на изложенной выше аналогии между теорией поля и сингулярным уравнением Шредингера, мы ограничимся рассмотрением лишь этой простейшей модели.

Уравнение Шредингера (при  $\lambda=0$ )

$$u'' - \left[ (\lambda^2 - \frac{1}{4}) \tau^{-2} + f^2 v(\tau) \right] u = 0, \quad \lambda = l + \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \lambda = n + 1 \quad (10)$$

с граничным условием  $u(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$  эквивалентно интегральному уравнению

$$u(\tau) = \tau^{\lambda + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\tau} dp V(p) \left[ \tau^{\lambda + \frac{1}{2}} p^{-\lambda - \frac{1}{2}} - \tau^{-\lambda + \frac{1}{2}} p^{\lambda + \frac{1}{2}} \right] u(p). \quad (II)$$

Если  $I(v) = \int_0^{\infty} dp p^2 V(p) < \infty$ , то ряд теории возмущений, получаемый итерациями уравнения (II), сходится, т.е. функция  $u$  регулярна по  $\tau^2$  в некоторой окрестности точки  $\tau^2 = 0$ . Если  $I = \infty$ , то каждый член ряда расходится и необходима какая-либо регуляризация. (Мы выберем простейшую:  $v \rightarrow v_\epsilon = \theta(\tau - \epsilon) v(\tau)$ ). В первом случае потенциал называют регулярным, а во втором - сингулярным.

В сверхперенормируемых теориях поля потенциалы регулярны. В перенормируемых и неперенормируемых теориях потенциалы, соответствующие конечному числу диаграмм Фейнмана, сингулярны. Сингулярные потенциалы удобно разбить на два подкласса. Назовем потенциал перенормируемым, если все расходимости в каждом порядке ряда теории возмущений для  $u$  можно устранить подходящим выбором константы перенормировки  $Z_\epsilon$ .

**Теорема I:** Потенциал  $v(\tau)$ , монотонно зависящий от  $\tau$  вблизи точки  $\tau = 0$ , перенормируем в том и только в том случае, если для всякого  $\delta > 0$  найдется такое  $\tau_0 > 0$ , что  $v(\tau) < C \tau^{-2-\delta}$ ,  $\tau < \tau_0$ .

Следствие: Потенциалы, соответствующие конечному числу диаграмм Фейнмана перенормируемой теории поля, перенормируются.

Потенциалы (монотонные вблизи  $\tau=0$ ), не удовлетворяющие условию теоремы I, неперенормируются<sup>x)</sup>. Таким образом, в этом случае использовать регуляризованную теорию возмущений можно лишь при конечном значении  $\varepsilon$ . Предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно выполнить лишь для  $U(\tau) > 0$  при  $\tau \rightarrow 0$  и лишь для суммы всех членов ряда, которую можно представить в форме

$$u_\varepsilon(\tau) = \sum_\varepsilon [w_1(\varepsilon) u_1(\tau) + w_2(\varepsilon) u_2(\tau)] \quad (12)$$

Если  $U > 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , то  $u_1(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} 0$ ,  $u_2(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \infty$ ,  $w_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \infty$ ,  $w_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$ .

Здесь  $u_i(\tau)$  — точное решение исходной задачи (10). Выбирая  $\sum_\varepsilon = \text{const} / w_1(\varepsilon)$ , мы получим в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  точное решение.

Наиболее общим приближенным методом решения сингулярного уравнения является метод "асимптотической" теории возмущений.

Теорема 2: Пусть  $U(\tau) = U_s(\tau) + U_R(\tau)$ , причем

$$\tau^2 U(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} +\infty, \quad \int_0^\infty d\tau U_s(\tau) [U_s(\tau)]^{-1/2} < \infty.$$

Тогда  $U_R(\tau)$  — "хорошее возмущение" по отношению к невозмущенной задаче

$$u_s'' + \left[ \kappa^2 - (\lambda^2 - \frac{1}{4}) \tau^{-2} - f^2 U_s(\tau) \right] u_s(\tau) = 0. \quad (13)$$

Здесь термин "хорошее возмущение" означает, что если мы выберем в качестве нулевого приближения решение уравнения (13), то ряд

x) Потенциалы, соответствующие конечному числу членов ряда неперенормируемой теории поля, неперенормируются.

теории возмущений для волновой функции по потенциалу  $U_\epsilon(\tau)$  будет сходящимся (по крайней мере для достаточно малых значений  $\tau$ ). Доказательство подробно проведено в упомянутой выше диссертации автора. Асимптотическая ТВ позволяет, в принципе, решить все три перечисленные выше задачи, но практическое использование её в КТП чрезвычайно осложняется трудностями вычисления первого приближения (соответствующего  $U_\epsilon$ ) и, в особенности, чрезвычайной громоздкостью выражений для следующих членов.

Для конкретных расчетов удобнее пользоваться методом дифференциальной интерполяции (МДИ), позволяющим перестраивать ряд обычной регуляризованной теории возмущений в модифицированный ряд по степеням  $g$  и  $\ln g$ . Идея МДИ основана на существовании представления (I2) для точного решения  $U_\epsilon(\tau)$ . Функции  $W_i(\epsilon)$  и  $W_z(\epsilon)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 W}{d\epsilon^2} - \left[ \frac{2\lambda+1}{\epsilon} + \frac{U'(\epsilon)}{U(\epsilon)} \right] \frac{dW}{d\epsilon} = f^z U(\epsilon) W(\epsilon). \quad (I4)$$

Отсюда следует, что между членами ряда регуляризованной ТВ

$$U_\epsilon(\tau) = U_\epsilon^{(0)}(\tau) + U_\epsilon^{(1)}(\tau) + U_\epsilon^{(2)}(\tau) + \dots \quad (I5)$$

существует рекуррентное соотношение

$$\frac{d^2 U_\epsilon^{(n+1)}}{d\epsilon^2} - \left[ \frac{2\lambda+1}{\epsilon} + \frac{U'(\epsilon)}{U(\epsilon)} \right] \frac{dU_\epsilon^{(n+1)}}{d\epsilon} = f^z U(\epsilon) U_\epsilon^{(n)}. \quad (I6)$$

МДИ можно сформулировать следующим образом. Допустим, что мы сумели вычислить конечное число членов ряда (I5). Подберем некоторое рекуррентное соотношение (I6), выполняющееся для всех этих членов, и опустим в нем верхние индексы  $(n)$ ,  $(n+1)$ , превратив это соотношение в уравнение (I4). Мы получаем таким образом приближение к точному уравнению (I4). Находя его решения  $W_i(\epsilon)$  и  $W_z(\epsilon)$  и сравнивая (I5) с (I2), можно найти (после пере-

хода к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$  и перенормировки) некоторое конечное число членов ряда модифицированной ТВ. (При этом особенность по  $f^2$  возникает после предельного перехода). В описанной модели этот метод позволяет получить точные выражения членов ряда модифицированной ТВ, если уравнение (14) решается точно. Для приближенного решения этого уравнения обычно удается пользоваться приближенными методами, используя малость параметра  $\epsilon$ . В частности, полезна асимптотическая ТВ, квазиклассическое приближение и т.д.

При использовании этих методов в теории поля остаются некоторые неопределенные параметры. Часть их связана с константами перенормировки, число которых определяется группой перенормировок теории. Новые неопределенные параметры, по-видимому, не связанные с обычным константам перенормировки, возникают в тех случаях, когда эффективный потенциал оказывается не отталкивающим, а притягивающим. Эти параметры можно зафиксировать, сравнивая полученные выражения с экспериментальными данными. Возможность их теоретического определения пока не выяснена.

Отметим, что суммирование лестничных диаграмм позволяет получить разумные приближения при  $s \rightarrow \infty$  и малых  $t < 0$ . Например, сумма всех диаграмм

$$t \rightarrow \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}^s$$

в теории (6) имеет асимптотику при  $s \rightarrow \infty$ , не противоречащую условию унитарности. При  $s \leq G^{-1}$  амплитуда растет, но при  $s \sim G^{-1}$  ее поведение резко изменяется и оказывается ограниченным при  $s \rightarrow \infty$  (качественно характер поведения амплитуды близок к поведению сечения рассеяния на потенциале "твердой сердцевины").

Таким образом, оставляя без внимания технические трудности и необходимость более строгого математического обоснования, мы

можем сказать, что имеющиеся методы, в принципе, позволяют производить вычисление высших приближений в неперенормируемых теориях поля. Однако при попытках применения этих методов к конкретным теориям, например, к слабым взаимодействиям лептонов, возникают новые проблемы, которые мы кратко обсудим в следующем параграфе.

### § 3. Слабые взаимодействия лептонов

Наиболее привлекательной чертой теории слабого взаимодействия в форме (6) или (7) является его универсальность. Применяя любой из описанных выше методов, мы, однако, получаем следующий огорчительный результат; поправки от высших приближений существенно разрушают универсальность исходной теории. Проще всего это увидеть, рассмотрев диаграммы теории возмущений для процессов  $\nu_e \mu^- \rightarrow \nu_\mu e^-$  и  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ . С точностью до второго порядка ТВ амплитуды этих процессов можно записать в виде  $G(1 + c_i G \Lambda^2 + \dots)$ , причем константы  $c_i$  для обоих процессов различны. Если мы попытаемся устранить главные расходимости ренормировкой, то получим

$$\begin{aligned} F_1(\nu_e \mu^- \rightarrow \nu_\mu e^-) &= Z_1 G \left[ 1 + c_1 G \Lambda^2 + \dots \right] \left[ 1 + G(d_1 m^2 \ln \frac{1}{m} + d'_1) + \dots \right], \\ F_2(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) &= Z_2 G \left[ 1 + c_2 G \Lambda^2 + \dots \right] \left[ 1 + G(d_2 m^2 \ln \frac{1}{m} + d'_2) + \dots \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $c_1 \neq c_2$ . Поэтому константы ренормировки  $Z_1$  и  $Z_2$  оказываются различными и универсальность исходной теории оказывается полностью разрушенной. Подчеркнем, что отмеченное только что разрушение универсальности остается и после использования различных методов суммирования бесконечного множества диаграмм Фейнмана и, по-видимому, ни один из предложенных до сего времени методов вычисления высших приближений в  $H$ -теориях не позволяет избавиться от этого внутрен-

нега дефекта теории слабого взаимодействия лептонов.

Это обстоятельство, а не наличие неперенормируемых расходимостей породило многочисленные попытки построения новой теории слабого взаимодействия лептонов. Во всех подобных теориях приходится вводить большое число не наблюдавшихся в природе частиц и весьма сложные гипотезы о характере взаимодействий между ними. Хотя это, по-видимому, и позволяет построить перенормируемую теорию слабого взаимодействия лептонов  $W$ -бозонами, нам кажется преждевременным полностью отказаться от четырехфермионной теории. Как будет показано ниже, можно построить такую четырехфермионную теорию, которая не противоречит существующим опытным данным и в которой универсальность исходного лагранжиана взаимодействия не разрушается высшими приближениями, несмотря на неперенормируемый характер возникающих в ней расходимостей.

Прежде чем перейти к изложению этой теории, отметим, что обсуждавшаяся основная трудность четырехфермионной теории взаимодействия лептонов не кажется столь непреодолимой в случае слабых процессов с участием адронов. Известный результат о квадратичной расходимости матричных элементов в процессах с участием адронов основан на использовании техники Бьеркена - Джонсона - Лоу - канонических коммутационных соотношений между плотностями адронных токов. Предположения, лежащие в основе этого, носят формальный характер и результаты, вообще говоря, не выполняются для членов ряда теории восполнений в теории поля. Поэтому вряд ли можно считать этот результат твердо установленным. В целом же проблема расходимостей в слабых процессах с участием адронов столь тесно связана с вопросом о природе сильных взаимодействий, что какие-либо однозначные выводы сделать пока невозможно.

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы построить истинно универсальную теорию слабого взаимодействия лептонов, в кото-

рой старшие расходимости для всех лептонных процессов можно было бы устраниć с помощью одной константы ренормировки. С этой целью мы рассмотрим слабое четырехфермионное взаимодействие, обладающее более высокой внутренней симметрией, чем обычное. Высшие лептонные симметрии  $O(3)$ ,  $O(5)$ ,  $SU(3)$  рассматривались ранее различными авторами. Можно показать, что  $O(5)$  или  $SU(3)$  - симметрия запрещает распад  $\mu \rightarrow e\gamma$ , и с необходимостью должна быть существенно нарушенной. В  $O(3)$  -симметричной теории универсальность в высших порядках нарушается.

Мы предположим, что лагранжиан слабого взаимодействия лептонов инвариантен относительно вращений и отражений ( $R(4)$ ) в четырехмерном лептонном "изопространстве" (лептонном пространстве). Лептоны и антилептоны описываются четырехкомпонентными спинорами этого пространства  $\Psi = (\nu_e e^- \nu_\mu \mu^-)$ ,  $\bar{\Psi} = (\bar{\nu}_e \bar{e}^- \bar{\nu}_\mu \bar{\mu}^-)$ , где  $\bar{l} = l^\dagger \gamma_5$  ( $l$  - обычный спинор Дирака). Для того чтобы сформулировать теорию, введем четырехрядные матрицы  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), удовлетворяющие перестановочным соотношениям  $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$ .

Наиболее общее четырехфермионное взаимодействие, инвариантное относительно  $R(4)$ , удобно получить из лагранжиана с двумя нейтральными  $W$  - бозонами

$$\mathcal{L}_{int} = g \left[ \bar{\Psi} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Psi W_1^\mu + \bar{\Psi} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \alpha_5 \Psi W_2^\mu \right], \quad (18)$$

где  $\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ,  $W_1^\mu$  - скаляр, а  $W_2^\mu$  - псевдоскаляр относительно  $R(4)$  - преобразований. Кроме обычных лептонных процессов, в этой теории предсказываются следующие:  $\mu \rightarrow e \nu_e \bar{\nu}_\mu$  (обычный распад  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ),  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$ ,  $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^-$  и т.д.

Основное предсказание этой теории, не зависящее от отношения масс  $W$  - бозонов, состоит в том, что  $\frac{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu)} = 1$ . Пред-

сказание для  $G(\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-)$  зависит от  $m_{\nu_1}/m_{\nu_2}$  (если  $m_{\nu_1} = m_{\nu_2}$ , то  $G(\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-) = \frac{1}{2} G_{V-A}(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-)$ ), что не противоречит существующим экспериментальным данным).

Нетрудно убедиться, что в этой теории нет трудности. Для этого достаточно выполнить преобразование Штюкельберга над полями  $W_1$  и  $W_2$ . Тогда неперенормируемые расходимости будут возникать за счет лептонных массовых членов (неполиномиальное взаимодействие) и за счет трех слагаемых членов (омальной особенности). При условии, что обрезание происходит в старом пределе  $\Lambda_v \sim G^{-1/2}$ , высшие приближения дают лишь малые добавки к основным приближениям и не могут нарушить универсальность исходной теории. (Это происходит потому, что таких членов как  $\sim G\Lambda^2$ ,  $\sim G^3\Lambda^4$  и т.д. в (I7) теперь просто не будет, а члены  $\sim G\ln\frac{\Lambda}{m}$ ,  $\sim G^2\Lambda^2\ln\frac{\Lambda}{m}$  при  $\Lambda \sim \Lambda_v \sim G^{-1/2}$  малы).

Таким образом, эта теория (с  $W$ -бозонами или без них) свободна от основных недостатков обычной  $V-A$  теории слабого взаимодействия, и решить её судьбу может лишь эксперимент.

#### § 4. Суперпропагаторы как потенциалы

Перейдем теперь к теориям с неполиномиальным взаимодействием, в которых роль потенциала играет суперпропагатор. Для этого сначала кратко опишем простейший способ построения безмассовых суперпропагаторов в импульсном пространстве.

Рассмотрим функцию

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (-x)^n [n!(n+1)!]^{-1}, \quad x \equiv g^2 p^2 (16\pi^2)^{-1}, \quad (19)$$

которая с точностью до тривиального множителя и члена  $\sim \delta(p^2)$  совпадает с мнимой частью суперпропагатора (5) на разрезе  $p^2 < 0$ .

Нетрудно проверить, что

$$\delta_x (\delta_x + 1) F_1 = -x \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+3}/c_{n+2}) c_{n+2} (-x)^n [n!(n+1)!]^{-1}, \quad (20)$$

где  $\delta_x = x \frac{d}{dx}$ . Положим  $R(z+1) = C_{n+1} / C_{n+2}$  и допустим, что существует функция  $R(z+1)$  комплексного переменного  $z$ , удовлетворяющая условиям Карлсона и совпадающая с  $R(n+1)$  при  $z=n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Тогда такая функция единственна, и можно однозначно определить оператор  $R(\delta+1)$ . Из (20) следует, что  $F_1$  есть единственное решение уравнения

$$[\delta_x(\delta_x + 1) + x R(\delta_x + 1)] F_1(x) = 0 \quad (21)$$

с граничным условием  $F_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} C_2$ . Это уравнение имеет также решение  $F_2(x)$ , удовлетворяющее условию  $x F_2(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$ . Это решение аналитично в  $x$ -плоскости с разрезом  $-\infty < x < 0$ , причем её скачок на разрезе равен  $-2\pi i F_1(x)$ . Таким образом  $F_2(x)$  можно взять в качестве суперпропагатора. Однако такому же граничному условию удовлетворяет и функция  $F = F_2 + C F_1$ , где  $C$  - произвольная константа. Для широкого класса суперпропагаторов можно выбрать константу  $C$  так, что выполнено условие

$$\operatorname{Re} F(x) / \operatorname{Im} F(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty \quad (22)$$

Это условие однозначно фиксирует  $C$  и определяет суперпропагатор как единственное решение уравнения (21) с граничными условиями (22) и  $x F_2 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$ . Представляется очень желательным показать, что это условие определяет единственный суперпропагатор в каком-то достаточно общирном классе функций. Эта задача пока не решена, однако, если потребовать, чтобы

$$\operatorname{Re} F(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (23)$$

то в классе локализуемых функций легко доказывается теорема единственности. Если два суперпропагатора  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  удовлетворяют условию локализуемости по Джарфе и условию (23), то  $\mathcal{D} = F^{(1)} - F^{(2)}$

есть целая функция порядка  $< 1/2$  и  $\mathcal{D}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ . Из теоремы Фраг-  
мена-Линдельёфа следует тогда, что  $\mathcal{D}(x) \equiv 0$ .

Можно показать, что суперпропагатор, удовлетворяющий условию (23), получается аналитическим продолжением по константе связи  $g^2$  из решения уравнения (21),  $f$  при  $g^2 > 0$  с граничными условиями

$$\bar{F}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad x \bar{F}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1. \quad \text{При этом}$$

$$F(g^2, p^2) = \frac{1}{2} [\bar{F}(-g^2 e^{i\pi}, p^2) + \bar{F}(-g^2 e^{-i\pi}, p^2)], \quad g^2 > 0, \quad (24)$$

удовлетворяет уравнению (21) и условию (22). Переход  $g^2 \rightarrow -g^2 < 0$  можно рассматривать как регуляризацию теории в евклидовых переменных, и это отчасти оправдывает использование нашего рецепта (не требующего перехода к евклидовским импульсам). Заметим также, что аналитическое продолжение по  $g^2$  является удобным приемом для вычисления фурье-преобразования суперпропагаторов в евклидовых переменных.

Основываясь на этих замечаниях, можно теперь работать с суперпропагаторными потенциалами непосредственно в  $p$ -пространстве или же с помощью преобразования Фурье переходить в  $\tau$ -пространство. Заметим, что минимум части (19) при  $c_n = 1$  соответствует потенциал

$$V(\tau) = V.P. \quad f^2 (\tau^2 - \theta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta^2 = g^2/4\pi^2. \quad (25)$$

Этот потенциал представляет особый интерес, так как для него можно получить ряд точных решений уравнений Шредингера и Бете-Солитера. Интересен он и с точки зрения приложений к составной модели адронов.

На примере этого потенциала можно посмотреть, как следуетставить граничную задачу. Из условия непрерывности плотности потока вероятности и уравнения Шредингера вытекает, что в точке  $x = \theta$  должно быть выполнено условие

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u'(\theta + \varepsilon) - u'(\theta - \varepsilon)] = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\theta + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\theta - \varepsilon). \quad (26)$$

Аналогично можно получить граничные условия для других потенциалов. Интересно отметить, что при достаточно сильной сингулярности в точке  $r=b$  потенциал становится непроницаемым, т.е. плотность потока вероятности в точке  $b$  обращается в нуль. Так, уже потенциал  $V(r) = \Theta(r-b)(r^2 - b^2)^{-1}$  непроницаем, т.е. коэффициент прохождения через определяемый им барьер равен нулю. Потенциал (25) при малых значениях  $k > 0$  и  $b=0$  слабо проницаем и в образованной им ловушке образуются узкие резонансы. С ростом  $k$  эта ширина этих резонансов логарифмически растет. Траектории Редже, соответствующие связанным состояниям и резонансам, неограниченно растут. Поведение этих траекторий при  $k \rightarrow \infty$  не представляет особого интереса для приложений, так как при больших  $k$  задача становится существенно многоканальной.

### § 5. Применение СКР – потенциала к моделям составных адронов

Приведём сначала некоторые результаты, относящиеся к решению уравнения Шредингера с потенциалом (25). При  $k=0$ , решение уравнения Шредингера можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$u(r) = \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}} \left[ \Theta(b-r) F\left(\frac{\lambda + \Gamma}{2}, \frac{\lambda - \Gamma}{2}; \lambda + 1; \frac{r^2}{b^2}\right) + \right. \\ \left. + C \Theta(r-b) F\left(\frac{\lambda + \Gamma}{2}, -\frac{\lambda + \Gamma}{2}; \lambda + 1; \frac{r^2}{b^2}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^{-\lambda - \Gamma} \right]$$

$$C = \frac{\Gamma(\lambda + 1) \Gamma\left(\frac{\Gamma - \lambda}{2} + 1\right)}{\Gamma(\Gamma + 1) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda - \Gamma}{2}\right)}, \quad \Gamma = \sqrt{\lambda^2 + f^2}, \quad \lambda = t + \frac{1}{2}, \quad (25) \\ \text{или} \quad \lambda = n + 1, \quad (7)$$

Граничное условие (26) в точке  $r=b$  выполнено лишь в том случае, если

$$\sqrt{\lambda^2 + f^2} - \lambda = N, \quad N = 1, 3, 5, \dots \quad (28)$$

отсюда получаем точное условие квантования траекторий Редже при  $k=0$  ( $\lambda \rightarrow \ell + \frac{1}{2}$  для ЧШ,  $\lambda \rightarrow \alpha + 1$  для (7)):

$$\ell(k=0) = \frac{f^2}{2N} - \frac{N+1}{2}, \quad \alpha(k=0) = \frac{f^2}{2N} - \frac{N+2}{2}$$

$$\ell_{\max}(k=0) = \frac{f^2 - 2}{2}, \quad \alpha_{\max}(k=0) = \frac{f^2 - 3}{2}. \quad (29)$$

Заметим, что из условия квантования (29) следует простой результат для числа связанных состояний  $n_\ell$  с физическими значениями  $\ell$ :  $n_\ell = \left[ \frac{f^2}{2} \right]$ , где квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа. (Предполагается, что есть обменное вырождение, т.е. каждому целому  $\ell$  на траектории соответствует связанные состояния; состояние с  $k=0$  также считается связанным.) Отсюда следует, что при достаточно больших  $f^2$  состояния, лежащие на траектории, вообще не могут распадаться на составляющие частицы, которые, таким образом, удерживаются в области пространства  $r \leq b$ .

Для потенциала  $V = f^2 [2\ell(\tau - \beta)]^{-1}$  можно получить точное решение уравнения Шредингера при  $\ell = 0$  и любых значениях  $k^2$ . Так как  $\frac{f^2}{\tau - \beta} = \frac{f^2}{2\beta}(\tau - \beta)^{-1} - \frac{f^2}{2\beta}(\tau + \beta)^{-1}$ , то этот потенциал можно взять в качестве первого приближения к потенциалу (25), учитывая член  $\sim (\tau + \beta)^{-1}$  как возмущение. Полагая  $p^2 = -k^2 \beta > 0$ , найдём условие для определения связанных состояний в виде

$$\pi\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu) M_{\nu, \nu_2}(2p) + \Gamma(1-\nu) W_{\nu, \nu_2}(2p) = 0, \quad (30)$$

где  $\nu = f^2/4p$ ,  $M_{\nu, \nu_2}$  и  $W_{\nu, \nu_2}$  — функции Уиттекера, связанные с вырожденной гипергеометрической функцией. Если  $2p \gg 1$ ,  $2p \gg \nu$ , то можно воспользоваться асимптотическими формулами для  $M$  и  $W$ . Так как  $M \gg 1$ , а  $W \ll 1$ , то должно быть  $\nu \sim 1/2$ . Учитывая поправки к этому значению  $\nu$  методом

итераций, получаем, что  $p \sim \frac{f^2}{2} \left(1 + \frac{4}{\pi} f^2 e^{-f^2}\right)^{-1}$ . Условие применимости этой формулы для наименшего связанных состояния есть  $f^2 \gg 1$ . При этом вклад в  $p^2$  члена  $\sim (r + \theta)^{-1}$  оказывается порядка  $f^2/3$ , т.е. окончательно получаем

$$p^2 \simeq \frac{f^4}{4} \left(1 + \frac{4}{\pi} f^2 e^{-f^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{f^2}{3}. \quad (31)$$

В дальнейшем для численных оценок мы часто будем пользоваться значением  $f^2 = 4$ , при этом  $p^2 \simeq 4,67 \approx 4,7$ .

Чтобы воспользоваться этими результатами для более реальной задачи, возьмём вместо уравнения Шредингера уравнение (7), в котором заменим  $M^2$  на  $(\frac{5}{4} - k^2)$  и представим  $\alpha(s)$  в виде  $\alpha(s) = \alpha(c) + \alpha' s$ . Тогда  $\alpha(4M^2) = \alpha(0) + 4M^2 \alpha' = \frac{f^2 - 3}{2}$ , и для скалярного или псевдоскалярного состояния  $\alpha(c) + 4(M^2 - k^2) = 0$ . Для "π-мезона"  $\alpha(0) \approx 0$ , т.е.  $f^2 \approx 8M^2 \alpha' + 3$ . Считая, что  $\alpha' \approx 1$ , находим для "кварковой" модели ( $M^2 \approx \frac{1}{8}$ ),  $f^2 \approx 4$ , а для модели Ферми-Линга ( $M^2 \approx 1$ ),  $f^2 \approx 11$ . Так как  $(k^2 \approx M^2)$ , то

$$f^2 \sim \frac{f^4}{4M^2} = \frac{(8M^2 + 3)^2}{4M^2} \sim 30 \text{ при } M^2 \sim 1$$

$$\sim 32 \text{ при } M^2 \sim 1/8,$$

т.е.  $f \sim 5.5$ ,  $\theta \sim 5.7$ . Таким образом, параметр  $f$  весьма слабо зависит от масс составляющих частиц и соответствует массе 170-180 МэВ.

Для самой грубой оценки мы предположили, что траектории Редже линейны по  $s$ , по крайней мере, в интервале порядка 1 ГэВ. На самом деле это приближение слишком грубо, и линейный рост траекторий при  $s > 0$ , видимо, связан с наличием многих каналов распадов частицы, лежащей на траектории. При  $s \leq 0$  эффектами этих каналов разумно пренебречь и необходим более

аккуратный расчёт траекторий Редже, определяемых простым одноканальным уравнением Шредингера. Этот расчёт удобно выполнить квазицлассическим методом.

Для построения квазицлассических решений удобно воспользоваться методом Цваана-Комбла, используя известные разложения точных решений вблизи полюса потенциала при  $\gamma = \frac{1}{6}$ . Опуская подробное рассмотрение, мы приведём здесь лишь конечный результат для квазицлассических волновых функций связанных состояний. Сдвигая обычным образом решения слева и справа от классической точки поворота  $\gamma_0 < \frac{1}{6}$ , получим, что

$$u(x) \sim C \exp \left( - \int_x^{\gamma_0} |Q| dx \right), \quad 0 < x < x_0, \quad (32)$$

$$u(x) \sim 2C |Q|^{-1/2} \sin \left( \int_{x_0}^x |Q| dx + \frac{\pi}{4} \right), \quad x_0 < x, \quad (33)$$

где  $x = \gamma / \delta$ ,  $x_0 = \gamma_0 / \delta$ ,  $C$  - нормировочная константа

$$G(x) = p^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} + \frac{f^2}{x^2-1}, \quad G(x_0) = 0. \quad (34)$$

С другой стороны, рассмотрим точные решения  $u_1$  и  $u_2$ , разложения которых вблизи точки  $x = 1$  имеют вид:

$$u_1(x) \underset{x \rightarrow 1}{\approx} (x-1) + \frac{f^2}{4} (x-1)^2 + \dots, \quad (35)$$

$$u_2(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} - \left[ 1 + \frac{f^2}{2} u_1(x) \ln |x-1| + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-1)^n \right]. \quad (36)$$

Можно показать, что квазиклассическая асимптотика этих решений имеет вид ( $a^2 \equiv 1/2\pi f^2$ ):

$$u_1(x) \sim \frac{2a}{|Q|^{1/2}} \cos \left( \int_x^1 |Q| dx + \frac{\pi}{4} \right), \quad x_0 < x < 1, \quad (37)$$

$$u_1(x) \sim \frac{a}{|Q|^{1/2}} \exp \left( \int_1^x |Q| dx \right), \quad 1 < x, \quad (38)$$

$$u_2(x) \sim \frac{1}{2a|Q|^{1/2}} \cos \left( \int_x^1 |Q| dx - \frac{\pi}{4} \right), \quad x_0 < x < 1, \quad (39)$$

$$u_2(x) \sim -\frac{1}{2a|Q|^{1/2}} \exp \left( -\int_1^x |Q| dx \right), \quad 1 < x. \quad (40)$$

При  $x < 1$  решение (33) можно представить теперь как следующую линейную комбинацию квазиклассических выражений для  $u_1$  и  $u_2$

$$\sim u_1 \frac{\cos \delta}{a} - u_2 4a \sin \delta, \quad \delta \equiv \int_{x_0}^1 |Q| dx. \quad (41)$$

Условие убывания решения при  $x > 1$  приводит, таким образом, к условию квантования

$$\cos \delta = 0, \quad \delta = N \frac{\pi}{2}, \quad N = 1, 3, 5, \dots \quad (42)$$

Нормировочный коэффициент  $C$  приближенно определяется из условия

$$\int_{x_0}^1 dx u^2(x) \sim 2C \int_{x_0}^1 \frac{dx}{|Q|} \sim 1. \quad (43)$$

Все встречающиеся в написанных выше формулах интегралы

можно выразить через стандартные эллиптические интегралы.

Легко показать, что в двух рассмотренных выше случаях, в которых известны точные решения, квазиклассический метод также даёт точный результат. В случае  $f^2=4$ ,  $\lambda=1/2$  формула (31) дала значение  $p^2=4.68$ , а квазиклассическое условие (42) даёт  $p^2=4.75$ . Это позволяет доверять квазиклассическому приближению и при других значениях  $\lambda$  и  $p^2$ . В частности, в "кварковой" модели "π-мезона" ( $f^2=4$ ,  $\alpha=0$ ,  $\lambda_\pi=1$ ) получаем  $p_\pi^2 \approx 2.96 \sim 3$ , что несколько больше, чем значение  $p_\pi^2 \approx 2.35$ , которое можно получить линейной экстраполяцией между точно вычисленными значениями  $p^2(\alpha=1/2)=0$  и  $p^2(\alpha=-1/2) \approx 4.7$ . Пользуясь этими расчётами, нетрудно оценить параметр наклона траектории Редже вблизи  $\alpha=0$ :  $\alpha' = dx/ds|_{x=0} \approx 8^2/20$ , т.е.  $\alpha' \sim 1$  при  $v \sim 4.5(\text{Гэв})^{-1} \sim 0.9\text{ф}$ .

Интересно получить оценку поведения зарядового формфактора "π-мезона". Помимо пренебрежимо малыми относительными эффектами и считая, что "π-мезон" составлен из одной заряженной и одной нейтральной частицы, мы можем выразить формфактор через волновую функцию  $u(\gamma)$ :

$$F(q^2) = \int_0^\infty d\gamma \frac{\sin q\gamma}{q^2} u^2(\gamma) \quad (44)$$

Тогда сротнеквадратичный радиус распределения заряда равен

$$\langle \gamma^2 \rangle = 6 \left| \frac{dF}{dq^2} \right|_{q^2=0} = \frac{6^2}{\epsilon} \int_0^\infty dx x^2 u^2(x), \quad x = \frac{\gamma}{\theta}. \quad (45)$$

В том же приближении, в котором вычислялся нормировочный коэффициент с функции  $u(x)$  (см. (43)), получаем

$$\int_0^\infty dx x^2 u^2(x) \sim \int_{x_0}^1 dx x^2 u^2(x) \sim 2 \int_{x_0}^1 dx \frac{x^2}{|Q|}. \quad (46)$$

Вычисления интегралы (43) и (46) при  $f^2=4$ ,  $\lambda=1$ ,  $p^2=3$ , находим, что

$C^2 \sim 1/\lambda$  и  $\langle \gamma_n^2 \rangle \sim 0.46 \theta^2$ . При  $\theta \sim 4.5$  получаем  $\gamma_n \sim 0.63 \gamma$ , что почти совпадает с предсказанием модели векторной доминантности для  $\pi$ -мезона и несколько меньше значения, которое получено в последних экспериментах. Принимая во внимание грубость принятых нами приближений, полное пренебрежение всеми юстировочными эффектами и отсутствие сколько-нибудь убедительных данных о наклоне траектории для  $\pi$ -мезона, мы можем признать этот результат обнадёживающим и свидетельствующим о том, что применение СКР-потенциалов к более реалистичным моделям составных адронов позволит получить разумные результаты, пользуясь лишь двумя параметрами: универсальным параметром  $\theta$ , определяющим наклон траектории Редже и константой связи  $f$ , определяющей пересечение траекторий.

В заключение проведем некоторые ссылки на статьи, в которых можно найти более подробное изложение описанных выше методов и подробную библиографию. Методы, кратко рассмотренные в §§ I, 2, изложены в докладе автора на втором совещании по калоидальной теории поля (Лазу, СССР, 1970 г.) и в работе В. Гогохия и автора (ЯФ, 15 (1972) 1294). По теории слабого взаимодействия лептонов см. доклад автора на конференции по физике нейтрино (Балатонфюред, Венгрия, 1972 г.). По теории суперпронагатоев см. работу: *N Atakishiev, A F. Filippov, Comm Math Phys*, 24 (1971) 74. Идеи, описанные в последнем параграфе, впервые были предложены в докладе автора на Международной конференции по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистики, Москва, 1972 г. (см. препринт ОИЯИ, Е2-6936, Дубна, 1973 г.).

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

С.М. Биленский

Объединенный институт ядерных исследований

## I. ВВЕДЕНИЕ

Мы обсудим следующие вопросы физики слабых взаимодействий:

- 1) о диагональных членах гамильтониана,
- 2) о взаимодействии между нейтрино,
- 3) о различных формах сохранения лептонных чисел,
- 4) о проверке СРТ(Т) - инвариантности в распадах нейтральных К - мезонов.

Будут рассмотрены такие взаимодействия, которые исследовались на опыте в последние годы, а также те, которые будут изучаться в ближайшее время.

Гамильтониан универсальной  $V-A$  теории слабых взаимодействий имеет вид

$$H = \frac{e}{\sqrt{2}} \bar{f}_x f_x^+ \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_x &= (\bar{\chi}_e (1 + \gamma_5) \nu_e) + (\bar{\nu}_e \gamma_5 (1 + \gamma_5) \nu_e) + f_x^h \quad (2) \\ f_x^h &= f_x^h (\alpha' = 0) + f_x^h (\alpha' S = 1) \quad \text{— адронный ток} \end{aligned}$$

Другая формулировка универсальной теории слабых взаимодействий — теория с промежуточным бозоном, лагранжиан которой имеет вид

$$H = i g f_x W_x + \text{с.с.} \quad (3)$$

Напомним, что промежуточный бозон до сих пор не найден. Из нейтриноных экспериментов ЦЕРН'а следует, что  $m_W > 1,8$  Гэв. Если масса  $W$ -бозона меньше 10-15 Гэв, он может быть обнаружен в Ба-

тавии. На встречных пучках ЦЕРН'a промежуточный бозон может быть обнаружен, если  $W \leq 40$  ГэВ.

На следующие основные вопросы даются ответы уже выше 15 лет:

1) действительно ли эксперимент описывается гамильтонианом  
(1) ((2))?

2) нет ли дополнительных членов в гамильтониане слабых взаимодействий?

В последние годы было показано, что определенного вида дополнительные члены делают теорию перенормируемой (модели Вайнберга). Поиск новых взаимодействий становится чрезвычайно интересным.

Разобьем гамильтониан (1) на две части - диагональную и недиагональную

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{di} + \mathcal{H}_{ndi} \quad (4)$$

где

$$\mathcal{H}_{di1} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{e} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_e) (\bar{\nu}_e \gamma_a (1 + \gamma_5) e) \quad (5)$$

$$\mathcal{H}_{di2} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\mu} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_\mu) (\bar{\nu}_\mu \gamma_a (1 + \gamma_5) \mu) \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_{di3} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[ \bar{f}_a (\Delta S=0) f_a^T (\Delta S=0) + \bar{f}_a (\Delta S=1) f_a^T (\Delta S=1) \right] \quad (7)$$

а  $\mathcal{H}_{ndi}$  - все остальные члены.

Наиболее изучены недиагональные процессы. При этом данные опыта согласуются с предсказаниями универсальной  $V-A$  теории. Следует, однако, иметь в виду, что точность, с которой проверена эта теория, в большинстве случаев невелика. Мы проиллюстрируем это утверждение на примере  $\pi$  - распада, где имеются наиболее точные измерения. Спектр позитронов от распада полностью поляризованного  $\pi$  - мезона в общем случае четырехфермионного взаимодействия имеет вид

$$\frac{d^2\Gamma}{dE_{el}dx} = A(x; \rho, \gamma) + \xi \cos \Theta B(x; \delta), \quad (8)$$

где  $x = \frac{\rho}{P_{max}}$  ( $\rho$  - импульс позитрона),  $\Theta$  - угол между направлением вектора поляризации  $\mu^+$  и импульсом  $e^+$ , параметры  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$  и  $\delta$  выражаются через константы взаимодействия. В случае  $V-A$  теории

$$\xi = \frac{3}{4}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -1, \quad \delta = \frac{3}{4}. \quad (9)$$

Из опыта

$$\xi = 0,7518 \pm 0,0026, \quad \gamma = -0,12 \pm 0,21, \quad \delta = -0,973 \pm 0,014, \\ \delta = 0,7540 \pm 0,0085. \quad (10)$$

Для констант отсюда следует

$$\frac{g_A}{g_V} \approx 0,33; \quad \frac{g_P}{g_V} < 0,33; \quad \frac{g_T}{g_V} < 0,28; \\ 0,76 \sim \left| \frac{g_A}{g_V} \right| \sim 1,20; \quad \phi_{AV} = 180^\circ \pm 15^\circ. \quad (II)$$

Теперь мы перейдем к обсуждению наименее изученных диагональных членов.

## 2. Диагональные процессы

Если в гамильтониане слабых взаимодействий имеется член (7), то в ядерных реакциях возникнут эффекты нарушения четности. Такие эффекты наблюдались и они качественно подтверждают наличие нарушающих четность ядерных взаимодействий первого порядка по  $G$ . В экспериментах <sup>1</sup> для циркулярной поляризации  $\gamma$ -квантов от распада неполяризованных ядер получено

$$Te^{181} \quad P_\gamma = -(6 \pm 1) \cdot 10^{-6}, \\ Lu^{175} \quad P_\gamma = (4 \pm 1) \cdot 10^{-5}. \quad (12)$$

В опыте <sup>2</sup> наблюдался запрещенный по четности распад

$$0^{16} - \text{Cl}^2 + \alpha \quad (13)$$

$$(2^-) \quad (0^+)$$

Ширина этого распада оказалась равной  $\Gamma = (1,02 \pm 0,28) 10^{-10} \text{ eV}$ , что соответствует примеси состояния  $2^+$  с амплитудой  $|F| = 2,6 \cdot 10^{-7}$ .

Информацию о взаимодействии (6) можно получить путем изучения процесса образования на ядрах пары  $\mu^+ - \mu^-$  пучком  $\nu_\mu$

$$\nu_\mu + Z \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \nu_\mu + Z. \quad (14)$$

Этот процесс не наблюдался. Из экспериментов по поиску  $W$ -бозонов на пучках  $\nu_\mu$  следует, что <sup>3</sup>

$$G_{\nu_\mu \mu} < 20 \text{ G.} \quad (15)$$

Планируемые в Серпухове и Батавии опыты позволят наблюдать (14), если  $G_{\nu_\mu \mu} > G$ .

Взаимодействие (5) приводит к рассеянию электронного нейтрино на электроном. Этот процесс до сих пор не наблюдался. Лучшая верхняя граница получена в опыте <sup>4</sup> по поиску процесса

$$\bar{\nu}_e + e \rightarrow \bar{\nu}_e + e \quad (16)$$

на пучке медленных антинейтрино от реактора. В этом эксперименте получено

$$\sigma_{\nu_e e} < 1,7 \sigma_{V-A}, \quad (17)$$

где  $\sigma_{V-A}$  — сечение, вычисленное с помощью (5).

В настоящее время процесс  $\nu_e - e$  рассеяния интенсивно обсуждается в связи с единой теорией слабых и электромагнитных взаимодействий Вейнберга <sup>5</sup>. В этой теории вводятся два калибровочных векторных поля (триплет и синглет) и, соответственно, возникают две безразмерные константы взаимодействия  $g$  и  $g'$ . Лептонная часть лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{i\mathcal{G}'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \bar{e} \gamma_\mu e A_\mu + \left[ \frac{i\mathcal{G}}{2\sqrt{2}} (\bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_e) W_\mu + \text{c.c.} \right] + \\
 & + i \frac{1}{4} (g^2 + g'^2)^{1/2} (\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_e) Z_\mu + \\
 & + i \frac{1}{2} (g^2 + g'^2)^{1/2} \bar{e} \left[ \frac{1}{2} (g'^2 - g^2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) + g'^2 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right] c Z_\mu + \\
 & + (e \rightarrow \mu).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь  $A_\mu$  — оператор электромагнитного поля,  $W_\mu$  и  $Z_\mu$  — операторы полей заряженного и нейтрального промежуточных бозонов.

Из (18) следует

$$\left( \frac{\mathcal{G}'}{g^2 + g'^2} \right)^{1/2} = e \quad \cdot \quad \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \tag{19}$$

где  $m_W$  — масса  $W$  — бозона,  $e$  — заряд электрона, а  $G$  — константа  $\mu$  — распада.

Три параметра теории Вайнберга ( $g$ ,  $g'$  и  $m_W$ ) выражаются через  $G$  и  $e$ . Таким образом, остается один свободный параметр. Из (18) получаем

$$\begin{aligned}
 g^2 &= e^2 \left( 1 + \frac{g'^2}{g'^2} \right), \\
 g'^2 &= e^2 \left( 1 + \frac{g^2}{g^2} \right), \\
 m_W^2 &= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G} \left( 1 + \frac{g^2}{g'^2} \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что из последнего соотношения следует известное неравенство

$$m_W \geq \left( \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G} \right)^{1/2} = 37,3 \text{ Гев.} \tag{21}$$

В низшем порядке теории возмущений в матричный элемент процесса

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e \quad (22)$$

дает вклад следующие диаграммы

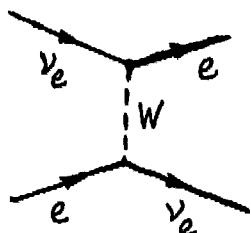


Рис.1.

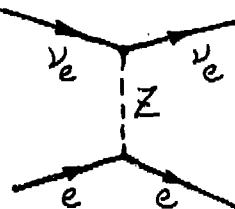


Рис.2.

Если эффективный гамильтониан записать в виде

$$\mathcal{H} = \frac{G}{V_2} (\bar{\nu}_e) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e (\bar{e}) \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) e, \quad (22)$$

то для констант  $g_V$  и  $g_A$  имеем

$$g_V = 1 + \left(-\frac{1}{\alpha} + 2 \sin^2 \theta_W\right) \quad (23)$$

$$g_A = 1 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right),$$

где

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (24)$$

Отметим, что члены в скобках в выражении (23) представляют собой вклады второй диаграммы. В работе<sup>6</sup> из опыта Райнаса и др.<sup>4</sup> получено

$$\sin^2 \theta_W \leq 0,35.$$

Из теории Вайнберга следует также, что в первом порядке по  $G$  разрешен процесс

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e. \quad (25)$$

В матричный элемент этого процесса дает вклад только диаграмма рис.2. Для соответствующих констант находим

$$g_V^{(1)} = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \Theta_W, \quad g_A^{(1)} = -\frac{1}{2}. \quad (26)$$

Полученная из опытов ЦЕРН<sup>а</sup> верхняя граница сечения процесса (25)

$$\sigma_{\nu_e e} < 0,4 \sigma_{V-A} \quad (27)$$

не накладывает ограничений на  $\sin^2 \Theta_W$ . Планируемые в Серпухове и Батавии опыты позволят зарегистрировать процесс (25), если его сечение не меньше того минимального значения, которое предсказывается теорией Вайнберга.

### 3. $\nu - \nu$ взаимодействие

Мы знаем, что нейтрино с  $e$ ,  $\mu$  и адронами взаимодействует слабо. Что известно о взаимодействии нейтрино с нейтрино? Этот вопрос был поставлен в работах <sup>7,8</sup>. Анализ существующих опытов показал <sup>8</sup>, что даже сильное  $\nu - \nu$  взаимодействие не может быть исключено имеющимися данными.

Если имеется достаточно сильное  $\nu - \nu$  взаимодействие, то возникнут:

- 1) новые распады частиц,
- 2) новые процессы на пучке нейтрино.

Начнем с рассмотрения распадов. Наряду с распадом  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ , в котором образуются моновинетические позитроны, становится возможным процесс

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e(\mu) + \bar{\nu}_e(\mu). \quad (28)$$

Предположим для простоты, что гамильтониан  $\nu - \nu$  взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}_{\nu\nu} = F(\bar{\nu} \gamma_\alpha \nu) (\bar{\nu} \gamma_\alpha \nu). \quad (29)$$

В полном приближении получаем следующее выражение для спектра позитронов от распада (28)

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{1}{4(2\pi)^5} G^2 F f_\pi^2 m_\pi^2 (x^2 - z^2)^{1/2} (1 + z^2 - 2x) \sqrt{(1-2x)x + z^2}. \quad (30)$$

Здесь  $x = \frac{E}{m_\pi}$  ( $E$  - полная энергия позитрона),  $z = \frac{m_e}{m_\pi}$ ,  $|f_\pi| \approx 0,92 m_\pi$  - константа  $\pi$  - распада. Отсюда для полной вероятности распада (28) находим

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e \bar{\nu})}{\Gamma(\pi \rightarrow e \nu)} = 9,6 \cdot 10^{-15} \left( \frac{E}{G} \right)^2. \quad (31)$$

Если  $F = \frac{1}{m_\pi} \approx 10^5 G$ , вероятность распада (28) составляет  $\approx 10^{-4} \Gamma(\pi \rightarrow e \nu) 10^{-6} \Gamma_\pi$  ( $\Gamma_\pi$  - полная вероятность распада  $\pi$  - мезона). Из анализа результатов эксперимента<sup>9</sup> по определению  $\Gamma(\pi \rightarrow e \nu)$  можно заключить

$$F < 10^7 G. \quad (32)$$

Распад (28) сильно подавлен (малость фазового объема). Очевидно, что процессы

$$\kappa^+ \rightarrow e^+ \nu_e + \nu_{e(\mu)} + \bar{\nu}_{e(\mu)}, \quad (33)$$

$$\kappa^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu + \nu_{\mu(e)} + \bar{\nu}_{\mu(e)} \quad (34)$$

более чувствительны к  $F$ . Спектры  $e^+$  и  $\mu^+$  от этих распадов даются выражением (30), в котором следует  $m_\pi \rightarrow m_\kappa$ ,  $f_\pi \rightarrow f_\kappa$ , а также для процесса (34)  $m_e \rightarrow m_\mu$ . Для полных вероятностей получаем

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow e \bar{e} \nu)}{\Gamma(K \rightarrow e \nu)} = 1,9 \cdot 10^{-11}, \quad (35)$$

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow \mu \bar{\mu} \nu)}{\Gamma(K \rightarrow \mu \nu)} = 3,4 \cdot 10^{-16}.$$

Анализируя результаты опыта по исследованию распада  $K^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ , можно показать<sup>8</sup>, что

$$F < 2 \cdot 10^6 \text{ G}. \quad (36)$$

Выражение (30) было получено в предположении, что гамильтониан  $\nu - \nu$  взаимодействия имеет вид (29). Можно показать<sup>II</sup>, что для гамильтониана более общего вида

$$\mathcal{H}_{\nu\nu} = F_1 (\bar{\nu} \overset{\alpha}{O} \nu) (\bar{\nu} \overset{\alpha}{O} \nu), \quad (37)$$

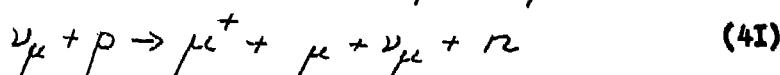
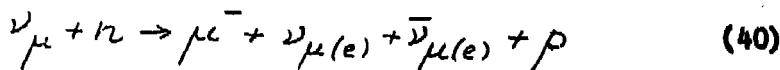
где

$$\overset{\alpha}{O} = \alpha \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) + \beta \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \quad (38)$$

спектр лептонов дается выражением (30), в котором следует выполнить следующую замену

$$F^2 \rightarrow F_1^2 \frac{16}{3} \alpha^2 (\alpha \alpha^2 + \beta^2). \quad (39)$$

Обратимся к рассмотрению процессов на лученейтрине высокой энергии. Если имеется достаточно сильное  $\nu - \nu$  взаимодействие, становятся возможными процессы



и т.д.

Наиболее интересен процесс (41) (в результате взаимодействия  $\nu_\mu$  с высокой энергией с протонами возникают  $\mu^-$ -мезоны). В работе <sup>8</sup> из анализа опытов по проверке закона сохранения лептонного числа было найдено

$$F_{\nu_\mu \nu_\mu} < 2 \cdot 10^6 G. \quad (42)$$

Если имеется взаимодействие между  $\nu_e$  и  $\nu_\mu$ , то становится возможным процесс

$$\nu_\mu + n \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + n. \quad (43)$$

Из анализа данных опыта <sup>12</sup> можно показать

$$F_{\nu_e \nu_\mu} < 10^6 G.$$

Недавно были опубликованы результаты эксперимента по поиску  $\nu - \nu$  взаимодействия. Искали процесс (34). Было найдено семь событий, которые нельзя было идентифицировать как распад (34), а также нельзя было надежно отнести к фону. Для верхнего значения вероятности распада (34) в этом эксперименте было получено

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow \mu^3\nu)}{\Gamma_K} < 7 \cdot 10^{-6}. \quad (44)$$

Для константы  $\nu - \nu$  взаимодействия отсюда следует

$$F < 1,8 \cdot 10^{+5} G. \quad (45)$$

Это лучшая имеющаяся в настоящее время верхняя граница на константу  $\nu - \nu$  взаимодействия. Как видим, даже весьма сильное взаимодействие между нейтрино не исключено имеющимися данными.

Отметим, что константа взаимодействия между нейтрино в теории Вайнберга  $\sim G$ . В работе <sup>14</sup>  $\nu - \nu$  взаимодействие вводилось в рамках келокальной теории поля. Это позволило построить перенормируемую градиентно-инвариантную теорию слабых взаимодействий лептонов.

#### 4. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЛЕПТОВНОГО ЧИСЛА

При написании гамильтониана (1) предполагалось, что имеет место закон сохранения электронного и мюонного лептонных чисел

$$\sum_i L_{ei} = \text{const.}, \quad \sum_i L_{\mu i} = \text{const.} \quad (46)$$

Значения лептонных чисел разных частиц приведены в таблице.

Таблица

	$e^-$	$\nu_e$	$\mu^-$	$\nu_\mu$	адрони
$L_e$	1	1	0	0	0
$L_\mu$	0	0	1	1	0

Законы сохранения (46) согласуются с опытом. Найденная верхняя граница на параметр  $\alpha$ , характеризующий возможное нарушение  $L_e$ , получена в недавних экспериментах <sup>15</sup> в поиску безнейтринного двойного  $\beta$ -распада  $Ge^{76}$  ( $Ge^{76} \rightarrow Se^{76} + e^- + e^-$ ). Из этих опытов следует, что

$$\alpha < 10^{-2}. \quad (47)$$

В нейтринных экспериментах ЦЕРН'а было найдено для отношения числа  $\mu^+$ , образованных пучком  $\nu_\mu$  к числу  $\mu^-$ , следующее верхнее значение

$$\frac{N(\nu_\mu \rightarrow \mu^+)}{N(\nu_\mu \rightarrow \mu^-)} < 4,6 \cdot 10^{-3}. \quad (48)$$

Отметим также последние результаты группы Коренченко <sup>16</sup> по поиску распадов  $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$  и  $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$

$$\frac{\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)}{\Gamma_\mu} < 2,9 \cdot 10^{-8} \quad \frac{\Gamma(\mu \rightarrow 3e)}{\Gamma_\mu} < 3,2 \cdot 10^{-9}. \quad (49)$$

С имеющимися в настоящее время данными согласуется также мультипликативный закон сохранения лептонных чисел <sup>17</sup>

$$\sum_i (L_{ei} + L_{\mu i}) = \text{const} \quad (50)$$

$$(-1)^{\sum_i L_{\mu i}} = \text{const.}$$

Очевидно, что в случае процессов с участием двух лептонов (46) и (50) эквивалентны. Мультипликативный закон разрешает большее число процессов с участием четырех лептонов, чем аддитивный. Единственный изученный слабый процесс такого рода —  $\mu^-$  — распад. Если имеет место мультипликативный закон, то наряду с распадом

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu \quad (51)$$

возможен также

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (52)$$

Один из первых нейтринных экспериментов, планируемых на мезонной фабрике в Лос-Аламосе, — поиск  $\bar{\nu}_e$  от распада  $\mu^+$  — мезонов. Если при распаде  $\mu^+$  образуются  $\bar{\nu}_e$ , то будет наблюдаться реакция

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (53)$$

В случае мультипликативного закона возможен также процесс <sup>(18)</sup>

$$\bar{\nu}_\mu + e \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e. \quad (54)$$

Поиск этого процесса планируется на ускорителе в Батавии. Далее, если имеет место (50), то возможна реакция

$$\nu_\mu + \bar{\nu} \rightarrow \mu^+ + e^- + \nu_e + \bar{\nu}. \quad (55)$$

Из анализа данных, полученных в ЦЕРН'е, можно получить следующее ограничение на соответствующую константу <sup>19</sup>

$$G_1 < 5G. \quad (56)$$

Отметим, наконец, что мультиплекативный закон допускает переход  
мюония в антимюоний

$$(\mu^+ e^-) \rightarrow (\bar{\mu}^- e^+). \quad (57)$$

В недавнем эксперименте по поиску таких переходов в вакууме было  
найдено<sup>20</sup>

$$G_m < 70 \text{ G.} \quad (58)$$

Рассмотрим еще одну формулировку закона сохранения лептонного  
заряда — формулировку Конопинского-Махмуда-Зельдовича<sup>20-21</sup>.  
Предположим, что сохраняется однолептонное число  $L$ . Будем считать, что  $e^-$  и  $\mu^+$  частицы с  $L = 1$ . Тогда античастицам  $e^+$  и  $\mu^-$  следует приписать  $L = -1$  и распад  $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$  запрещен законом со-  
хранения лептонного числа. Если масса нейтрино равна нулю и имеет  
место точная  $V-A$  теория, схема Конопинского-Махмуда полностью  
эквивалентна схеме с двумя аддитивными лептонными числами, причем  
имеет место следующее соответствие

$$\begin{aligned} \nu_e &\rightarrow \nu_L, & \bar{\nu}_\mu &\rightarrow \nu_R, \\ \nu_\mu &\rightarrow \bar{\nu}_L, & \bar{\nu}_e &\rightarrow \bar{\nu}_R. \end{aligned} \quad (59)$$

Лептонный ток в схеме Конопинского-Махмуда может быть записан

$$j_\alpha = (\bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu) + (\bar{\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_c) \quad (60)$$

( $e^+$  и  $\mu^+$  — операторы уничтожения  $e^-$  и  $\mu^+$ ).

Отличить обе схемы можно лишь в случае, если существуют вак-  
уум-демонстрации, разрешенные одной схемой и запрещенные другой. В по-  
следнее время были выполнены эксперименты<sup>23,24</sup> по поиску процес-  
сов

$$\mu^+ + C_{11} \rightarrow e^+ + C_0 \quad (61)$$

$$K^+ \rightarrow e^+ + \mu^+ + \pi^+ \quad (62)$$

разрешенных схемой Конопинского-Махмуда. Для верхних значений вероятностей получены следующие значения

$$\frac{\Gamma(\bar{\mu}^+ \bar{C}u \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e N_L)}{\Gamma(\bar{\mu}^+ \bar{C}u \rightarrow \bar{\nu}_e N_L)} < 2,6 \cdot 10^{-8}, \quad (63)$$

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ \bar{\mu}^+ \pi^-)}{\Gamma_K} < 2,8 \cdot 10^{-8}. \quad (64)$$

## 5. Проверка СРТ(Т)-инвариантности в распадах нейтральных К-мезонов

После основополагающих работ Ву и Янга<sup>25</sup>, Белла и Стайнбергера<sup>26</sup> стало ясно, что определение параметров, характеризующих нарушение СР в распадах нейтральных К-мезонов, позволило бы проверить СРТ(Т)-инвариантность. Имеющаяся в настоящее время информация позволяет дать первый ответ на эти фундаментальные вопросы. Прежде чем переходить к обсуждению экспериментальных данных, напомним хорошо известную феноменологию.

Волновая функция системы  $K^0 - \bar{K}^0$  удовлетворяет уравнению Шредингера с неэрмитовским гамильтонианом

$$i \frac{d\alpha(t)}{dt} = \mathcal{H}\alpha(t), \quad (65)$$

где

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix} \quad (66)$$

$\alpha_{1,2}(t)$  - амплитуда вероятности обнаружения  $K^0$  ( $\bar{K}^0$ ) (система покоя частиц). Уравнение (65) следует из общего уравнения Шредингера в приближении Вайскопфа - Вигнера.

Собственные функции гамильтониана

$$\mathcal{H}\alpha_s = \lambda_s \alpha_s \quad (67)$$

$$\mathcal{H}\alpha_L = \lambda_L \alpha_L \quad (68)$$

где

$$\lambda_{S,L} = m_{S,L} - \frac{c}{2} \Gamma_{S,L}. \quad (69)$$

описывают состояния с определенной массой ( $m_S, m_L$ ) и шириной ( $\Gamma_S, \Gamma_L$ ). Из (67) и (68) получаем

$$\alpha_S = \frac{1}{1/2(1+\varepsilon_S/2)} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_S \\ 1-\varepsilon_S \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$\alpha_L = \frac{1}{1/2(1+\varepsilon_L/2)} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_L \\ -(1-\varepsilon_L) \end{pmatrix}, \quad (71)$$

где комплексные параметры  $\varepsilon_S$  и  $\varepsilon_L$  определяются элементами матрицы  $\mathcal{H}$ . Нетрудно получить следующие соотношения

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon_S \varepsilon_L} = \frac{\mathcal{H}_{21} - \mathcal{H}_{12}}{2(\lambda_L - \lambda_S)}, \quad (72)$$

$$\frac{\delta}{1-\varepsilon_S \varepsilon_L} = \frac{\mathcal{H}_{22} - \mathcal{H}_{11}}{2(\lambda_L - \lambda_S)}. \quad (73)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_S + \varepsilon_L), \quad (74)$$

$$\delta = \frac{1}{2} (\varepsilon_S - \varepsilon_L).$$

Имеем также

$$\lambda_L - \lambda_S = \Delta m + \frac{c}{2} (\Gamma_S - \Gamma_L), \quad (75)$$

где

$$\Delta m = m_L - m_S = (0,46 \pm 0,02) \Gamma_S.$$

Помогут теперь, к каким следствиям приводят принципы инвариантности. Если имеет место СРТ-инвариантность, то

$$\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_{22} \quad (76)$$

(равенство масс и полных ширин  $K^0$  и  $\bar{K}^0$  - мезонов) и

$$\delta = 0 \quad (\epsilon_L = \epsilon_S). \quad (77)$$

Если имеет место Т-инвариантность, то

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} \quad (78)$$

и

$$\epsilon = 0 \quad (\epsilon_S = -\epsilon_L). \quad (79)$$

Очевидно также, что в случае СР-инвариантности ( $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_{22}$ ,  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21}$ )

$$\epsilon_L = \epsilon_S = 0.$$

Измеряя параметры, характеризующие нарушение СР-инвариантности в распадах нейтральных К-мезонов, можно определить как  $\epsilon_L$ , так  $\epsilon_S$  и тем самым проверить СРТ(Т)-инвариантность. Отметим чрезвычайную чувствительность этого метода проверки. Действительно, знаменатель (73) - величина порядка  $\Gamma_S$ . В числителе входят линейные по слабому взаимодействию члены. Если имеется нарушающее СРТ сверхслабое взаимодействие с константой  $\sim 10^{-9} G$ , то величина  $\delta$  может быть  $\sim 10^{-3}$ .

Из (67) и (68) без труда может быть получено соотношение

$$c(\lambda_L - \lambda_S^*)(\alpha_S^+ \alpha_L) = (\alpha_S^+ / \Gamma_{\alpha_L}) \quad (80)$$

(соотношение унитарности Белла-Стайнборгера).

Здесь

$$\Gamma_{\alpha_L} = c(\mathcal{H} - \mathcal{H}^*)_{\alpha_L} = 2\pi \sum_f \langle \mathcal{H}_N/f \rangle \langle f/\mathcal{H}_N \rangle \delta(E_f - m_f). \quad (81)$$

Левая часть этого соотношения определяется  $\epsilon_L$ ,  $\epsilon_S$ ,  $\alpha_{12}$ , и  $\Gamma_S$  (последние величины известны из опыта), правая часть может быть определена из опыта.

Обозначим

$$\xi_0 = \frac{\langle 0 | T | K_L \rangle}{\langle 0 | T | K_S \rangle}, \quad (82)$$

Здесь  $|0\rangle$  - вектор состояния двух  $\pi$  - мезонов, возникших от распада  $K$  - мезонов, в состоянии с  $I=0$  ( $I$  - полный изотопический спин),  $T$  - матрица распада. Далее, нетрудно видеть, что

$$|\langle 0 | T | K_S \rangle|^2 = \frac{\Gamma_S}{(1 + 2/\omega)^2}, \quad (83)$$

где

параметр

$$\omega = \frac{\langle \omega | T | K_S \rangle}{\sqrt{2} \langle 0 | T | K_S \rangle}$$

характеризует нарушение правила  $T \approx I/2$  в распадах  $K_S \rightarrow \pi\pi$ .  
Из опыта<sup>27</sup> следует

$$\omega = (4,4 \pm 1,3) \cdot 10^{-2} \text{ eV} \quad i(39^\circ \pm 18^\circ) \quad (84)$$

Пренебрегая  $2/\omega$  в знаменателе (83) запишем<sup>28</sup>

$$(\alpha_S^+ / \alpha_L) = (\xi_0 + \gamma) \Gamma_S, \quad (85)$$

где  $\gamma \Gamma_S$  - вклад в соотношение унитарности состояний  $|2\rangle$ ,  $|3\pi\rangle$ ,  $|\pi^0 \nu_e\rangle$  и т.д.

Параметр  $\xi_0$  определяется измеряемыми на опыте величинами

$\gamma_{+-}$  и  $\gamma_{00}$ :

$$\gamma_{+-} = \gamma_{+-} / e^{i\phi_{+-}} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | T | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_S \rangle} = \frac{\xi_0 + \epsilon'}{1 + \omega}, \quad (86)$$

$$\gamma_{00} = \gamma_{00} / e^{i\phi_{00}} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_S \rangle} = \frac{\xi_0 - 2\epsilon'}{1 - 2\omega}. \quad (87)$$

где

$$\varepsilon' = \frac{\langle \omega/T/\kappa_L \rangle}{\langle \omega/T/\kappa_S \rangle}. \quad (88)$$

Пренебрегая  $\omega$  по сравнению с единицей, получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_2 \gamma_{+-} + \gamma_{00}). \quad (89)$$

Первый член в правой части соотношения (85) дает основной вклад ( $\sim 10^{-3} \Gamma_S$ ). Вклад состояния  $1/2$ , очевидно, разен

$$\gamma_{2\pi, I=2} = 2\omega^* \varepsilon' \quad (90)$$

и, следовательно, мал. Информация о вкладах  $1/3\pi$  ( $1/\pi \ell \nu_\rho$ ) состояний может быть получена из опытов по измерению зависимости от времени вероятности образования  $3\pi$  ( $\pi \ell \nu$ ) в пучках исходных  $K^0(\bar{K}^0)$  - мезонов.

Пренебрегая  $|\varepsilon_S|^2$ ,  $|\varepsilon_L|^2$  и  $\frac{\Gamma_L}{\Gamma_S}$  по сравнению с единицей, получаем из (80) и (85)

$$(2i\omega m + \Gamma_S)(Re \varepsilon + iIm \delta) = (\varepsilon_0 + \gamma) \Gamma_S. \quad (91)$$

С помощью этого соотношения могут быть определены  $Re \varepsilon$  и  $Im \delta$ .

Обратимся к определению параметра  $\varepsilon_0$ . Опуская величины  $\gtrsim 10^{-3}$  по сравнению с единицей, получаем

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \delta + \alpha_0, \quad (92)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\langle \omega/T/\kappa \rangle - \langle \omega/T/\bar{\kappa} \rangle}{\langle \omega/T/\kappa \rangle + \langle \omega/T/\bar{\kappa} \rangle}. \quad (93)$$

Из условия унитарности  $S$  - матрицы и СРТ-инвариантности следует

$$e^{-2i\delta_0} \langle \omega/T/\kappa \rangle = \langle \omega/T/\kappa \rangle^*. \quad (94)$$

Здесь  $\delta_0$  -  $S$ -фаза  $\pi-\pi$ -рассеяния в состоянии с  $I=0$  при полной энергии в с.ц.м., разной массе  $K$ -мезона.

Запишем

$$\begin{aligned}\langle 0 | T | K \rangle &= A_0 e^{i\delta_0}, \\ \langle 0 | T | \bar{K} \rangle &= \bar{A}_0 e^{i\delta_0}.\end{aligned}\quad (95)$$

В случае СРТ-инвариантности

$$A_0 = \bar{A}_0^*, \quad (96)$$

Так как относительная фаза векторов  $|K^0\rangle$  и  $|\bar{K}^0\rangle$  произвольна, можно считать, что фазы  $A_0$  и  $\bar{A}_0$  одинаковы. В этом случае

$$\alpha_0 = \frac{|A_0| - |\bar{A}_0|}{|A_0| + |\bar{A}_0|}. \quad (97)$$

Введя обозначение

$$\tilde{\delta} = \delta - \alpha_0, \quad (98)$$

получаем

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \tilde{\delta}. \quad (99)$$

Если имеет место СРТ-инвариантность, из (96) и (77) имеем

$$\tilde{\delta} = 0. \quad (100)$$

Учитывая (97), перепишем следующим образом соотношение (91)

$$(2i\alpha m + \Gamma_S)(Re \varepsilon + iIm \tilde{\delta}) = (\varepsilon_0 + \eta) \Gamma_S. \quad (101)$$

С помощью (99) и (101) могут быть определены параметры  $\varepsilon$  и  $\tilde{\delta}$ . В последних экспериментах для  $|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}|$  и  $\phi_{00} - \phi_{+-}$  найдены следующие значения 29,30

$$|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}| = 1,00 \pm 0,06, \quad (102)$$

$$\phi_{00} - \phi_{+-} = 7,6^\circ \pm 18^\circ.$$

Используя эти данные, авторы работы <sup>30</sup> для параметров  $\xi$  и  $\tilde{\delta}$  получили следующие значения:

$$\begin{aligned} R_{\nu} \xi &= (1,39 \pm 0,25) \cdot 10^{-3} \\ \Gamma_{\nu} \xi &= (1,16 \pm 0,26) \cdot 10^{-3} \\ R_{\nu} \tilde{\delta} &= (0,01 \pm 0,25) \cdot 10^{-3} \\ \Gamma_{\nu} \tilde{\delta} &= (-0,24 \pm 0,30) \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{103}$$

Таким образом, Т-инвариантность в распадах нейтральных К-мезонов нарушается. Данные согласуются с предположением о справедливости СРТ - инвариантности.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В.М.Лобашов, В.А.Назаренко, Л.Ф.Саенко, Л.М.Смотрицкий, П.И.Харевич. Письма ЖЭТФ 5, 73, 1967.
2. H.Hattig, K.Hunchen, H.Waffler. Phys.Rev.Lett. 25, 941, 1970.
3. V.S.Kaftanov et al. Phys.Lett. 40B, 215, 1972.
4. M.Gurr, F.Reines, M.Sobel. Phys.Rev.Lett. 28, 1406, 1972.
5. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett. 19, 1264, 1967.
6. H.H.Chen, B.W.Lee. Phys.Rev. D5, 1874 (1972).
7. Z.Bialynicka-Birula. Nuovo Cimento 33, 1485 (1964).
8. D.Yu.Bardin, S.M.Bilenky, B.Pontecorvo. Phys.Lett., 32B, 121, 1970.
9. H.L.Anderson, T.Fujii, R.H.Miller, L.Tau. Phys.Rev. 119, 2050 (1960).
10. D.R.Bottger et al. Phys.Lett. 19, 982, 1967.

11. D.Yu.Bardin, S.M.Bilenky. Preprint JINR E2-5881, 1972.
12. J.I.Bielein et al. Phys.Lett., 13, 80, 1964.
13. C.D.Cable et al. Phys.Lett. 40B, 699, (1972).
14. Г.В.Еримов, Ш.З.Сельцер. препринт ОИЯИ Р2-5104, Дубна, 1970.
  
15. E.Fiorini, Lett. Nuovo Cim., 3, 149 (1970).
16. С.М.Коренченко, Б.Ф.Костин, Г.В.Мидельмахер, К.Г.Некрасов. XVI Международная конференция по физике высоких энергий, 1972.
  
17. G.Feinberg, S.Weinberg. Phys.Rev.Lett. 6, 381 (1961).
18. S.S.Gerstein, V.N.Polomeshkin, Lett. Nuovo Cim., 5, 366 (1972).
19. C.Y.Chang, Phys.Rev.Lett., 24, 79 (1970).
20. B.A.Barnett, C.Y.Chang et al. XVI International Conference on High Energy Physics, 1972.
21. E.J.Kopopinski, M.M.Mahmoud. Phys.Rev., 92, 1045 (1953).
22. Я.Б.Зельдович, ДАН СССР 86, 505, (1952).
23. D.A.Bryman, M.Blecher, K.Gotow, R.J.Powers, Phys.Rev., Lett., 28, 1469 (1972).
24. E.W.Beier, D.A.Buchholz, A.K.Mann, S.H.Parker, Phys.Rev.Lett. 29, 678 (1972).
25. T.T.Wu, C.N.Yang. Phys.Rev.Lett. 13, 380 (1964).
26. J.S.Bell, J.Steinberger. Proc.Int.Conf. on Elementary Particles, Oxford, p. 195, 1965.
27. B.Gobbi et al. Phys.Rev.Lett. 22, 682 (1969).
28. K.R.Schubert, B.Wolf et al. Phys.Lett. 31B, 662, 1970.
29. M.Molder, E.Radermacher et al. Phys.Lett. 40B, 141 (1972).
30. G.Barbiellini, P.Darriulat et al. Preprint CERN, 1973.

# РЕНОРМИРУЕМЫЕ И НЕРНОРМИРУЕМЫЕ СХЕМЫ СЛАБЫХ

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Б.А.Арбузов

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В последнее время обострился интерес к построению ренормируемых моделей слабых взаимодействий. Это обстоятельство связано с чисто внутренними явлениями в развитии теории, а именно, с успехом, достигнутым в развитии калибровочных теорий со спонтанно нарушенной симметрией. С другой стороны, неренормируемость стандартных вариантов теории слабых взаимодействий (четырехфермионного и варианта с  $W$ -бозоном) вызывала неудовлетворение многих теоретиков. Здесь уместно сделать несколько замечаний о разнице между ренормируемыми и неренормируемыми теориями. В неренормируемых теориях полностью неприменима теория возмущений, в отличие от ренормируемых теорий, в первую очередь, от квантовой электродинамики. С другой стороны, с аксиоматической точки зрения, оба класса теорий, по-существу, равноправны. Условие локализуемости удовлетворяется как для ренормируемых теорий, так и для широкого класса неренормируемых теорий. Если уже рассуждать совсем строго, то не доказана непротиворечивость теории в обоих случаях. Кроме того, отметим, что в изучении неренормируемых теорий усилиями нескольких групп физиков достигнут определенный прогресс. Поэтому можно высказать точку зрения, что основное различие между ренормируемыми и неренормируемыми теориями заключается в степени умения теоретиков обращаться с первой либо второй теорией.

Доклад посвящен теории слабых взаимодействий. Прежде чем перейти к рассмотрению ренормируемых вариантов этой теории, мы кратко обсудим, к чему приводит обычный, неренормируемый вариант теории слабых взаимодействий, каковы здесь трудности и есть ли пути для обхода этих трудностей.

Основные трудности возникают при попытках применить теорию возмущений в этом случае (заведомо здесь неприменимой). Проиллюстрируем эту трудность на проблеме возникновения нейтральных токов. Как известно, в стандартной схеме слабых взаимодействий нейтральные токи отсутствуют в исходном лагранжиане, но они возникают уже во втором порядке по слабому взаимодействию. В качестве примера рассмотрим процесс рассеяния мюонного нейтрино на электроне. Низшая диаграмма, соответствующая этому процессу, приведена на рис. I. Вычисление такой диаграммы невозможно, так как она расходится.

Однако мы можем ввести некоторую нелокальность, например, при помощи регуляризации Паули-Вилларса и получить, таким образом, обрезание  $\Lambda$  на верхнем пределе импульсного интегрирования. В результате получим для амплитуды выражение

$$A_{\mu e \rightarrow \mu e} = \frac{G^2 \Lambda^4}{(2\pi)^4} \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_e \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu + \\ + \frac{G^2}{3(2\pi)^4} (p^2 \delta_{\mu\rho} - p_\mu p_\rho) \log \Lambda^2 \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_e \bar{u}_\nu \gamma_\rho (1 + \gamma_5) u_\nu + \dots \quad (I)$$

где  $p$  — суммарный импульс  $\nu_\mu$  и  $e$ . Итак, мы получим расходящийся коэффициент при структуре с нейтральными токами с  $V-A$ -вариантом. При этом возникают две точки зрения. Можно предположить, что по какой-то неизвестной нам причине интегралы действительно образуются на импульсе  $\Lambda$ . Тогда выражение (I) дает возможность

положить ограничения на параметр  $\Lambda$ , имея в виду, что процесс не наблюдался. Такие оценки были проведены для ряда процессов. Модель с промежуточным бозоном  $W$  дает аналогичные результаты. Наиболее сильные ограничения на  $\Lambda$  получаются из отсутствия нейтральных токов в распадах К-мезонов и дают  $\Lambda \leq 4$  Гев.

Если обрезание действительно существует, требуется построение истинно локальной теории слабых взаимодействий, например, в духе схемы, развивающейся Г.В.Ефимовым и сотрудниками <sup>1</sup>.

Другая возможность заключается в предположении, что локальная неренормируемая теория, например, четырехфермионная теория вполне имеет смысл, т.е. можно придать смысл предельному переходу  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Если мы перейдем к пределу в одном порядке, скажем, в выражении (I), то получим, естественно, бессмысленный результат. Необходим учет всех порядков. Предположим, что мы вычислили главные расходящиеся члены во всех порядках. Порядок расходимости (степень  $\Lambda^k$ ) в рассматриваемом случае возрастает с ростом порядка. В результате мы получим вместо (I)

$$A_{\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e} = G \bar{u}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_e \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_\nu \left[ \frac{G \Lambda^2}{(2\pi)^2} + a_2 (G \Lambda^2)^2 + \dots + a_n (G \Lambda^2)^n \right] + \\ + \frac{G^2}{3(2\pi)^2} (p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta) \bar{u}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_e \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_\nu \left\{ \log \Lambda^2 (1 + \dots + b_n (G \Lambda^2)^n) \right\} (2) \\ + c_4 (G \Lambda^2) + \dots + c_n (G \Lambda^2)^n + \dots \}$$

Рассмотрим первый член. Его можно представить как разложение некоторой функции  $F_1(G \Lambda^2)$  по степеням  $G \Lambda^2$ :

$$F_1(G \Lambda^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (G \Lambda^2)^n. \quad (3)$$

Если локальная теория имеет смысл, должен существовать конечный предел  $F_1(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x) = a < \infty. \quad (4)$$

Таким образом, коэффициент при первом члене оказывается равным  $aG$ , где  $a$  не зависит от  $G$ , но определяется структурой теории. Этот же результат мы могли бы получить, если бы в выражении для второго порядка (1) положили бы  $\Lambda^2 = \frac{a(2\pi)^2}{G}$ , т.е.  $\Lambda^2 \sim 1/G$ , т.е. выбрать обрезание на так называемом "унитарном пределе". Согласно приведенным соображениям, амплитуда процесса  $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$  оказывается величиной первого порядка по  $G$ , хотя в исходном лагранжиане такого члена не было. Это и есть одно из проявлений проблемы высших порядков. Однако к аргументам, основанным на унитарном обрезании  $\Lambda^2 \sim 1/G$ , следует относиться очень осторожно. В самом деле: предел  $F_1(x)$  должен быть конечен, но он может быть и конечным числом нуль. Тогда все рассуждения с "унитарным обрезанием" теряют силу и разложение амплитуды  $\nu_\mu e$ -рассеяния начинается с  $G^2$ . Свойства этого разложения следуют из рассмотрения второго члена в (2). Ряд в скобках

$$\Phi(G, \Lambda^2) = \log \Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (G \Lambda^2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (G \Lambda^2)^n \quad (5)$$

не является функцией от переменной  $G \Lambda^2$ , однако может быть легко сведен к ней простым преобразованием  $^2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(G, \Lambda^2) &= -\log G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (G \Lambda^2)^n + \left\{ \log G \Lambda^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n (G \Lambda^2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (G \Lambda^2)^n \right\} = \\ &= -\log G F_2(G \Lambda^2) + F_3(G \Lambda^2); \end{aligned} \quad (6)$$

где мы ввели функции  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$ , которые также должны иметь конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x) = b ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x) = c . \quad (7)$$

Тогда коэффициент при втором члене принимает вид

$$\frac{G^2}{3(2\pi)^2} (-b \log G + c) . \quad (8)$$

Основное, на что следует обратить внимание здесь, есть логарифмический член, содержащий  $\log G$ ; присутствие его показывает, что в амплитуде имеется особенность (точка ветвления) по  $G$  при  $G = 0$ , что и объясняет полную неприменимость теории возмущений, т.е. разложения по степеням  $G$  в этом случае <sup>2</sup>.

Проведенные рассуждения, разумеется, не имеют никакой доказательной силы, однако они показывают, к чему следовало бы стремиться при построении локальной неренормируемой теории слабых взаимодействий. Во-первых, отсутствие нейтральных токов, жесткие пределы на которые накладывают вероятности процессов

$$\frac{W(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-)}{W(K^+ \rightarrow \text{все})} \leq 0.4 \cdot 10^{-6} ; \quad \frac{W(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})}{W(K^+ \rightarrow \text{все})} \leq 1.2 \cdot 10^{-6} ;$$

$$\frac{W(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{W(K_L \rightarrow \text{все})} \leq (1.9 \cdot 10^{-9})^{\text{*}} ;$$
(9)

делает очень желательным осуществление возможности  $\alpha = 0$ , ибо в противном случае все приведенные вероятности были бы значи-

<sup>\*</sup>) С последним процессом связана, как известно, еще одна проблема, которой мы здесь не касаемся.

тельно больше. Во-вторых, в этом случае ( $\alpha = 0$ ) ведущим становится член, пропорциональный  $G^2 \log G$ , который можно использовать для различных оценок. Эти оценки получаются значительно ниже пределов (9).

Разумеется, эти рассуждения можно обосновать, если действительно научиться вычислять амплитуды в любом порядке по ( $G\Lambda^2$ ), либо создать метод, позволяющий по конечному числу членов ряда делать заключения о низших членах разложения по степеням  $G$  и  $\log G$  \*). Для начала же можно попытаться проверить эти рассуждения на простых моделях. Это было сделано в четырехфермионном варианте и варианте с  $W$ -бозоном для бесконечного набора диаграмм лестничного вида <sup>4</sup>. Оказалось, что в этом случае приведенные выше аргументы справедливы, причем справедливо равенство  $\alpha = 0$ , и, после учета неренормировки константы связи,  $\beta = 1$  (см. соотношение (6)). Это означает, что ведущим членом в амплитудах, подобных амплитуде  $\nu_e$ -рассеяния, является член, пропорциональный  $G^2 \log G$ . Таким образом, предположения, сделанные выше, получают некоторую модельную поддержку. Так или иначе, можно себе мыслить вариант неренормируемой теории слабого взаимодействия, в котором нет проблемы нейтральных токов.

Другая проблема, связанная с неренормируемостью теории – асимптотика сечений при высоких энергиях. Как известно, в четырехфермионной теории диаграмма первого порядка приводит к линейному росту сечения с энергией.

$$\sigma \sim G^2 S, \quad (10)$$

---

\*). Предложения для таких методов существуют (см., например, <sup>3</sup>).

при энергиях  $S_0 \sim 1/G$  наступает противоречие с унитарностью, откуда значение  $S_0$  и получило название "унитарного предела". Однако следует учесть, что при  $Gs \gg 1$  следует учитывать все порядки по  $G$  и (10) следует заменить выражением

$$\sigma \sim G \sum_{n=1}^{\infty} d_n(Gs)^n = G f(Gs). \quad (II)$$

Поведение функции  $f(Gs)$  и определяет асимптотику сечения. В простых моделях <sup>5</sup> получается, что рост  $f(Gs)$  при  $s \rightarrow \infty$  замедляется, возможны осцилляции, либо выход на постоянную.

Таким образом, в неренормируемых вариантах теории слабых взаимодействий возникают определенные трудности. Отметим, однако, что ситуация не является безнадежной. Существуют возможности, подтвержденные модельными расчетами, для преодоления этих трудностей.

Перейдем теперь к изложению попыток построения ренормируемых вариантов теории слабых взаимодействий. Первая такая модель была предложена С. Вайнбергом <sup>6</sup>, а затем обсуждались и многочисленные её модификации. Все эти модели имеют общие черты, которые наиболее ярко проявляются в первоначальной схеме Вайнберга. Поэтому мы будем излагать этот подход на примере этой схемы.

В основе моделей типа моделей Вайнбергера лежат три положения:

1. Спонтанное нарушение инвариантности.

2. Явление Хиггса.

3. Идея об объединении электромагнитного взаимодействия со слабым.

Предпошлем изложение собственно моделей слабых взаимодействий краткое обсуждение этих положений.

Спонтанное нарушение инвариантности в полную силу проявилось в задачах квантовой статистической физики. Применение спонтанного

нарушения инвариантности привело к созданию квантовой теории сверхтекучести, сверхпроводимости, ферромагнетизма. Эти достижения хорошо известны, и мы не будем на них останавливаться, отметим только, что методом, наиболее адекватным этим задачам, является метод квазисредних, развитый Н.Н.Боголюбовым <sup>7</sup>.

После успехов, достигнутых в статистической физике, появились попытки применения метода квазисредних и в квантовой теории поля. Однако при этом выяснилось, что если в задаче осуществляется спонтанное нарушение симметрии, то всегда при этом возникают нежелательные частицы с нулевой массой (и спином ноль). Это обстоятельство является следствием теоремы Н.Н.Боголюбова о  $\sqrt{q}^e$  <sup>7</sup>, известной для задач статистической физики. Согласно этой теореме, в случае, если квазисредние не совпадают с обычными средними, т.е. если осуществляется спонтанное нарушение симметрии, всегда существует возбуждение, спектр которого начинается с нуля. Иными словами, функция распространения этого возбуждения при малых  $q$  ведет себя как  $\sqrt{q}^2$ . Очевидно, что для частиц это означает равенство нулю массы.

Невозможность избежать появления новых безмассовых и бесспиновых частиц на некоторое время приостановила применение идей спонтанно нарушенной симметрии в теории элементарных частиц, так как существование таких частиц решительно противоречило эксперименту. Однако Хиггсу удалось показать, что эту трудность удается обойти в теориях с калибровочными полями <sup>8</sup>. Проиллюстрируем это "явление Хиггса" на простом примере.

Рассмотрим задачу взаимодействия комплексного скалярного поля  $\Phi = \varPhi_1 + i\varPhi_2$  с безмассовым векторным полем  $A_\mu$ . Лагранжиан системы выберем в виде

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 - e A_\mu \phi_1) (\partial_\mu \phi_1 - e A_\mu \phi_1) - \\
& - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 + e A_\mu \phi_2) (\partial_\mu \phi_2 + e A_\mu \phi_2) + \frac{m_0^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \\
& - h (\phi_1 \phi_2 + \phi_1 \phi_2)^2 + \lambda \phi_2 ; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .
\end{aligned} \tag{I2}$$

Здесь в духе метода квазисредних к лагранжиану добавлен член  $\lambda \phi_2$ , нарушающий исходную симметрию относительно градиентных преобразований:

$$\begin{aligned}
A_\mu & \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) ; \\
\phi_1 & \rightarrow \phi_1 \cos \Lambda(x) + \phi_2 \sin \Lambda(x) ; \\
\phi_2 & \rightarrow -\phi_1 \sin \Lambda(x) + \phi_2 \cos \Lambda(x) .
\end{aligned} \tag{I3}$$

В конечных выражениях, разумеется, мы должны устремить  $\lambda \rightarrow 0$ . Следует также обратить внимание на то, что в исходном лагранжиане выбран нефизический знак перед массовым членом скалярного поля. Если мы запишем классическое уравнение для поля  $\phi_1$  (или  $\phi_2$ )

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi_1 - 2e A_\mu \partial_\mu \phi_2 + [m_0^2 - 4h(\phi_1 \phi_2 + \phi_1 \phi_2)] \phi_1 = 0 ; \tag{I4}$$

то мы видим, что существует постоянное классическое решение

$$\phi_1 \phi_1 + \phi_2 \phi_2 = \frac{m_0^2}{4h} ; \quad \phi_1 = 0 , \quad \phi_2 = \sqrt{\frac{m_0^2}{4h}} . \tag{I5}$$

Выбор ненулевого значения  $\phi_2$  связан со способом введения нарушения в (I2), согласно которому вакуумное среднее поля  $\phi_2$  может быть отлично от нуля. Имея в виду наличие такого классического решения (I5), переопределим поля  $\phi_1$  и  $\phi_2$

$$\phi_1 = \phi , \quad \phi_2 = \xi + \langle \phi_2 \rangle = \xi + \eta ; \tag{I6}$$

где  $\langle \phi \rangle$  означает среднее по вакууму от  $\phi_2$ , и по определению  $\langle \phi \rangle = \langle \xi \rangle = 0$ . Выразим теперь лагранжиан через новые поля. Рассмотрим сначала часть лагранжиана, не содержащую векторные поля и производные от скалярных

$$\mathcal{L}_2 = \left( \frac{m_0^2}{2} - 2h\eta^2 \right) \phi^2 + \left( \frac{m_0^2}{2} - 6h\eta^2 \right) \xi^2 + [\eta(m_0^2 - 4\eta^2 h) + \lambda] \xi + \mathcal{L}_3 ; \quad (I7)$$

где  $\mathcal{L}_3$  содержит третью и четвертые степени полей. Условие  $\langle \xi \rangle = 0$  в низшем порядке дает

$$\eta(m_0^2 - 4\eta^2 h) + \lambda = 0.$$

Очевидно, это уравнение имеет два решения:

$$\eta_1 = \frac{\lambda}{m_0^2} + O(\lambda^3) ; \quad (I8a)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{m_0^2}{4h}} + O(\lambda) . \quad (I8b)$$

Первое из этих решений  $\eta_1 \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  и не дает нарушение исходной симметрии, в то время как второе совпадает с классическим решением (I5). При этом решение (I8b) обращает коэффициент при  $\phi^2$  в (I7) в нуль, т.е. приводит к появлению безмассовой частицы, о которой шла речь выше. Коэффициент при  $\xi^2$  имеет правильный знак и соответствует  $m_\xi = \sqrt{2} m_0$ . Для того чтобы проследить судьбу безмассовой частицы  $\phi$ , рассмотрим лагранжиан, учитывая в нем лишь члены, квадратичные по полям.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + e\eta A_\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} e^2 \eta^2 A_\mu A_\mu - \\
 & - \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{z} \partial_\mu \vec{z} - \frac{m^2}{2} \vec{z}^2 + \mathcal{L}_{b_3}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Легко видеть, что лагранжиан допускает градиентное преобразование векторного поля. Именно, определим векторное поле  $B_\mu$ :

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e\eta} \partial_\mu \phi. \tag{20}$$

Тогда  $F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(B)$ , и мы приходим к теории массивного векторного поля  $B$  с массой  $m_b = e\eta$ , которое взаимодействует с полем  $\phi$ . Оказалось, что безмассовое поле  $\phi$ , играет роль дополнительной, третьей степени свободы векторного поля  $B_\mu$ , которая необходима в силу возникновения массы у векторного поля. Итак, смысл явления Хиггса состоит в том, что в результате спонтанного нарушения симметрии векторное поле приобретает массу, а потерявшие, в силу теоремы Боголюбова, массу скалярные частицы становятся дополнительными компонентами векторных полей.

Идея объединенного описания слабых и электромагнитных взаимодействий не нова. Если обратить внимание, что в модели с промежуточным  $W$ -бозоном,  $W$ -частицы взаимодействуют с заряженными токами, а фотон — с нейтральными, то возникает идея объединить 2  $W$ -мезона и фотон в триплет Янга-Миллса, так, чтобы взаимодействие триплета с токами было "изотропически" инвариантно (пренебрегая разницей масс фотона и  $W$  и проблемой несохранения четности). Последнее замечание указывает на то, что если и есть какая-либо симметрия, объединяющая фотон и  $W$ , она должна быть сильно нарушена. В работе Салама и Уорда<sup>\*</sup> была использована более сложная схема, содержащая триплет  $W$  и синглетную векторную

\* A. Salam and J. C. Ward. Phys. Lett., 13, 168 (1964).

торную частицу  $B$ .  $W$  и  $B$  смешивались с тем, чтобы обеспечить равенство нулю массы фотона.

Итак, перейдем к обсуждению модели Вайнберга. Она описывает слабые и электромагнитные взаимодействия лептонов. В основе ее лежит использование спонтанного нарушения инвариантности и явления Хиггса. Поэтому прежде всего необходимо иметь набор векторных полей. Так же, как и в схеме Салама и Уорда, выбирается янг-миллсовский триплет  $\vec{A}_\mu$  и синглэт  $B_\mu$  с массами, равными нулю. Рассмотрим введение лептонных полей, ограничившись для начала электронными лептонами ( $e, \nu_e$ ). По предположению, нейтрино является двухкомпонентной частицей, поэтому мы имеем всего три (из четырех) двухкомпонентных состояния: левые нейтрино и электрон, которые объединяются в дублет

$$L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}; \quad (21)$$

и правый электрон

$$R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) e. \quad (22)$$

Введем "изотопические" преобразования, относительно которых  $L$  имеет "изотопию"  $\frac{1}{2}a$ , и  $R = 0$ . Тогда свободный лагранжиан лептонов

$$L_0 = -\frac{1}{2} (\bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \epsilon - \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu \nu_\mu) - \frac{1}{2} (\bar{R} \gamma_\mu \partial_\mu R - \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu \nu_\mu); \quad (23)$$

инвариантен относительно изотопических преобразований, а также сохраняет числа левых и правых лептонов  $N_L$  и  $N_R$ . Заряд связан с определенными операторами следующим образом:

$$Q = T_3 - N_R - \frac{1}{2} N_L. \quad (24)$$

Эта формула напоминает соотношение Ниниджими с гиперзарядом

$Y = -2N_a - N_c$ . Поскольку в нашем распоряжении есть триплет  $\vec{A}_\mu$  и синглет  $\vec{B}_\mu$ , то, если мы требуем сохранения заряда и изотопического спине,  $\vec{A}_\mu$  должен взаимодействовать с изотопическим спином,  $\vec{B}_\mu$  — с гиперзарядом. Это соображение фиксирует коэффициенты в лагранжиане системы:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \vec{\Phi}_{\mu\nu} \vec{\Phi}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{R} \gamma^\mu (\vec{\partial}_\mu - ig' \vec{B}_\mu) R - \\ & - \bar{L} \gamma^\mu (\vec{\partial}_\mu - ig \vec{E} \vec{A}_\mu - \frac{i}{2} g' \vec{B}_\mu) L - \\ & - (\partial_\mu \varphi - ig \vec{E} \vec{A}_\mu \varphi - \frac{i}{2} g' \vec{B}_\mu \varphi) (\partial_\mu \varphi^+ + ig \vec{E} \vec{A}_\mu \varphi^+ + \frac{i}{2} g' \vec{B}_\mu \varphi^+) + \\ & + M_1^2 \varphi^+ \varphi - h (\varphi^+ \varphi)^2 - G_e (\bar{L} \varphi R + \bar{R} \varphi^+ L); \\ & + \varepsilon (\varphi^0 + \varphi^0+) \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\vec{\Phi}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + ig [\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu]$  — поле Янга-Миллса,  $\vec{t} = \frac{\vec{\gamma}}{2}$ , и кроме того, введен комплексный скалярный дублет  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^- \end{pmatrix}$ , который необходим для осуществления программы спонтанного нарушения инвариантности. Последний член введен для снятия вырождения. Итак, предположим, что вакуумное среднее поля  $\varphi$  отлично от нуля

$$\langle \varphi \rangle = \lambda. \quad (26)$$

Тогда введем новые поля:  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  — без изменения и

$$\varphi_0 = \frac{\varphi^0 - \varphi^0+}{i\sqrt{2}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi^0 + \varphi^0+ - 2\lambda}{\sqrt{2}}, \quad (27)$$

Подставляя (27) в (25) и используя условие  $\langle \varphi \rangle = 0$ ; получим, как и в модели Хиггса

$$\lambda = \frac{M_1^2}{4\pi}.$$

При этом поля  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  и  $\varphi_3$  оказываются безмассовыми, а поле  $\varphi$  приобретает массу  $\sqrt{2} M_1$ . Первые три поля по смыслу явления Хиггса должны объединиться с массивными векторными полями. Для того чтобы проследить, как возникают массы у векторных полей, рассмотрим соответствующую часть лагранжиана

$$-\frac{\lambda^L}{4} [g^2 (A_{\mu\mu} A_{\mu\mu} + A_{3\mu} A_{3\mu} + A_{3\mu} A_{3\mu}) + g'^2 B_{\mu} B_{\mu} + 2gg' B_{\mu} A_{3\mu}]. \quad (27)$$

Отсюда следует, что заряженные поля  $A_1$  и  $A_2$  имеют массу  $M_{\pm}^2 = \frac{\lambda^L}{4} g^2$ , а поля  $A_3$  и  $B$  — смешиваются. Следует провести диагонализацию матрицы

$$\begin{vmatrix} g^2 & gg' \\ gg' & g'^2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что уравнение на собственные значения

$$(g^2 - \xi) (g'^2 - \xi) - g^2 g'^2 = 0$$

имеет два корня:  $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = g^2 + g'^2$ , т.е. линейная комбинация

$$A_{\mu} = \frac{g B_{\mu} + g' A_{3\mu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (28)$$

имеет массу 0 и может быть сопоставлена фотону, а комбинация

$$Z_{\mu} = \frac{g A_{3\mu} - g' B_{\mu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (29)$$

имеет массу  $M_{\pm}^2 = \frac{\lambda^L}{4} (g^2 + g'^2) = M_{\pm}^2 \frac{g^2 + g'^2}{g^2}$ . Таким образом, мы получили 3 массивных векторных поля  $W^{\pm}$ ,  $Z$ , которые обеспечивают исключение безмассовых скалярных частиц  $\varphi^{\pm}$ ,  $\varphi_3$  и фотона  $A_{\mu}$ .

Заметим, что масса электрона возникает из члена, пропорционального  $G_e$  и равна  $G_e \lambda$ . Запишем теперь через новые поля лагранжиан взаимодействия лептонов с векторными полями

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p = & \frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v_e W_\mu + h.c. + \frac{ig g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu + \\ & + i \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \left\{ \frac{3g'^2 - g^2}{g'^2 + g^2} \bar{e} \gamma^\mu e - \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e + \bar{\nu}_e (1 + \gamma_5) \nu \right\} \bar{z}. \quad (30) \end{aligned}$$

Точно такие же рассуждения можно провести и для мюона и мюонного нейтрино, причем, с необходимостью, мюонные лептоны взаимодействуют с теми же самыми векторными частицами  $W$ ,  $\bar{z}$ ,  $A$ , что и электронные. В результате получается схема слабых и электромагнитных взаимодействий, которая содержит, во-первых, обычное электромагнитное взаимодействие при условии

$$e = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} ; \quad (31)$$

и слабое взаимодействие заряженных токов с  $W$  — бозоном при условии

$$\frac{G_e}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{g^2 M_W^2} . \quad (32)$$

Однако имеется еще взаимодействие с нейтральным  $\bar{z}$  — мезоном, которое приводит к существованию нейтральных токов и, в частности, к процессам, которых нет в стандартной теории (в низшем порядке), например, к рассеянию  $\bar{z} e \rightarrow \bar{z} e$ . К обсуждению этой проблемы мы еще вернемся, а сейчас отметим, что для  $M_W$  и  $M_{\bar{z}}$  в этой схеме имеются нижние границы. Действительно, если мы введем па-

раметр  $\Theta$  так, что  $g'/g = \tan \Theta$ , то

$$\frac{e^2}{g^2} = \sin^2 \Theta ; \quad \frac{e^2}{g'^2} = \cos^2 \Theta ; \quad (33)$$

из очевидного факта  $g^2 > e^2$ , следует, что

$$M_{W \min}^2 = \frac{\sqrt{2} e^2}{g G} , \quad M_{W \min} = 37.5 \text{ ГэВ};$$

а из значения для  $M_Z$  получается

$$M_{Z \min} = 2 M_{W \min} = 75 \text{ ГэВ.}$$

Теперь кратко остановимся на проблемеrenomириуемости. Исходный лагранжиан является по счету степеней расходимости renormируемым. Удается показать, что и преобразованный лагранжиан со спонтанно нарушенной симметрией также сохраняет это свойство. В частности, показана renormируемость теории для случая модели, аналогичной модели Вайнберга, но не содержащей несохранения четности /9/. В самой модели Вайнберга возникают осложнения, связанные с присутствием аксиальных токов, и связанных с ними аномальных тождеств Уорда. Оказывается, что для петлевых диаграмм с тремя внешними векторными частицами не удается построить градиентно-инвариантную регуляризацию и потому модель Вайнберга все-таки не является renormируемой. Однако эти трудности начинают сказываться, начиная с четвертого порядка, а в низших порядках можно последовательно вычислять радиационные поправки. С целью устранения обсуждаемого недостатка были предложены другие модели, которые с необходимостью требуют введения новых частиц, прежде всего, новых лептонов. Например, вместо дублета  $(\nu_e e)$  можно ввести триплет

$$L' = \frac{1}{2} (A + \delta_5) / \frac{E'}{v} ; \quad v' = v_e \cos \varphi + v_\mu \sin \varphi ;$$

который, в пренебрежении разницей масс  $e$  и  $E$ , вполне подобен по трансформационным свойствам исходному триплету. В сумме петлевых диаграмм с  $L'$  и  $\bar{L}'$  неприятные расходимости сокращаются, и теория является ренормируемой. Итак, за ренормируемость теории обсуждаемого вида приходится платить ценой введения новых частиц. Другая трудность этих моделей — наличие нейтральных токов. Мы не будем здесь приводить сравнение предсказаний с экспериментом, отметим только, что модель Вайнберга в первоначальном виде не содержит противоречий с экспериментом. Кроме того, при введении новых частиц можно, вообще, частично либо полностью исключить лептонные нейтральные токи в лагранжиане. Однако противоречие с совокупным экспериментом по отсутствию нейтральных токов в распадах  $K$ -мезонов все же остается. Действительно, если мы изгоним нейтральные токи из лагранжиана, они все равно будут появляться в высших порядках. В силу ренормируемости теории отношения амплитуды с нейтральными токами к обычным амплитудам по порядку величины определяются константами  $g^2/4\pi$ ,  $g^{12}/4\pi$ . Обе они больше постоянной  $\alpha = 1/137$ , так что предсказываются вероятности:

$$\frac{W(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-)}{W(K^+)} \gtrsim 10^{-6}; \quad \frac{W(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})}{W(K^+)} \gtrsim 10^{-6}; \quad \frac{W(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{W(K_L)} \gtrsim 10^{-3}.$$

Если первые значения еще можно согласовать с опытом, то последнее резко ему противоречит. Развеется, можно придумать еще случайные сокращения, но стройность теории от этого не выигрывает.

Если сравнивать неренормируемые схемы слабых взаимодействий с ренормируемыми, то, как нам кажется, есть больше надежды на сог-

ласование теории с проблемой нейтральных токов в первом случае, нежели во втором.

В заключение хотелось бы отметить, что идеи, заложенные в моделях типа модели Вайнберга, являются очень привлекательными. Конечно, с точки зрения физики, а не с точки зрения удобства вычислений, ренормируемые теории ничем не выделены, однако следует надеяться, что такие привлекательные идеи превратятся в хорошую теорию, хотя, может быть, и не для слабых взаимодействий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G.V. Efimov, *Annals of Physics*, 21, 466 (1971).
2. T.D. Lee, *Phys. Rev.*, 128, 899 (1962).
3. А.Т.Филиппов, В.Ш.Гогохия, ЯФ, 15 1294 (1971)
4. В.А.Абдулов, *Proc. of the 1970 CERN school of physics*, Geneva (1971).
5. Д.А.Киржниц, Проблемы теоретической физики, стр. 74, "Наука", Москва 1972.
6. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1264 (1967).
7. Н.Н.Боголюбов, Квазисредние в задачах статистической физики, препринт ОИЯИ, Р-1451 (1963).
8. P.W. Higgs, *Phys. Lett.*, 12, 132 (1964).
9. G. 't Hooft, *Nuclear Physics*, B35, 167 (1971).

# СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Л.Д. Соловьев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В этом кратком обзоре я расскажу об экспериментальных результатах, полученных на крупнейших ускорителях при исследовании четырехчастичных адронных амплитуд под малыми углами: 1) полные сечения, 2) наклон дифракционного конуса, 3) дифференциальное сечение при кулевом угле, 4) угловая зависимость дифференциального сечения, 5) разности полных сечений и сечение перезарядки.

## I. Полные сечения

Уже первые серпуховские результаты, полученные с помощью газовой мишени и обсуждавшиеся на семинаре в Азазу в 1970 г., наводили на мысль о росте полных сечений. Последующие прецизионные измерения, проведенные в Серпухове в 1971 г.<sup>1</sup>, и недавние результаты, полученные на накопительных кольцах в ЦЕРН<sup>2</sup>, показали, что полные сечения при высоких энергиях действительно растут. Рост  $K^+p$ -сечения начинается с 20 Гэв (рис.1), рост  $pp$ -сечения — примерно с 100 Гэв (рис.2).

Следует заметить, что измерение абсолютных сечений на накопительных кольцах требует точного знания плотности пучков в месте их соударения, которая не может быть непосредственно измерена. Использование же коосевых методов может внести в результат неконтролируемую систематическую ошибку. При 290 и 500 Гэв удалось определить сечения независимым способом, нормируя их на кулоновское сечение. Оба метода дали совпадающие результаты. Однако точки при 1070 и 1480 Гэв, указывающие на быстрый рост сечения, определены лишь по плотности пучков. Поэтому, хотя рост  $pp$ -сечения не вызывает сомнения, его скорость установлена несколько менее надежно.

Тем не менее, интересно рассмотреть, какую зависимость сечения от энергии дают полученные данные. Обработка pp-сечения в области  $50 < E < 1500$  Гэв по формуле

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \left( \ln \frac{E}{E_0} \right)^v , \quad (1)$$

где

$$\sigma_0 = (38,4 \pm 0,3) \text{ мбн} \text{ (серпуховский результат) и}$$

$$E_0 = 100 \text{ Гэв} \text{ (примерное положение минимума сечения), дает}$$

$$\sigma_1 = (0,9 \pm 0,3) \text{ мбн} \equiv 1 \text{ мбн} , \quad (2)$$

$$v = 1,8 \pm 0,4 \equiv 2 . \quad (3)$$

Последнее число соответствует тому, что сечение достигает границы Фруассара<sup>3</sup>.

Эта граница, как хорошо известно, соответствует насыщению парциальных волн вплоть до максимального момента, совместимого с аналитичностью. Естественно допустить, что такой механизм, если он работает вообще, является универсальным для всех упругих адронных процессов и дает асимптотику  $\sigma_1 \ln^2 E$  при  $E \rightarrow \infty$  для всех полных сечений.

Для описания сечений при конечных энергиях важны, разумеется, последующие члены асимптотики, порядка  $\ln E$  и константы. Они могут меняться для различных реакций. Иными словами, в формуле (1) параметры  $E_0$  и  $\sigma_0$  зависят от реакции. Параметр  $E_0$  определяется той областью, где сечение ведет себя как константа. Но  $K^+p$ -сечение ведет себя как константа уже при малых энергиях, и для него  $E_0 \approx 20$  Гэв, т.е. в 5 раз меньше, чем для pp-сечения. Формула (1) с тем же значением  $\sigma_1$  и  $E_0 = 20$  Гэв удовлетворительно описывает рост  $K^+p$ -сечения при серпуховских энергиях.

Но это значит, что  $K^+p$ -сечение очень выгодно для проверки формулы (1). В самом деле, для него достаточны энергии, в 5 раз меньшие, чем для pp-сечения. Там, где для pp-сечения нужна энер-

гия 1500 Гэв (кольца ЦЕРН), для  $K^*p$  нужен ускоритель на 300 Гэв, где для  $p\bar{p}$  нужны кольца (70 + 70) Гэв, для  $K^*p$ -сечения нужен ускоритель обычного типа на 2000 Гэв. Разумеется, только ускоритель обычного типа позволил бы проверить универсальность роста для всех адронных реакций, включая реакции с античастицами. Из дисперсионных соотношений и унитарности следует<sup>4</sup>, что если полное сечение для частицы возрастает, то должно возрастать сечение и для античастицы. Это значит, что  $p\bar{p}$ -сечение, которое сейчас резко убывает, должно пройти через минимум в области 200 Гэв, а затем начать быстро возрастать.

Замечу, что модель комплексных моментов резко противоречит данным с накопительных колец при 1070 и 1480 Гэв: расходжение составляет 5-7 стандартных отклонений. Впрочем, эта модель, как увидим ниже, испытывает серьезные трудности уже при серпуховских энергиях.

## 2. Наклон дифракционного конуса

Если полное сечение растет как квадрат логарифма энергии, то по тому же закону должен возрастать и параметр наклона дифракционного конуса упругого рассеяния

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \left( \ln \frac{E}{E_0} \right)^2 \quad (4)$$

(см., например, работы<sup>(5)</sup>). Однако коэффициент  $\theta_1$  в этой формуле может быть очень мал.

В самом деле, воспользуемся строгими асимптотическими неравенствами<sup>(5)</sup>

$$\sigma_{\text{...}} \leq \frac{4\pi}{t_0} \ln^2 E, \quad (5)$$

$$\left( \frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} \leq \frac{\sigma_0}{4t_0} \ln^2 E, \quad (6)$$

где  $\bar{\sigma}_{el}$  - полное сечение упругого рассеяния. Переидем в них к равенствам и в соответствии с (1) положим  $4\pi/t_0 = \sigma_1$ . Тогда при  $E \rightarrow \infty$  параметр наклона дифракционного конуса имеет вид

$$\beta = \frac{(d\sigma/dt)_{t=0}}{\bar{\sigma}_{el}} \underset{E \rightarrow \infty}{=} \frac{\sigma_1}{16\pi} \ln^2 E, \quad (7)$$

т.е. коэффициент  $\beta_1$  в (4) равен

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1}{16\pi} = 0,05 \text{ (Гэв/с)}^2. \quad (8)$$

Это число настолько мало, что во всем интервале доступных в настоящее время энергий поведение "  $\beta$  " определяется линейным логарифмическим членом в (4), т.е. параметром  $E_\beta$ , который можно выбрать так, чтобы описать логарифмическое возрастание  $\beta$ , наблюдавшееся в Серпухове <sup>6</sup>, Батавии <sup>7</sup> и ЦЕРН'е <sup>8</sup>. Таким образом, зависимость (4),(8) не противоречит эксперименту. Для проверки квадратичной логарифмической зависимости параметра наклона в pp-рассеянии нужны большие энергии, чем для проверки её в полном сечении. Не исключено, что  $K^+p$ -рассеяние окажется более благоприятным и в этом случае.

### 3. Дифференциальное сечение при нулевом угле

Как было замечено в п.1, одним из методов определения полного pp-сечения при 290 и 500 Гэв в ЦЕРН'е было измерение дифференциального сечения в кулоновской области. При этом по интерференции кулоновского и сильного взаимодействий была определена и реальная часть амплитуды упругого рассеяния. Это позволило сравнить с экспериментом дисперсионное соотношение для pp-рассеяния вплоть до 500 Гэв (рис.3). Мы видим, что согласие вполне удовлетворительное. Из рис.3 также видно, что точки в области 1-2 Гэв, о которых говорилось в Азау и которые расходились с дисперсионной кривой, были вновь измерены ленинградской группой <sup>9</sup> и теперь хорошо согласуют-

ся с дисперсионным соотношением. Таким образом, вплоть до энергии 500 Гэв дисперсионное соотношение не противоречит эксперименту.

Это соответствует расстояниям

$$l_{\text{рас}} \geq \frac{I}{500 \text{ Гэв}} = 4 \cdot 10^{-17} \text{ см}, \quad (9)$$

или, в системе центра масс,

$$l_{\text{с.у.м.}} \geq \frac{I}{30 \text{ Гэв}} = 7 \cdot 10^{-16} \text{ см}. \quad (9')$$

#### 4. Угловая зависимость дифференциального сечения

Для будущих моделей сильных взаимодействий существенна не только энергетическая зависимость амплитуд при нулевом угле, но и угловая зависимость дифференциальных сечений. В опытах на накопительных кольцах ЦЕРН<sup>8,10</sup> были обнаружены две особенности этой зависимости для pp-рассения.

1) Излом кривой  $d\sigma/dt$  при  $-t \approx 0,1 \text{ (Гэв/с)}^2$  (рис.4). Обсуждавшийся выше наклон дифракционного конуса отится к  $-t < 0,1 \text{ (Гэв)}^2$ . При больших значениях переданного импульса сечение падает менее круто.

2) При  $-t > 0,1 \text{ (Гэв/с)}^2$  дифференциальное сечение слабо зависит от энергии. При фиксированной энергии оно быстро падает с ростом  $-t$  и проходит через минимум при  $-t \approx 1,5 \text{ (Гэв/с)}^2$  (рис.5). Поведение сечения в этой области, изменяющегося почти на 7 порядков, неплохо описывается простой оптической моделью.

#### 5. Разности полных сечений и сечение перезарядки

Помимо самих полных сечений большой интерес представляет изучение разностей полных сечений для частиц и античастиц и сечений

перезарядок. Как отмечалось в Азару, уже эксперименты в Брукхзвене II при энергиях 8–20 ГэВ указывали на медленное убывание разности полных сечений рассеяния  $\pi^{\pm}$ -мюонов на протонах  $\Delta\sigma = \sigma(\pi^0 p) - \sigma(\pi^{\pm} p) \sim E^{-0.3}$ . Продолженное до бесконечности это поведение приводило к нарушению дисперсионного соотношения для перекрестно-нечетной амплитуды  $\pi^0 p$ -рассеяния, если в нем не сделать вычитания. Однако эта зависимость была получена на небольшом энергетическом интервале и по существу не исключала подгонки с более быстрым убыванием. Поэтому очень важно было продолжить измерение этой величины при больших энергиях, что и было сделано в Серпухове вплоть до энергий 60 ГэВ. Первые серпуховские эксперименты указывали на возможность постоянства  $\Delta\sigma$  при больших энергиях. Уточнение измерений I показало (рис. 6), что разности сечений  $\pi^0 p$  и  $\pi^{\pm} p$  – рассеяния убывают быстро, как  $E^{-0.5}$ , разность же  $\Delta\sigma$  для  $\pi^0 p$ -рассеяния продолжает медленно убывать по точно тому же закону, что и при меньших энергиях. Подгонка

$$\Delta\sigma = Q (E/1 \text{ ГэВ})^{-A} \quad (10)$$

в большом интервале 8–60 ГэВ дала  $Q = 4,0 \pm 0,3$  мбн,

$$A = 0,32 \pm 0,02. \quad (II)$$

В Серпухове было также измерено сечение перезарядки  $\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$  под нулевым углом <sup>12</sup>. Оказалось, что оно продолжает убывать по тому же закону, что и при меньших энергиях, именно, как  $E^{-1}$ . Если теперь воспользоваться изотопической инвариантностью, то это сечение определяет реальную часть перекрестно-нечетной амплитуды  $\pi^0 p$ -рассеяния, минимой частью которой является  $\Delta\sigma$ . Мы видим таким образом, что на большом интервале энергий реальная часть амплитуды убывает быстро, как  $E^{-0.5}$ , а минимая – медленно, как  $E^{-0.3}$ . Такое поведение, продолженное до бесконечности, несогласимо с аналитичностью. При высоких энергиях либо  $\Delta\sigma$ , либо сечение перезарядки должно изменить свое поведение.

Для иллюстрации сказанного вычислим сечение перезарядки, используя изотопическую инвариантность, дисперсионное соотношение и формулу (10) для  $\Delta b$ , продолженную до бесконечности (13). К чему при этом приводит дисперсионное соотношение без вычитания, показано на рис.7 верхней пунктирной кривой: имеется резкое расходжение с экспериментом. Не спасает дела даже увеличение степени A в (10) до 0,4 (нижняя пунктирная кривая).

Использование для экстраполяции  $\Delta b$  формулы, учитывающей разрезы в плоскости комплексного углового момента (она отличается от (10) фактором  $(1 - \delta / (d + \ln E))$ ), дает на рис.7 кривые, которые лежат между пунктирными линиями.

Таким образом, модель комплексных моментов, учитывающая один полюс и разрезы, не может описать имеющихся данных о разности  $\Pi^+$ -сечений и сечений перезарядки.

Можно попытаться ввести новые полюса, чтобы ввести в формулу (10) новые слагаемые и заставить кривую для  $\Delta b$  быстро убывать выше 60 Гэв (13). При этом дисперсионное соотношение без вычитания согласуется с перезарядкой. Однако 1) нет убедительных кандидатов для частиц, которые соответствовали бы этим полюсам; 2) вычеты при этих полюсах получаются безобразно большими; 3) кривая для  $\Delta b$  ниже 8 Гэв идет вниз и резко противоречит эксперименту. Таким образом, у нас по-существу нет разумной модели для быстрого убывания  $\Delta b$  выше 60 Гэв. Повторю, что это связано с тем, что прямая для  $\Delta b$  на рис.6 соответствует настолько большому интервалу энергий, что ее трудно искривить вне этого интервала. Разумеется, для проверки этого утверждения необходимо измерение  $\Delta b$  в Батавии.

Пока же можно сказать, что для спасения дисперсионного соотношения без вычитания остается одна возможность — отказать-

ся от изотопической инвариантности, т.е. допустить большую радиационную поправку в  $\Delta\sigma^+$ . Из общих соображений изъязя, например, можно включить поправку вида

$$\delta\Delta\sigma^+ = \alpha (\sigma(\pi^- p) + \sigma(\pi^+ p)), \quad (12)$$

где  $\alpha = 1/137$ . Поскольку сумма сечений  $\pi^{\pm}p$ -рассеяния при рассматриваемых энергиях почти в 30 раз больше их разности, то эта поправка достаточно велика, и её учет приводит к согласию дисперсионного соотношения без вычитания с перезарядкой. Надо сказать, что поправка (12) не возникает в простых моделях, например, реджевской или потенциальной. Её присутствие предотвратило бы самостоятельный интерес. Для её проверки необходимо измерить разность реальных частей амплитуд  $\pi^{\pm}p$ -рассеяния в опытах по интерференции с кулоновским рассеянием при 50 Гэв и выше с той же абсолютной точностью, которая была достигнута в измерениях ниже 20 Гэв<sup>(13)</sup>.

Если отказаться от больших радиационных поправок, то нужно пользоваться дисперсионным соотношением с вычитанием. За счёт выбора константы вычитания оно приводит к согласию с имеющимися данными о полных сечениях и перезарядке. В то же время оно радикальным образом меняет поведение реальной части амплитуды перезарядки при больших энергиях: реальная часть перестает убывать, проходит через максимум и стремится к константе на бесконечности. Точно так же ведёт себя и сечение перезарядки. Однако это изменение поведения происходит при очень больших энергиях: до 500 Гэв оно практически неотличимо от экстраполяции поведения, обнаруженного ниже 50 Гэв (рис.8).

Дисперсионное соотношение с вычитанием означает присутствие в амплитуде  $\pi^{\pm}p$ -рассеяния членов, которые не могут быть продолжены в комплексную плоскость углового момента. Отсутствие таких членов яв-

ляется первым постулатом модели комплексных моментов. Таким образом, вопрос о дисперсионном соотношении с вычитанием очень важен для моделей высокознергетического рассеяния. Для его проверки, как уже говорилось выше, нужно измерение  $\Delta\sigma$  в Батавии и реальных частей амплитуд  $\pi\pi$ -рассеяния в Серпухове и Батавии.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.П.Горин, С.П.Денисов, С.В.Донсов и др. Препринт ИФВЭ 71-49, Серпухов, 1971; ЯФ 14, 998, 1971; Phys. Lett., 36B, 415, 1971; Препринт ИФВЭ 72-59, Серпухов, 1972.
2. U.Amaldi, R.Biancastelli, C.Bosio et al. CERN Preprint, Geneva, December 1972; CERN Preprint, Geneva, January 1973; S.R.Amandola, G.Bellettini et al. CERN Preprint, Geneva, 1973.
3. M.Froissart. Phys. Rev., 123, 1053, 1961; A.Martin. Phys. Rev., 129, 1432, 1963; Nuovo Cim., 42, 930, 1966.
4. А.А.Логунов, М.А.Мествишили, О.А.Хрусталев. Препринт ИФВЭ 71-19, Серпухов, 1971; ТМФ, 9, 153, 1971.
5. А.А.Логунов, О.А.Хрусталев, М.А.Мествишили. Препринт ИФВЭ 73-25, Серпухов, 1973.  
S.M.Roy. Saclay Preprint D.Ph-T:72.20, Saclay, 1972.  
А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, М.А.Мествишили, Н.Н.Туан  
Proc. of the Topical Conf. on High Energy Collisions of  
Hadron vol. II, p.74, CERN, Geneva, 1968.
6. Г.Г.Безногих, А.Буяк, Л.Ф.Кириллов и др. Phys. Lett., 30 B, 274, 1969; 36 B, 266, 1971; 39 B, 411, 1972; Препринт ОИЯИ Е1-6613, Дубна, 1972.

7. В.А.Никитин и др. Доклад на заседании Американского физического общества, 1973.

8. U.Amaldi, R.Biancastelli, C.Bosio et al. Phys.Letters, 36B, 504, 1971; M.Holder, E.Radermacher, A.Staude et al. Phys.Letters, 35B, 359, 1971; 36B, 400, 1971; G.Barbiolliini, M.Bozzo, P.Dariulat et al. Phys.Letters, 39B, 663, 1972.

9. А.А.Воробьев, А.С.Денисов, Ю.К.Залите и др. Phys.Lett., 41B, 639, 1972.

10. C.Rubbia. Report at the XVI Intern.Conf. on High Energy Physics, Chicago, 1972.

11. K.J.Foley, R.S.Jones, S.J.Lindenbaum et al. Phys.Rev.Lett., 19, 330, 1967.

12. Ю.Д.Прокошкин. Доклад на XVI Международн. конф. по физике высоких энергий, Чикаго, 1972.

13. Л.Д.Соловьев, А.В.Щелкачев. Препринт ИФВЭ 72-55, Серпухов, 1972; Письма ЖЭТФ, 17, 216, 1973; Препринт ИФВЭ 73-15, Серпухов, 1973.

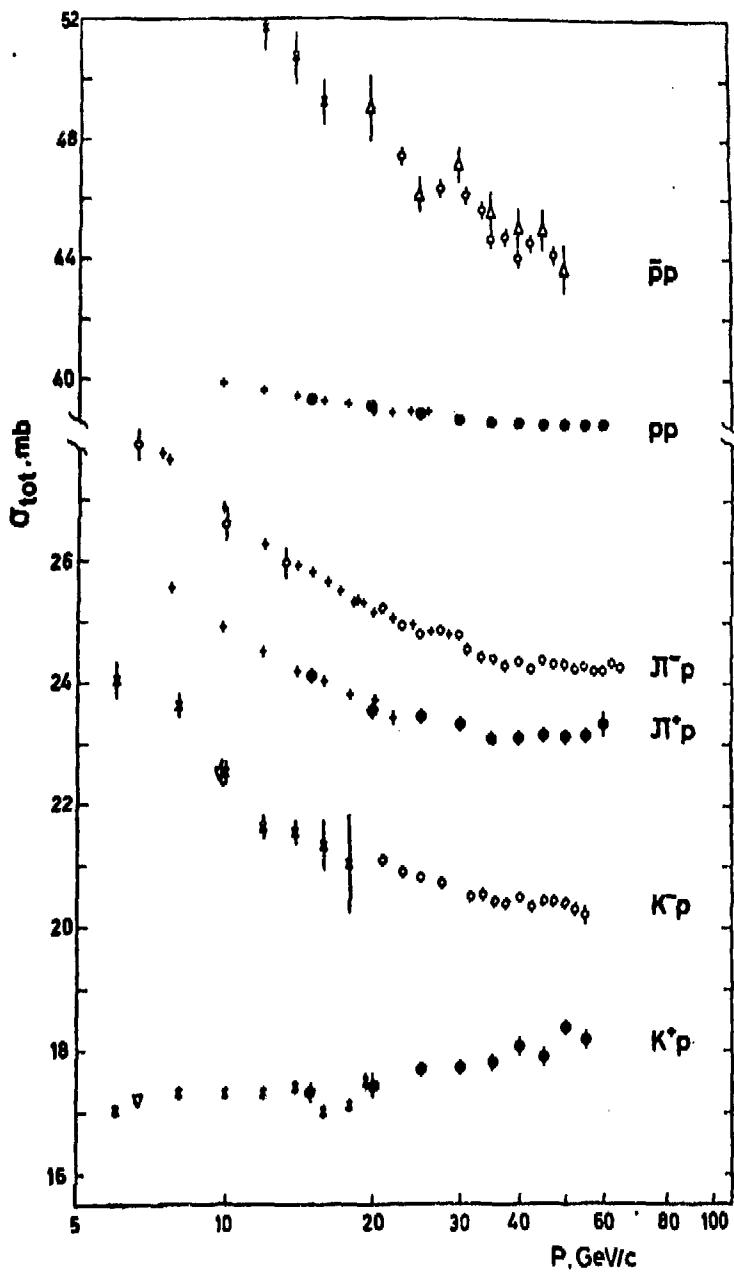


Рис.1. Полные сечения адрон-протонных взаимодействий /1/.

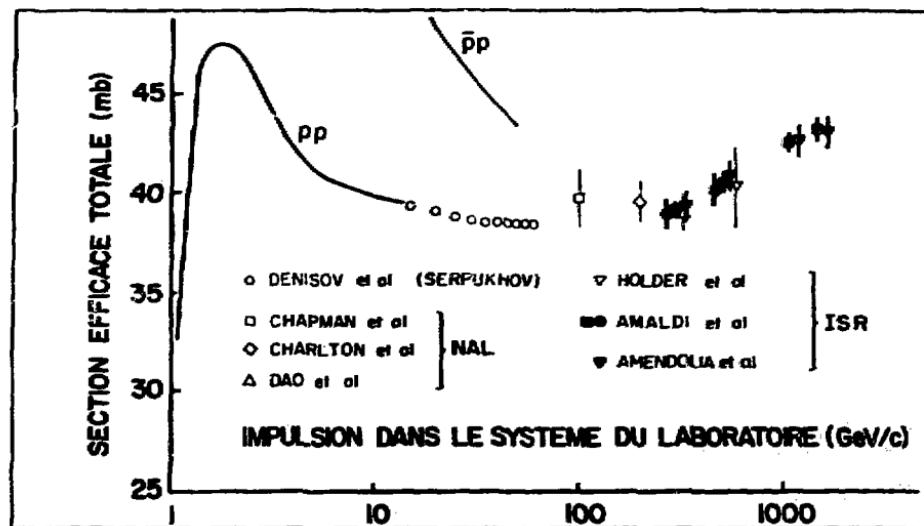


Рис.2. Полное сечение протон-протонного взаимодействия, полу-  
ченное на накопительных кольцах ЦЕРН /2/.

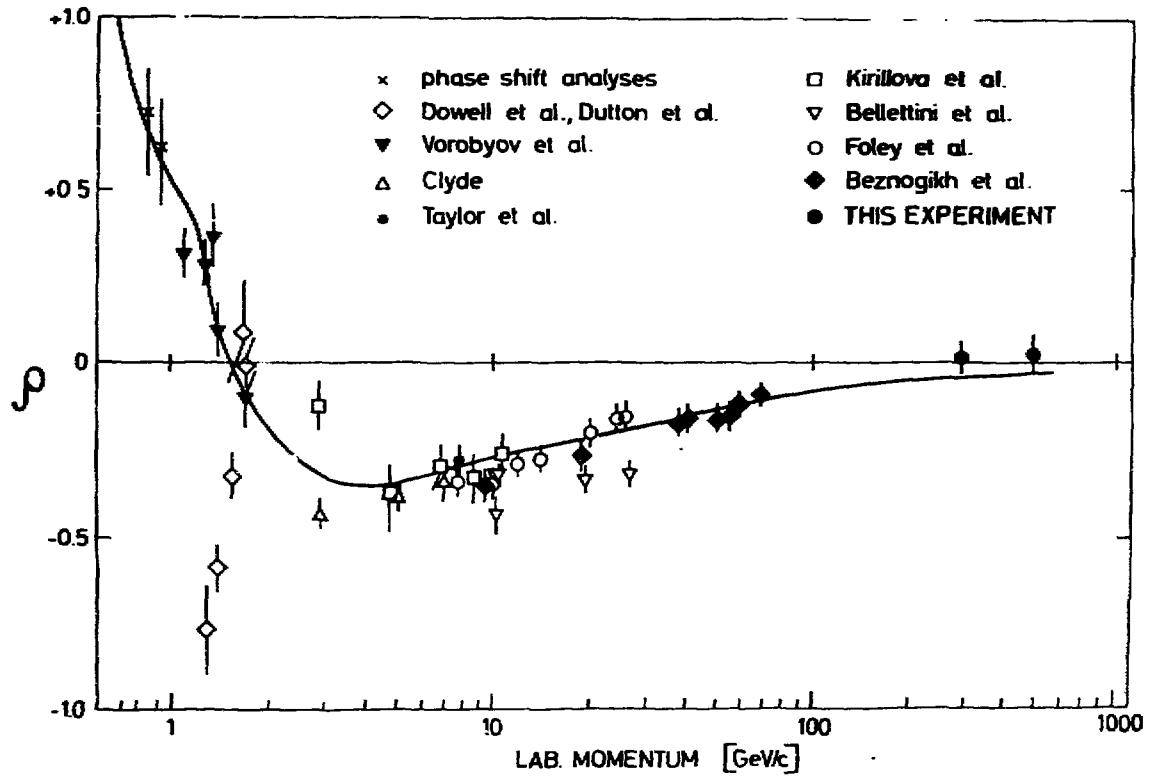


Рис.3. Отношение реальной части амплитуды упругого протон-протонного рассеяния к её минимум части при нулевом угле и её сравнение с расчетом по дисперсионному соотношению /21/.

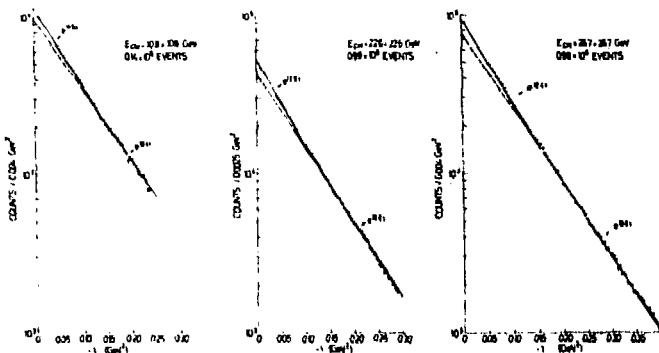


Рис.4. Поведение дифференциального сечения упругого протон-протонного рассеяния в области малых переданных импульсов /8/.

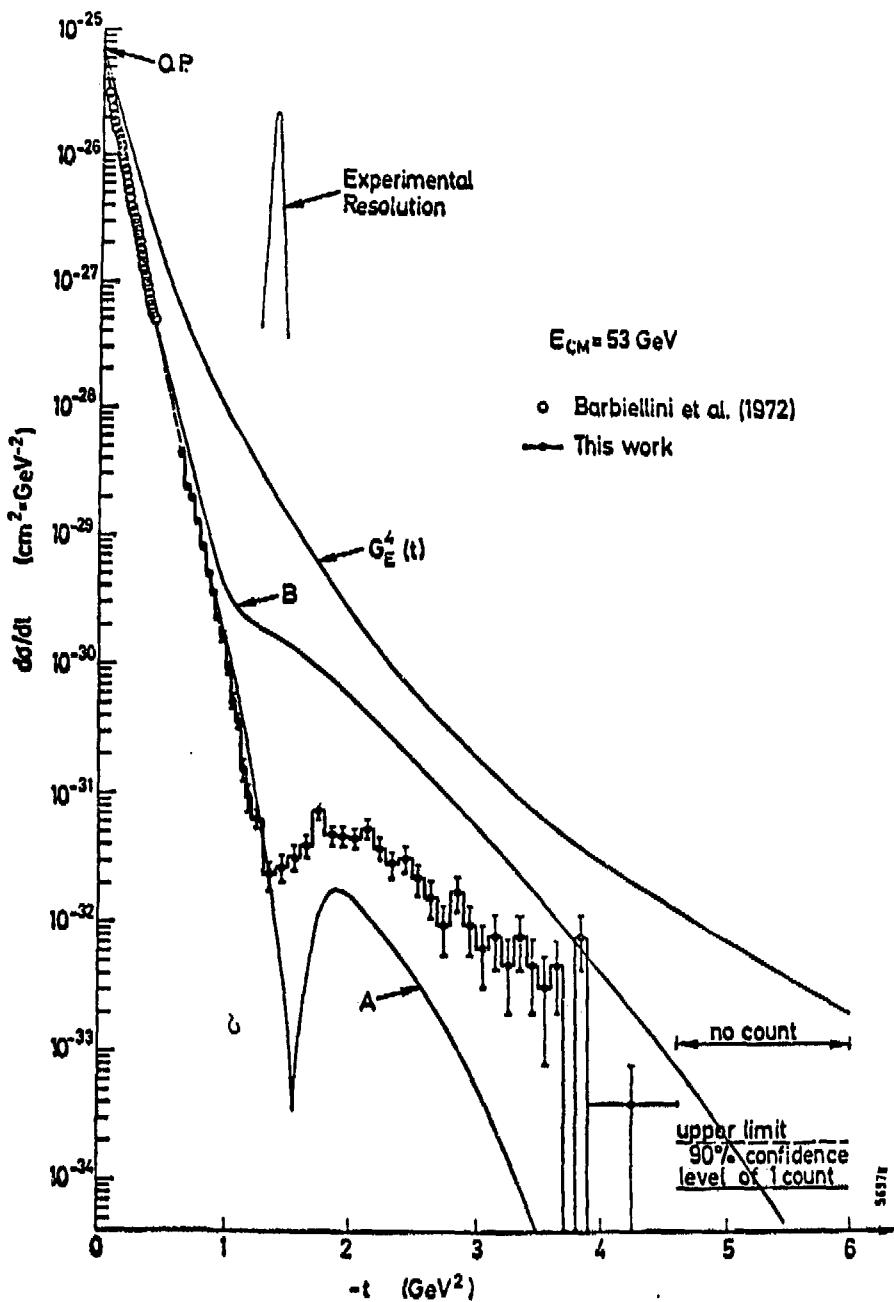


Рис.5. Поведение дифференциального сечения упругого протон-протонного рассеяния при средних переданных импульсах. Сплошные кривые соответствуют различным вариантам оптической модели /10/.

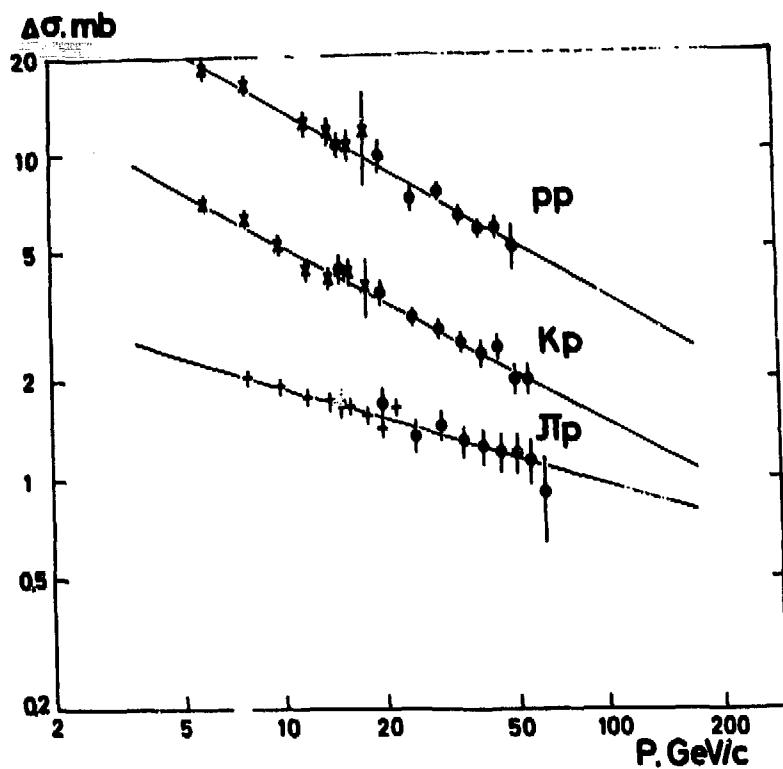


Рис.6. Разности полных сечений рассеяния частиц и античастиц на протонах  $\Delta\sigma(p) = \sigma(\bar{p}p) - \sigma(p\bar{p})$ , полученные в Серпухове /1/.

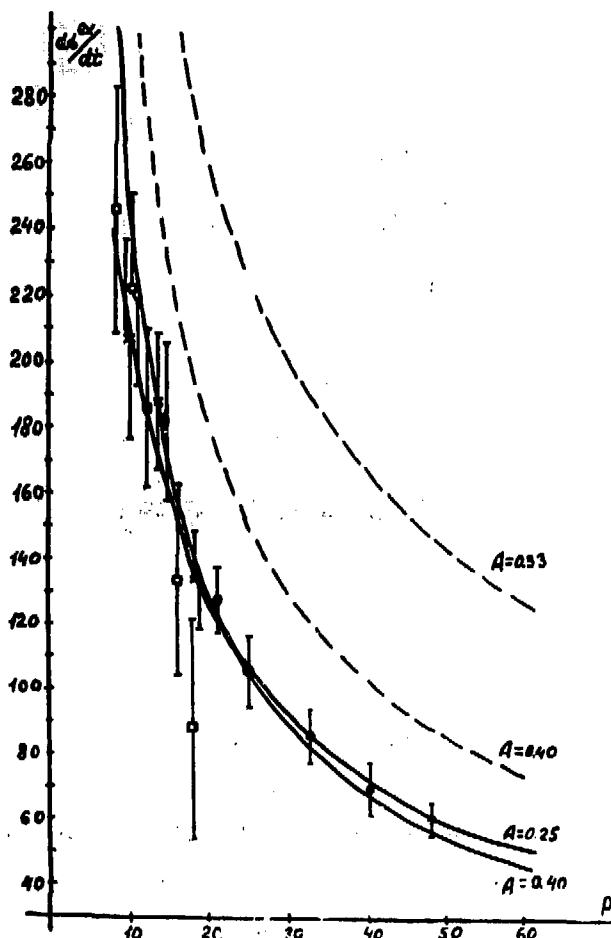


Рис.7. Дифференциальное сечение перезарядки  $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n$  при нулевом угле. Черные точки — серпуховские данные [12]. Верхняя пунктирная кривая соответствует расчету с помощью изотопической инвариантности и дисперсионного соотношения без вычитания, когда экспериментальная разность полных сечений для  $\pi^+ p$  — рассеяния (10) продолжена до бесконечности.

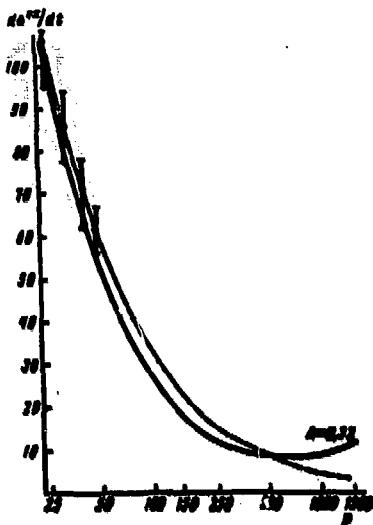


Рис.8. Дифференциальное сечение перезарядки при нулевом угле. Сплошная кривая – расчет с помощью изотопической инвариантности и дисперсионного соотношения с вычитанием. Пунктирная кривая – экстраполяция эмпирической зависимости.

SCALE AND CONFORMAL INVARIANCE IN QUANTUM  
FIELD THEORY

I.T.Todorov

Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy  
of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia

Introduction and Summary

Invariance under similarity transformations or scale invariance seems to be necessarily related to the idea of continuity in nature. The discovery of the atomic structure of matter, which provides natural units of mass and length destroyed the old hopes for an "automodel" picture of the world. It appears, however, that when we are far from the characteristic discrete values of elementary particle masses, i.e. for either very large (say macroscopic) or sufficiently small distances, it is useful to speak about approximate scale invariance.

"Short distances" in the momentum space picture means not just large transferred momenta and energies but uniformly large 4-momenta (including big 4-momenta squared). Therefore we would expect the scaling phenomenon to appear in off-shell Green functions not in on-shell S-matrix elements. Thus, it is not surprising that the first experimental evidence for scaling in elementary particle interaction was provided by the electron-proton deep inelastic scattering in which we have a highly virtual photon.

It is useful, even though we know that nature could be at most approximately scale invariant, to build up a limit-theory in

which the symmetry is exact. This turns out not to be a routine job. It is easy to construct a scale invariant Lagrangian: it suffices to take any renormalizable theory with a dimensionless coupling constant and to drop the mass terms. That, however, does not ensure dilatation symmetry of the theory. Renormalization introduces masses in one way or another (to make arguments of logarithms dimensionless) and thus destroys scale invariance. One can attempt to sum up perturbation theory logarithms into powers thus arriving at ( $g$ -dependent) anomalous dimensions. This works in the case of the Thirring model but fails in more realistic theories in four dimensions. Some log-terms still remain in that case even after introducing anomalous dimensions. The only possibility to retain scale invariance is given by the Gell-Mann-Low limit theory, in which the coupling constant is not arbitrary, but satisfies a transcendental equation (which makes the coefficient to the remaining logarithm vanish). This corresponds to the case of a finite charge renormalization in the renormalization group program. Thus, scale invariance of the asymptotic "skeleton" theory, leads to highly non-trivial implications. It fixes not only the type of the Lagrangean, but also (in principle) the numerical value of the dimensionless coupling constant!

Unfortunately, there exists no practical approach yet for actual evaluation of the critical value of  $g$ . However, it turns out that one can say a good deal about the (local) scale invariant field theory (if such a theory does in fact exist).

For a local interaction with a non-derivative coupling scale invariance implies conformal invariance. This was first established

formally at the level of Lagrangeans; it was later demonstrated in the Gell-Mann-Low limit theory. In the latter proof it is important that conformal invariance is related to the vanishing of the trace  $\Theta^\mu_\mu$  of the "improved" (conserved, symmetric) stress-energy tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ . On the other hand, conformal invariance allows to determine the two- and the three-point functions up to a few constants. For instance, in the case of a  $\delta_5$ -invariant boson-fermion Yukawa coupling the whole freedom is contained in three constants: the dimensions of the (pseudo) scalar and of the spinor fields  $d$  and  $d'$  and a multiplicative "coupling" constant  $g$  in front of the vertex function. It turns out that if the scale dimensions are canonical ( $d=1$  and  $d'=\frac{3}{2}$  in mass units) then the two-point functions coincide with the free zero-mass Wightman functions, and therefore, the whole theory is a free one. Hence, the field theoretic approach to scale and conformal invariance (unlike the Fritzsch and Gell-Mann light-cone algebra approach) requires necessarily anomalous dimensions (which are related to infinite field strength renormalization).

The only exceptions are the currents

$J_\mu$ , related to conserved charges, for which we always have  $d_1=3$  and the stress-energy tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ , for which  $d_\theta=4$ . Positivity of the two-point function implies that anomalous dimensions should exceed their canonical values ( $d>1$ ,  $d'>\frac{3}{2}$ ).

The possibility to write down closed expressions for the physical vertex function and the (dressed) propagator suggests to build up a skeleton graph expansion using these (conformal invariant) expressions without any reference to Lagrangean formalism. It turns out that such skeleton diagram expansions do not

satisfy unitarity identically in the coupling constant. The generalized ( off-shell) unitarity relations are shown to be equivalent to the renormalized Schwinger-Dyson ( "bootstrap") equations for the vertex functions and propagators. The number of independent equations of this type exactly coincides with the number of free parameters in the theory ( three, in the above example of Yukawa meson-nucleon interaction). Thus, we again end up with a theory with no free parameters. Unfortunately, the resulting highly non-linear "bootstrap" equations do not look much easier to write down explicitly. ( I am not speaking of solving them) than the Gell-Mann-Low or Callan-Symanzik equations which we encounter in renormalizable perturbation theory. (E.Fradkin is promising to demonstrate soon that they indeed do work . I would be very happy if that would happen.)

On the other hand, the "axiomatic" conformal invariance approach appears to be more general than the (local) Lagrangean theory. For example, we can write down an invariant vertex function for a pair of conjugate ( charged) spinor fields and the Maxwell electromagnetic stress tensor  $F_{\mu\nu}$  , while there is no (local) renormalizable interaction which could be constructed out of these fields.

It is crucial for the self-consistency of the scheme that no ultraviolet ( or catastrophic infrared) divergences appear in the skeleton graphs and in the diagrams entering the bootstrap equations. The point is that ( as it was said before) renormalization violates scale ( and conformal) invariance. For the above mentioned Yukawa model of meson-nucleon interaction it was proven

that no divergences appear in the range of dimensions  $1 < d < 3$  ( $d \neq 2$ ),  $3/2 < d' < 5/2$ .

The assumption of conformal invariance provides an algorithm to write down operator product expansions (OPE). That is important for both widening the scope of the theory and phenomenological applications. OPE were originally introduced as approximate expressions for products of the type

$A(x_1)B(x_2)$  valid for small  $x_1 - x_2$  or  $(x_1 - x_2)^2$ . Global conformal invariant OPE were first written down in the form

$$A(x_1)B(x_2) = \sum_{n,k} \int_0^1 du F_{nk}^{AB} (u, u(1-u)x_2^2 \square_2) (x_2^2)^{n-k} (12)^{n_1} (12)^{n_2} \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_2 + u12)$$

where  $(12)^{\mu} = x_1^{\mu} - x_2^{\mu}$  and the D'Alambertian  $\square_2$  acts only on  $x_2$  (not on the relative coordinate 12). The coefficients are related to the modified Bessel functions. A different formula is obtained when one looks at OPE as a decomposition of the direct product of two (unitary) representations of the conformal group in (the principle series of unitary) irreducible components. This is achieved by going first to the Euclidean Green functions and operating with representations of the group  $O(5,1)$ .

The reader, who would not be satisfied with the sketchy exposition presented here, is referred to the bibliography at the end of this summary (see in particular reference 8).

It is a pleasure to thank Prof. D.I. Blokhintsev and the Organizing Committee of the Alushta Seminar for their kind hospitality.

## Bibliography

Abbreviations: STP- Strong Interaction Physics, International Summer Institute on Theoretical Physics in Kaiserslautern, Ed. by W.Rühl and A.Vančura, Lecture Notes in Physics, vol.17 (Springer Verlag, Berlin, 1972).

MP= Proceedings of the International Conference on Mathematical Problems of Quantum Field Theory and Quantum Statistics, Moscow, Dec. 1972 ( to be published).

1. Renormalization Group, N.N.Bogolubov and D.V.Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields ( Moscow, Gosstekhizdat, 1957). ( English transl.: Interscience Publ., New York, 1959).
2. K.Wilson and J.Kogut, The renormalization group and the  $\epsilon$  - Expansion, Institute for Advanced Study, Princeton, preprint COO 2220-2 (1972) ( to be published in Phys. Reports).
3. D.V.Shirkov, Ultraviolet behaviour and finite charge renormalization ( to appear in MP).
4. Anomalous dimensions: K.Wilson, Phys.Rev. 179, 1499 (1969).
5. Conformal invariant 3-point functions: A.M.Polyakov, ZhETF Pisma Red. 12, 538, (1970), English transl. JETP Lett. 12, 381 (1970) .  
A.A.Migdal, Phys.Letters 37B, 98 and 386 (1971).
6. Absence of divergences: G.Mack and I.T.Todorov. Preprint IC/71/139 Trieste (1971) and Phys.Rev. D, (1973).
7. Ward identities: G.Mack and K.Symanzik, Commun.Math.Phys. 27, 247 (1972).

6. Operator product expansions:

S.Ferrara, A.Grillo, R.Gatto. Ann.Phys. (N.Y.) 76, 161 (1973).

V.K.Dobrev, E.H.Hristova, V.B.Petkova, D.B.Stamenov,

Symmetric part of the conformal covariant operator product expansion of two spin  $\frac{1}{2}$  fields, Lecture at the X-th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz (1973).

A.M.Polyakov, Duality in conformal field theory ( to be published).

G.Mack, Group theoretical approach to conformal invariant quantum field theory, Commun.Math.Phys. ( to be published).

7. Scale and conformal invariance and the general principle of local quantum field theory.

N.N.Bogolubov, A.N.Tavkhelidze and V.S.Vladimirov,

Dubna reports JINR, P2-6342 and E2-6490 (1972) and MP

V.A.Matveev, A.N.Tavkhelidze, D.Robaschik, E.Wieczorek,  
Conformal invariance and causality for the current matrix elements. ( Talk at this Meeting).

8. Recent reviews ( and additional references).

Talks of Mack, Schroer and Todorov in SIP.

Talks of Schroer, Tavkhelidze and Todorov in MP.

# ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н.А. Черников

Объединённый институт ядерных исследований

## I. Общий принцип относительности

Общий принцип относительности Эйнштейна, говоря на современном языке, состоит в том, что пространственно-временной мир объявляется четырехмерным дифференцируемым (достаточное число раз) многообразием, на котором задаётся система уравнений, описывающих ту или иную группу физических процессов. Среди объектов, определяемых системой уравнений, согласно общему принципу относительности, содержится метрический тензор, так что физические процессы, протекая в условиях неевклидовой геометрии, сами влияют на метрические свойства мира.

Такая постановка проблемы стала возможной, благодаря трудам Лобачевского, открывшего неевклидову геометрию, Гаусса, создавшего внутреннюю геометрию поверхностей, и Римана, окончательно оторвавшего теорию поверхностей от объемлющего пространства и обобщившего результаты Гаусса на многомерный случай. Лобачевский, в ещё большей степени Риман, а затем и Клиффорд указывали на то, что геометрия должна определяться физикой. Клиффорд подчёркивал, что геометрия пространства должна зависеть от времени, поскольку она определяется физическими процессами.

Но вплоть до открытия специальной теории относительности время рассматривалось в отрыве от пространства, как мы сказали бы теперь, пространственно-временной мир представляли тогда ещё в виде прямого произведения трёхмерного пространства на евклидову прямую – временную

ось. Начиная с Эйнштейна и Пуанкаре, одновременно пришедших к специальной теории относительности, пространственно-временной мир стали наделять геометрией, которая сделала малоудобным приём раздельного рассмотрения пространства и времени. Как оказалось, в основе такой геометрии мира лежит геометрия Лобачевского трёхмерного пространства скоростей (см. об этом <sup>1</sup>). Загадочная скорость света оказалась равной константе Лобачевского. Пространство скоростей сохранило геометрию Лобачевского и в общей теории относительности Эйнштейна, благодаря тому, что метрическую форму мира можно преобразовать к виду

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta = f^1 f^1 + f^2 f^2 + f^3 f^3 - f^0 f^0, \quad (I)$$

где  $f^\alpha$  - линейные формы на четырехмерном пространственно-временном многообразии.

Великая заслуга Эйнштейна состоит, конечно, не только в том, что он ввёл геометрию Римана в пространственно-временной мир. Он конкретно реализовал идею Римана, указав, что в метрических свойствах мира содержится вся информация о гравитационном поле. Уравнения тяготения Эйнштейна связывают геометрию мира с распределением энергии-импульса всех прочих физических объектов, кроме гравитационного поля.

Выше мы сформулировали общий принцип относительности. Другие формулировки этого принципа, как известно, вызывали многочисленные возражения. Встать на ука<sup>ж</sup>ную точку зрения стало возможным благодаря развитию теории многообразий, основоположником которой явился Пуанкаре. Со времён Пуанкаре теория многообразий получила всестороннее развитие, кстати сказать, благодаря и тем требованиям, которые предъявляла к математике общая теория относительности Эйнштейна. В

предлагаемой здесь формулировке общий принцип относительности вряд ли встретит какие-либо возражения, кроме разве что терминологических.

## 2. Трудности проблемы квантования полей в общей теории относительности

Выделенное положение гравитационного поля среди прочих физических объектов, в котором оно оказалось в теории Эйнштейна, сильно затрудняет проблему квантования полей. Если тензор энергии-импульса, скажем, скалярного поля становится операторным, то в силу уравнений Эйнштейна операторным становится тензор Риччи  $R_{\alpha\beta}$ , а вместе с ним и метрический тензор  $g_{\alpha\beta}$ . Казалось бы, это хорошо, поскольку операторным становится гравитационное поле, для которого предписываются тем самым некоторые правила квантования. Но как тогда понимать геометрию мира? Насколько нам известно, в математике на этот вопрос пока нет ответа. Ещё хуже получается, когда вместо скалярного поля мы рассматриваем спинорное. Согласно Картану, спиноры имеют метрическую природу, а потому не существуют на многообразии, на котором метрика не задана. Если же метрика становится операторной, то кроме трудностей в понимании самого этого условия надо ещё как-то понять, что такое спинор на многообразии с операторной метрикой.

С целью выяснить, что значит проквантовать метрический тензор нами (в соавторстве с Б.М. Барбашовым) была сделана попытка<sup>2</sup> проквантовать поле, подчинённое уравнению минимальных поверхностей в псевдоевклидовом пространстве, поскольку это уравнение во многом напоминает уравнения Эйнштейна  $R_{\alpha\beta} = 0$ . Однако хотя наша попытка и дала ряд результатов, в целом она не внесла желательной ясности. Более того, вскрылась ещё одна трудность: решение, удовлетворяющее однозначным данным Коши, вообще говоря, оказывается многозначной функ-

цией. Этот факт надо иметь в виду при изучении не только Эйнштейновских, но и других нелинейных уравнений поля.

В качестве временной меры можно отказаться от намерения проквантовать гравитационное поле и в уравнения Эйнштейна подставлять каким-либо способом усреднённый оператор тензора энергии-импульса. На этом пути надо решить проблему квантования полей (всех, кроме гравитационного) на фоне произвольно заданного риманова мира. В такой постановке задачи пренебрегаем эффектом воздействия физических процессов на геометрию мира, а значит, не берём в расчёт и уравнений Эйнштейна. Последние учитываются лишь после решения проблемы квантования негравитационных полей на фоне риманова мира. Эта ситуация близка к той, с которой мы имели дело при релятивистском обобщении газокинетической теории Больцмана: сначала была построена теория газа на фоне риманова мира<sup>3</sup>, а затем к кинетическому уравнению были добавлены уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса рассматриваемого газа<sup>4</sup>. Здесь легко просматривается аналогия с известной задачей Власова для электромагнитного поля. Как видно, этот путь открывает возможность учитывать влияние микроструктуры вещества на геометрию мира.

Плоский мир специальной теории относительности, с которым обычно имеют дело в квантовой теории поля, – всего лишь простейший частный случай риманова мира. Поэтому квантовую теорию поля в римановом мире надо строить так, чтобы она опиралась на геометрические свойства мира, присущие всем римановым мирам, и так, чтобы в частном случае плоского мира она совпадала с хорошо известной теорией. Последняя сильно опирается на группу изометрий, т.е. на группу преобразований, сохраняющих метрическую форму (которая в плоском случае в декартовых координатах равна  $dS^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ). В произвольном же римановом мире группа изометрий сводится к тождественному преобразованию. Следова-

тельно, надо строить теорию, не опираясь на группу изометрий.

Квантовая теория поля в плоском мире, если учитывать взаимодействие полей, сама содержит много трудностей. Поэтому в первую очередь надо ввести риманову геометрию мира в квантовую теорию поля, не учитывая взаимодействия полей. Полевые уравнения в таком случае линейны. При введении римановой геометрии линейность полевых уравнений сохраняется. Тем не менее, вводя риманову геометрию, мы решаем задачу о влиянии гравитационного поля на прочие поля, поскольку вся информация о гравитационном поле содержится в метрическом тензоре.

Нам удалось ввести риманову геометрию мира в квантовую теорию скалярного и спинорного полей. Этому вопросу посвящена остальная часть нашего обзора. Результаты, относящиеся к скалярному полю, получены совместно с Э.А. Тагировым <sup>5</sup>, а также с Н.С. Шавохиной <sup>6</sup>. Результаты, относящиеся к спинорному полю, получены совместно с Н.С. Шавохиной <sup>6</sup>. Предварительные результаты опубликованы в работах <sup>7-10</sup>.

### 3. Принцип конформной инвариантности

Движение частицы, если пренебречь её волновыми свойствами, согласно Эйнштейну, представляется мировой геодезической. Масса покоя  $m$  определяет уровень гамильтоновой функции  $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = -m^2 c^2$ . В случае нулевой массы покоя геодезические изотропны. Спрашивается, при каких преобразованиях метрики уравнения изотропных геодезических

$$\frac{dx^2}{2g^{\alpha\mu} p_\mu} = \dots = \frac{dx^3}{2g^{\beta\mu} p_\mu} = - \frac{dp_\alpha}{\frac{\partial g^{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} p_\mu p_\nu} = \dots = - \frac{dp_3}{\frac{\partial g^{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} p_\mu p_\nu} \quad (2)$$

не меняются? Такими преобразованиями являются  $g'^{\alpha\beta} = B^{-2} g^{\alpha\beta}$ ,

где  $B$  – скалярная функция мировых координат. Говорят, что два мира с так связанными метриками находятся в конформном соответствии. Поскольку уравнения изотропных геодезических конформно инвариантны, то безмассовая частица ведёт себя в мире с метрикой  $ds'^2 = B^2 ds^2$  так же, как и в мире с метрикой  $ds^2$ . Иначе говоря, безмассовая частица реагирует только на поле световых конусов. Переходя к описание волновых свойств частицы, конформную инвариантность поведения безмассовых частиц мы возведём в принцип: полевые уравнения при  $m=0$  должны быть конформно инвариантными.

В согласии с этим принципом находятся уравнения Максвелла и уравнение Дирака, если переход от евклидовой геометрии мира к римановой сопровождать одной только заменой частных производных по декартовым координатам ковариантными производными. Но если ковариантная производная от бивектора электромагнитного поля, как и от любого тензора, была хорошо известна, то этого отнюдь нельзя сказать о ковариантной производной от спинора. Это новое геометрическое понятие ввели В.А. Фок и Д.Д. Иваненко, обобщившие уравнение Дирака на риманову геометрию мира. Этот пример говорит о том, что задача о поведении частиц и полей на фоне риманова мира не так уж проста и сулит, кому посчастливится, большие успехи.

Часто приходится встречаться с мнением, что при переходе от плоского мира к риманову во всех случаях достаточно заменить частные производные по декартовым координатам ковариантными производными. Пример скалярного поля показывает, что это противоречит принципу конформной инвариантности. Действительно, скалярное безмассовое поле в плоском мире подчиняется в декартовых координатах уравнению

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0.$$

Произведя указанную выше замену, получим уравнение  $\square\Phi=0$ , где  $\square\Phi$  — второй дифференциальный параметр Бельтрами. Уравнение же  $\square\Phi=0$  конформно неинвариантно. Напротив, уравнение Пенроуза  $\square\Phi+\frac{1}{6}R\Phi=0$  конформно инвариантно. Согласно принципу конформной инвариантности, скалярное поле подчиняется не уравнению  $\square\Phi=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi$  а уравнению

$$\square\Phi+\frac{1}{6}R\Phi=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi. \quad (3)$$

Таким образом, оператор квадрата четырех-импульса скалярной частицы равняется  $-\hbar^2\{\square+\frac{1}{6}R\}$ , а не  $-\hbar^2\square$ . При подстановке

$$g'_{\alpha\beta}=B^2g_{\alpha\beta}, \quad \phi'=B^{-1}\phi \quad (4)$$

уравнение (3) переходит в уравнение

$$\square'\phi'+\frac{1}{6}R'\phi'=\left(\frac{mc}{B\hbar}\right)^2\phi'. \quad (5)$$

Напротив, в уравнении Дирака, как уже говорилось, чтобы удовлетворить принципу конформной инвариантности, достаточно заменить частные производные по декартовым координатам ковариантными производными. При подстановке

$$g'_{\alpha\beta}=B^2g_{\alpha\beta}, \quad \psi'=B^{-\frac{3}{2}}\psi \quad (6)$$

уравнение Дирака

$$H^v\psi_v=\frac{imc}{\hbar}H^4\psi \quad (7)$$

переходит в уравнение

$$H^{\nu} \psi' = \frac{imcH\psi'}{B\hbar}. \quad (8)$$

Равным образом и уравнения Максвелла

$$\nabla^{\mu} F_{\mu\alpha} = 0, \quad \nabla_{\alpha} F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F_{\alpha\mu} + \nabla_{\mu} F_{\nu\alpha} = 0,$$

где  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , при подстановке

$$g_{\alpha\beta}' = B^2 g_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta}' = F_{\alpha\beta}$$

переходят в уравнения

$$\nabla^{\mu} F_{\mu\alpha}' = 0, \quad \nabla_{\alpha}' F_{\mu\nu}' + \nabla_{\nu}' F_{\alpha\mu}' + \nabla_{\mu}' F_{\nu\alpha}' = 0,$$

т.е. удовлетворяют принципу конформной инвариантности при одной только замене частных производных по декартовым координатам ковариантными производными.

Исследуя релятивистский газ, мы в плотную подошли к принципу конформной инвариантности II. Последним препятствием, затруднившим принять этот принцип, явилось скалярное поле, для которого, как ошибочно считалось, должно было выполняться уравнение  $\square\phi = (\frac{mc}{\hbar})^2\phi$ .

Соображения, приведшие к принципу конформной инвариантности, возникли главным образом в связи с тензором энергии-импульса, о чем будет сказано дальше. Чтобы принять принцип конформной инвариантности, надо было установить уравнение (3). Это было сделано в работе<sup>5</sup>.

#### 4. Тензор энергии-импульса

Снова вернемся к классической частице. Запишем уравнение геодезических (2) в виде

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = p^{\alpha}, \quad \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} p^{\mu} p^{\nu}, \quad (9)$$

где  $\tau$  – собственное время частицы (поделенное на массу, если  $m \neq 0$ ). Пусть  $x = \bar{x}(\tau)$ ,  $p = \bar{p}(\tau) = \frac{dx}{d\tau}$  – решение этой

системы уравнений. Введем мировую  $\delta$ -функцию

$$\delta(x-y) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \prod_{\alpha=0}^3 \delta(x^\alpha - y^\alpha).$$

Через нее выражается векторное поле потока частицы

$$S^\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}^\alpha(\tau) \delta(x - \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (10)$$

и тензор энергии-импульса частицы

$$T^{\alpha\beta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}^\alpha(\tau) \bar{p}^\beta(\tau) \delta(x - \bar{x}(\tau)) d\tau. \quad (11)$$

Здесь предполагается, что временнеподобные и изотропные геодезические изоморфизмы евклидовой прямой. Это довольно сильное требование, предъявляемое к топологии мира. Мы будем предполагать также, что существует пространственно-подобная гиперповерхность  $\Sigma$ , разрезающая мир на две части - "прошедшее" и "будущее". Сама гиперповерхность  $\Sigma$  может служить образом "настоящего". Очевидно, если существует одна такая гиперповерхность, то их существует и бесконечное множество. Конечно, не один только плоский мир удовлетворяет этим требованиям. Например, им удовлетворяет и сферический мир де Ситтера.

Нетрудно видеть, что

$$\nabla_\alpha [\bar{p}^\alpha \delta(x - \bar{x})] = - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(x - \bar{x}).$$

Так как  $\bar{x}(\infty)$  и  $\bar{x}(-\infty)$  не являются мировыми точками, то  $\delta(x - \bar{x}(\infty))$  и  $\delta(x - \bar{x}(-\infty))$  равняются нулю.

Следовательно,

$$\nabla_\alpha S^\alpha = 0. \quad (12)$$

Имеем, дальше,

$$\nabla_{\alpha} [\bar{p}^{\alpha} \bar{p}^{\beta} \delta(x - \bar{x})] = -\frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{p}^{\beta} \delta(x - \bar{x})],$$

а следовательно,

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (14)$$

и что

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -m^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \bar{x}(\tau)) d\tau.$$

Таким образом,

$$T = 0, \text{ если } m = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь произвольную простую область  $\Omega$ . Согласно общей теореме Стокса, для любого векторного поля  $S^{\alpha}$  выполняется равенство

$$\oint_{\Omega} S_{\alpha} d\sigma^{\alpha} = \int_{\Omega} \nabla_{\alpha} S^{\alpha} d\tau, \quad (16)$$

где

$$d\tau = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad S_{\alpha} d\sigma^{\alpha} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} d_1 x^0 d_1 x^1 d_1 x^2 d_1 x^3 \\ d_2 x^0 d_2 x^1 d_2 x^2 d_2 x^3 \\ d_3 x^0 d_3 x^1 d_3 x^2 d_3 x^3 \\ S^0 S^1 S^2 S^3 \end{vmatrix},$$

$d_1, d_2, d_3$  — векторы элементарных смещений по границе области  $\Omega$ . Из (16) следует, что для векторного поля, удовлетворяющего условию (12), интеграл

$$I = \int_{\Sigma} S_{\alpha} d\sigma^{\alpha} \quad (17)$$

по гиперповерхности "настоящего" не зависит от выбора  $\Sigma$ .  
В случае векторного поля (10) этот интеграл равняется единице.  
для векторного поля

$$T^\alpha = k_\beta T^{\beta\alpha},$$

где  $k^\alpha$  — произвольное векторное поле, а тензор  $T^{\alpha\beta}$   
удовлетворяет условиям (I3) и (I4), имеем

$$\oint T_\alpha d\sigma^\alpha = \int_0 (k_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + F T) d\nu.$$

Здесь

$$F = \frac{1}{4} \nabla_\alpha k^\alpha, \quad k_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu) - F g_{\mu\nu}.$$

Таким образом, если обе последние величины равняются нулю, т.е.  
если векторное поле  $k^\alpha$  подчиняется уравнению Киллинга  
 $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$ , то интеграл равняется нулю. Если след  $T$   
равняется нулю, то интеграл равен нулю при  $k_{\mu\nu} = 0$   
и без того, чтобы  $F$  равнялось нулю. В этих случаях  
интеграл

$$\int_{\Sigma} T_\alpha d\sigma^\alpha = \int_{\Sigma} k^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu \quad (18)$$

не зависит от выбора  $\Sigma$ .

В случае (II) интеграл (18) равняется

$$\int_{\Sigma} k^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu = k_\mu p^\mu. \quad (19)$$

Мировая траектория  $x = \bar{x}(\tau)$  и гиперповерхность  $\Sigma$   
пересекаются при некотором значении  $\tau$ . В правую часть формулы

(19) входят точка  $x$  и импульс  $p$ , отвечающие этому значению  $\tau$ . Выражение  $K_\mu p^\mu$  является первым интегралом системы уравнений (9), если  $\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0$ . Если  $m = 0$ , то  $K_\mu p^\mu$  является первым интегралом при  $K_{\mu\nu} = 0$ . Действительно,

$$\frac{d}{d\tau} (K_\mu p^\mu) = K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - m^2 c^2 F.$$

Приравнивать же массу покоя нулю мы можем потому, что функция  $-m^2 c^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$  является первым интегралом системы уравнений (9).

Однопараметрическая группа преобразований мира, получающаяся в результате решения системы уравнений  $\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = K^\alpha(x)$  в случае  $\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0$  является изометрической, а в случае  $K_{\mu\nu} = 0$  - конформной. Поэтому в первом случае векторное поле  $K^\alpha$  будем называть изометрическим, а во втором - конформным. Соответственно, величину  $K_\mu p^\mu$  в первом случае будем называть изометрическим, а во втором - конформным моментом импульса частицы. Понятно, что изометрический момент является частным случаем конформного.

Переходя к описанию волновых свойств частицы, надо ожидать, что тензор энергии-импульса удовлетворяет условиям (13), (14) и (15). Так оно и есть на самом деле, если соблюдаются принцип конформной инвариантности. Как хорошо известно, всем трем условиям удовлетворяет тензор энергии-импульса электромагнитного поля и тензор энергии-импульса спинорного поля, равный (в ортогональном базисе)

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4} [\bar{\psi} H_\mu \psi - \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi + \bar{\psi} H_\nu \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu H_\nu \psi] \quad (20)$$

След этого тензора равен

$$T = -mc \bar{\psi} H_\nu \psi.$$

Напротив, при описании волновых свойств скалярной частицы не придерживались принципа конформной инвариантности и исходили из интеграла действия

$$S = \int \mathcal{L} d\nu, \quad (21)$$

где полагали

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2.$$

При этом получали тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\phi_\mu \phi_\nu + \phi_\nu \phi_\mu) - \mathcal{L} g_{\mu\nu},$$

который хотя и удовлетворяет условиям (I3) и (I4), но не удовлетворяет условию (I5). Если в (21) положить

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta - \frac{1}{12} R \phi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

и определить тензор энергии-импульса по Гильберту:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\nu,$$

то получится тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{can} - \frac{1}{6} (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi^2, \quad (22)$$

где

$$T_{\mu\nu}^{can} = \frac{1}{2} (\phi_\mu \phi_\nu + \phi_\nu \phi_\mu) - \mathcal{L} g_{\mu\nu}, \quad (23)$$

удовлетворяющий всем трем условиям (13, (14) и (15). След тензора (22) равняется

$$T = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2.$$

Мы получили результат, важный и для плоского мира: нашли тензор энергии-импульса скалярного поля, который дает новые сохраняющиеся величины. Не прибегая к общему принципу относительности, а также к принципу конформной инвариантности, этот тензор можно было бы получить лишь в результате довольно искусственных построений. На наш взгляд, это может кое-что сказать даже тем, кто не желает затруднять себя условиями неевклидова мира: играют роль не только значения функционалов от  $g_{\alpha\beta}$  при  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , но и значения функциональных производных по  $g_{\alpha\beta}$  при  $\dot{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ .

Итак, мы знаем, что в волновом случае тензору (II) соответствует тензор (20), если спин частицы равен половине, и тензор (22), если спин равен нуль. Вектору (10) в волновом случае в спинорном варианте соответствует (в ортогональном репере) вектор

$$S^\alpha = -\bar{v} H^\alpha u, \quad (24)$$

где  $u$ ,  $v$  — два решения уравнения Дирака (7). В скалярном варианте вектору (10) соответствует вектор

$$S^\alpha = g^{\alpha\mu} (u v_\mu - v u_\mu), \quad (25)$$

где  $u$ ,  $v$  — два решения уравнения (3). Как и (10), оба эти вектора удовлетворяют условию (12).

### 5. Ортогональный репер

Метрическая природа спиноров принуждает нас пользоваться ортогональным репером. При изучении взаимодействий скалярных и спинорных частиц приходится применять ортогональный репер и к скалярному полю. Приведем здесь краткую сводку формул, характеризующих ортогональный репер.

Координатный репер состоит из линейных форм  $dx^\alpha$ .  
Дуальный к нему репер состоит из векторных полей  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ . Ортогональный репер состоит из линейных форм

$$f^\alpha = f_\beta dx^\beta,$$

с помощью которых метрическая форма приводится к диагональному виду (1). Обратно,

$$dx^\alpha = \tilde{f}_\beta^\alpha f^\beta,$$

где  $f_\alpha^\beta \tilde{f}_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$  и, следовательно,  $\tilde{f}_\alpha^\beta f_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$ .

Дуальный к  $f^\alpha$  репер состоит из векторных полей

$$e_\alpha = \tilde{f}_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Имеем также

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = f_\alpha^\beta e_\beta.$$

Векторное поле можно задать как в координатном репере  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ , так и в ортогональном репере  $e$ :  $A^\alpha e_\alpha = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ , откуда  $A^\alpha = a^\beta f_\beta^\alpha$ ,  $a^\alpha = A^\beta \tilde{f}_\beta^\alpha$ . Конекторное поле (линейная

форма) аналогично задается как в координатном репере  $dx$ , так и в ортогональном репере  $f$  :  $A_\alpha f^\alpha = a_\alpha dx^\alpha$ .

Ковариантные производные вектора и ковектора в ортогональном репере равняются

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\beta A^\alpha &= e_\beta A^\alpha + \omega_{\beta\mu}^\alpha A^\mu, \\ \mathcal{D}_\beta A_\alpha &= e_\beta A_\alpha - \omega_{\beta\mu}^\mu A_\mu, \end{aligned} \quad (26)$$

что позволяет написать ковариантную производную любого тензора.

Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\gamma A^{\alpha\beta} &= e_\gamma A^{\alpha\beta} + \omega_{\gamma\mu}^\alpha A^{\mu\beta} + \omega_{\gamma\mu}^\beta A^{\alpha\mu}, \\ \mathcal{D}_\gamma A_\mu^\alpha &= e_\gamma A_\mu^\alpha + \omega_{\gamma\mu}^\alpha A_\mu^\beta - \omega_{\gamma\beta}^\mu A_\mu^\alpha, \\ \mathcal{D}_\gamma A_{\alpha\beta} &= e_\gamma A_{\alpha\beta} - \omega_{\gamma\alpha}^\mu A_{\mu\beta} - \omega_{\gamma\beta}^\mu A_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Величины  $\omega_{\alpha\beta}^\gamma$  называются коэффициентами вращения репера.

Они играют в ортогональном репере ту же роль, какую играют в координатном символы Кристоффеля, и находятся из двух условий. Первое из них – отсутствие кручения, второе – сохранение метрического тензора при параллельном переносе. В силу первого условия

$$\omega_{\alpha\beta}^\gamma - \omega_{\beta\alpha}^\gamma = C_{\alpha\beta}^\gamma,$$

где  $C_{\alpha\beta}^\gamma$ , называемые коэффициентами неголономности репера, определяются операцией Ли

$$e_\alpha e_\beta - e_\beta e_\alpha = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma.$$

Коэффициенты неголономности равняются

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = \tilde{f}_\alpha^\mu \tilde{f}_\beta^\nu \left( \frac{\partial f_\mu^\gamma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial f_\nu^\gamma}{\partial x^\mu} \right).$$

В силу второго условия

$$\omega_{\alpha\beta}^\mu \eta_{\mu\gamma} + \omega_{\alpha\gamma}^\mu \eta_{\beta\mu} = 0.$$

обозначая

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \eta_{\nu\mu} \omega_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad C_{\alpha\beta\nu} = C_{\alpha\beta}^{\mu} \eta_{\mu\nu},$$

находим

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2} (C_{\nu\beta\alpha} + C_{\alpha\beta\nu} - C_{\alpha\nu\beta}).$$

Ковариантные производные спинора  $\Psi$  и сопряженного спинора  $\bar{\Psi} = \Psi^* H_0$  равняются

$$\mathcal{D}_\nu \Psi = e_\nu \Psi + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta \Psi, \quad (27)$$

$$\mathcal{D}_\nu \bar{\Psi} = e_\nu \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta.$$

Матрицы  $H^\alpha$  удовлетворяют условиям  $H^\alpha H^\beta + H^\beta H^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}$ .

Матрица  $H^4 = i H^0 H^1 H^2 H^3$  антикоммутирует с  $H^\alpha$ . Ее квадрат равняется единице. Матрица  $H^0$  антиэрмитова, матрицы  $H^1, H^2, H^3, H^4$  эрмитовы. Ковариантные производные этих матриц равняются нулю.

Встречаются объекты, имеющие и спинорный и тензорный характер. Правила (26) и (27) позволяют находить их ковариантные производные. Например, спинорный и векторный характер имеет ковариантная производная спинора  $\Psi_\nu = \mathcal{D}_\nu \Psi$ . Вторая ковариантная производная спинора равняется

$$\mathcal{D}_\mu \Psi_\nu = e_\mu \Psi_\nu + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\mu} H^\alpha H^\beta \Psi_\nu - \omega_{\mu\nu}^\alpha \Psi_\alpha.$$

Тензор Римана-Кристоффеля в ортогональном базисе равняется

$$R_{\gamma,\alpha\beta}^\nu = e_\beta \omega_{\alpha\gamma}^\nu - e_\alpha \omega_{\beta\gamma}^\nu + C_{\alpha\beta}^\mu \omega_{\mu\gamma}^\nu + \omega_{\alpha\gamma}^\mu \omega_{\beta\mu}^\nu - \omega_{\beta\gamma}^\mu \omega_{\alpha\mu}^\nu.$$

Альтернированная вторая ковариантная производная от тензорного и спинорного объекта выражается алгебраически через сам объект и тензор Римана-Кристоффеля. Например,

$$(\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha) A_\nu = R_{\nu,\alpha\beta}^\sigma A_\sigma,$$

$$(\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha) A_{\mu\nu} = R_{\mu,\alpha\beta}^\sigma A_{\sigma\nu} + R_{\nu,\alpha\beta}^\sigma A_{\mu\sigma},$$

$$(\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha) \psi = \frac{1}{4} H^\mu H^\nu R_{\mu\nu, \alpha\beta} \psi,$$

где  $R_{\mu\nu, \alpha\beta} = \eta_{\nu\sigma} R_{\mu, \alpha\beta}^\sigma$ .

Все дальнейшие формулы мы будем записывать в ортогональном базисе.

### 6. Оператор конформного момента импульса

Проекции  $K_\mu P^\mu$  классического импульса частиц на векторное поле соответствует оператор

$$\hat{K} = -i\hbar (K^\mu \mathcal{D}_\mu + F), \quad (28)$$

действующий на скалярное поле, и оператор

$$\hat{K} = -i\hbar \{ K^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_\alpha K_\beta) [H^\alpha H^\beta] + \frac{3}{2} F \}, \quad (29)$$

действующий на спинорное поле. Квадратными скобками мы обозначаем алтернированное произведение матриц.

Если  $K_{\alpha\beta} = 0$ , то оператор  $\hat{K}$  мы будем называть оператором конформного момента импульса. В частном случае, когда не только  $K_{\alpha\beta}$ , но и  $F$  равняется нулю, мы будем называть его оператором изометрического момента импульса.

Коммутатор оператора полевого уравнения (3) с оператором (28) равняется

$$\frac{i}{2\hbar} \left[ \square + \frac{1}{6} R - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2, \hat{K} \right]_- = \mathcal{D}^\alpha K_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta + \\ + \frac{1}{6} \{ (\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta K^{\alpha\beta}) + K_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \} + F \{ \square + \frac{1}{6} R \},$$

а коммутатор оператора полевого уравнения (7) с оператором (29) равняется

$$\frac{i}{\hbar} \left[ H^\nu \mathcal{D}_\nu - \frac{imc}{\hbar} H^4, \hat{K} \right]_- = \frac{1}{2} H^\alpha (\mathcal{D}^\beta K_{\alpha\beta}) + \\ + H^\alpha K_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta + F H^\alpha \mathcal{D}_\alpha.$$

Таким образом, оператор изометрического момента импульса действует в пространстве решений полевого уравнения. Оператор конформного момента импульса действует в пространстве решений полевого уравнения, если  $M=0$ .

### 7. Задача Коши и правила квантования полей

Кажется правдоподобным, что данные Коши на гиперповерхности "настоящего"  $\Sigma$  должны однозначно определять во всем мире  $M$  решение полевых уравнений (3) и (7). Но если это положение и окажется, вообще говоря, неверным, то примем его как в должной мере ограничивающее класс рассматриваемых здесь римановых миров. Ключом к решению задачи Коши является в случае уравнения (3) векторное поле (25), а в случае уравнения (7) – векторное поле (24).

Начнем со скалярного поля. Интеграл (17), поскольку он не зависит от выбора  $\Sigma$ , задает в пространстве решений уравнения (3) антисимметричное скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{\Sigma} (uv_{\nu} - vu_{\nu}) d\sigma^{\nu}. \quad (30)$$

Скалярное поле  $\phi$  квантуем согласно статистике Бозе. Это означает, что значения поля  $\phi$  на гиперповерхности  $\Sigma$  и значения его нормальной к  $\Sigma$  производной рассматриваем как генераторы алгебры, являющейся бесконечномерным аналогом квантовой механики. Общий элемент линейной оболочки генераторов имеет следующий вид

$$U = (u, \phi), \quad (31)$$

где поле  $u$  продолжает считаться неквантованным. Формула (31) устанавливает линейное отображение линейной оболочки генераторов на пространство решений уравнения (3). Как и (30), (31) не зависит от выбора гиперповерхности  $\Sigma$ . Полагая для любых двух операторов  $U, V$  типа (31)

$$[U, V] = i\hbar (u, v), \quad (32)$$

мы вводим антисимметрическое скалярное произведение в оболочке генераторов.

Если подставить в (32) выражение (31) для  $V$ , то нетрудно заметить следующее. Поскольку функции  $U$  и  $U_{(n)} = U_n n^\alpha$ , где  $n^\alpha$ -нормаль к  $\Sigma$ , могут принимать на  $\Sigma$  произвольные значения, то для  $x \in \Sigma$

$$[\phi(x), U]_- = i\hbar u(x), \quad [\phi_{(n)}(x), U]_- = i\hbar u_{(n)}(x).$$

Но вместе с  $\phi(x)$  коммутатор  $[\phi(x), U]_-$  подчиняется уравнению (3), тому же, что и  $u(x)$ . Из единственности решения задачи Коши для уравнения (3) следует, что

$$[\phi(x), U]_- = i\hbar u(x) \quad (33)$$

для любой мировой точки  $x$ . Запишем это равенство в развернутом виде

$$u(x) = \int_{\Sigma} \{ \Delta(x, y) u_{\mu}(y) - \Delta_{\mu}(x, y) u(y) \} d\sigma^{\mu}, \quad (34)$$

где

$$\Delta(x, y) = \frac{i}{\hbar} [\phi(x), \phi(y)]_- = -\Delta(y, x), \quad (35)$$

$\Delta_{\mu}(x, y)$  означает ковариантную производную от  $\Delta(x, y)$  по второму аргументу. Мы видим, что перестановочная функция (35) дает решение задачи Коши для уравнения (3). Эта функция сама удовлетворяет уравнению (3). Поэтому согласно (34) имеем

$$\Delta(x, y) = \int_{\Sigma} \{ \Delta_{\mu}(y, z) \Delta(z, x) - \Delta_{\mu}(x, z) \Delta(z, y) \} d\sigma^{\mu}. \quad (36)$$

Пусть теперь для некоторой гиперповерхности  $\Sigma$  каким-либо методом решена задача Коши:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \{ T(x, y) u_{\mu}(y) - T_{\mu}(x, y) u(y) \} d\sigma^{\mu}.$$

Сравнивая этот результат с (34), замечаем, что  $\Delta(x, y) = T(x, y)$ ,  $\Delta_{\mu}(x, y) n^{\mu} = T_{\mu}(x, y) n^{\mu}$  на  $M \times \Sigma$ . Согласно (35) и (36), находим перестановочную функцию

$$\frac{i}{\hbar} [\phi(x), \phi(y)]_- = \int_{\Sigma} \{ T_{\mu}(x, z) T(y, z) - T_{\mu}(y, z) T(x, z) \} d\sigma^{\mu} \quad (37)$$

всюду на МХМ. Эта формула тесно связывает задачу Коши с правилами квантования поля. Аналогичная формула имеется и в спинорном варианте.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнения Дирака и сопряженного с ним уравнения, т.е. систему уравнений

$$H^* u_v = \frac{imc}{\hbar} H^4 u, \quad \bar{v}_v H^v = - \frac{imc}{\hbar} \bar{v} H^4. \quad (38)$$

Пусть  $u, \bar{v}$  — решение этой системы. Интеграл (17) с векторным полем (24) задает в пространстве решений системы уравнений (38) симметричное скалярное произведение. Скалярный квадрат равняется

$$(v, u) = - \int_{\Sigma} \bar{v} H_v u d\sigma^v. \quad (39)$$

Спинорное поле  $\psi$  квантуем согласно статистике Ферми. Это означает, что пара спинорных полей  $\bar{\psi}, \psi$  порождает бесконечномерную алгебру Клиффорда. Генераторы алгебры  $\bar{\psi}, \psi$  на гиперповерхности  $\Sigma$  линейно независимы. Общий элемент линейной оболочки генераторов равняется  $U + V^*$ , где

$$U = (\bar{v}, u), \quad V^* = (\bar{v}, \psi), \quad (40)$$

и где поля  $u, \bar{v}$  продолжают считаться неквантованными. Эти формулы устанавливают линейное отображение линейной оболочки генераторов на пространство решений системы уравнений (38). Как и (39), элементы  $U, V^*$  не зависят от выбора гиперповерхности  $\Sigma$ . Полагая

$$(U + V^*)^2 = (\bar{v}, u), \quad (41)$$

мы вводим симметричное скалярное произведение в оболочке генераторов.

Если  $u, \bar{v}$  — решение системы (38), то и две пары  $u, o$  и  $o, \bar{v}$  также являются решениями системы (38). Поэтому из (41) следует

$$U^2 = 0, \quad V^{*2} = 0 \quad (42)$$

и, далее,

$$[U, V^*]_+ = UV^* + V^*U = (\bar{v}, u). \quad (43)$$

Подставляя в (43) выражение (40) для  $V^*$ , ввиду произвольности  $\bar{v}$  на  $\Sigma$ , получаем, что на  $\Sigma$

$$[\psi(x), U]_+ = u(x). \quad (44)$$

Подставляя же выражение (40) для  $U$ , получаем, что на  $\Sigma$

$$[V^*, \bar{\psi}(x)]_+ = \bar{v}(x). \quad (45)$$

Но вместе с парой  $\psi, \bar{\psi}$  система уравнений (38) подчиняется и пара антисимметрических операторов  $[\psi(x), U]_+, [V^*, \bar{\psi}(x)]_+$ . Из единственности решения задачи Коши для системы уравнений (38) следует, что равенства (44), (45) справедливы не только на гиперповерхности  $\Sigma$ , но и во всем мире  $M$ .

Подобным же образом из (42) выводится, что для любой мировой точки  $x$  справедливы равенства

$$[\psi(x), V^*]_+ = 0, \quad [U, \bar{\psi}(x)]_+ = 0.$$

Ввиду произвольности  $u, \bar{v}$  на  $\Sigma$  отсюда следует, что для любой точки  $y$ , лежащей на  $\Sigma$ ,

$$[\psi_p(x), \psi_q(y)]_+ = 0, \quad [\bar{\psi}_q(y), \bar{\psi}_p(x)]_+ = 0, \quad (46)$$

где  $p$  и  $q$  - номера компонент спиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . В силу единственности решения задачи Коши для системы (38) равенства (46) оказываются справедливыми и для любой мировой точки  $y$ .

Обозначим  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+$  матрицу с компонентами  $[\psi_p(x), \bar{\psi}_q(y)]_+$ . Она удовлетворяет следующему алгебраическому условию

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ H^* = H_0 [\psi(y), \bar{\psi}(x)]_+^\dagger, \quad (47)$$

где  $\dagger$  означает эрмитовское сопряжение матрицы. Из (40) и (43) следует, что если через две различные мировые точки  $x$  и  $y$  можно провести гиперповерхность "настоящего"  $\Sigma$ , то  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = 0$ .

Из (31) и (32) следует, что для таких точек  $x$  и  $y$   $[\phi(x), \phi(y)]_+ = 0$ .

Записав равенства (44) и (45) в развернутом виде

$$u(x) = - \int_{\Sigma} [\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ H_v u(y) d\sigma^v, \\ \bar{u}(x) = - \int_{\Sigma} \bar{u}(y) H_v [\psi(y), \bar{\psi}(x)]_+ d\sigma^v, \quad (48)$$

замечаем, что антикоммутатор  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+$  дает решение задачи Коши для системы уравнений (38). Поскольку и сам антикоммутатор  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+$  удовлетворяет этой системе, то согласно (48) имеем

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = - \int_{\Sigma} [\psi(x), \bar{\psi}(z)]_+ H_v [\psi(z), \bar{\psi}(y)]_+ d\sigma^v \quad (49)$$

Пусть теперь для некоторой гиперповерхности  $\Sigma$  каким-либо методом решена задача Коши:

$$u(x) = - \int_{\Sigma} \bar{S}(x, y) H_v u(y) d\sigma^v,$$

$$\bar{u}(x) = - \int_{\Sigma} \bar{u}(y) H_v S(y, x) d\sigma^v.$$

Сравнивая этот результат с (48), замечаем, что  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = \bar{S}(x, y)$ ,  $[\psi(y), \bar{\psi}(x)]_+ = S(y, x)$  на прямом произведении  $M \times \Sigma$ . В соответствии с (47) функции  $\bar{S}$  и  $S$  связаны друг с другом:  $\bar{S}(x, y) H^o = H_o S^{\dagger}(y, x)$ . Согласно (49) находим

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = - \int_{\Sigma} \bar{S}(x, z) H_v S(z, y) d\sigma^v \quad (50)$$

всюду на ММ. Эта формула аналогична формуле (37).

### 8. Вторично квантованный оператор конформного момента

Для любого векторного поля  $K^a$  и тензора энергии-импульса скалярного поля (22) можно доказать равенство

$$\int_{\Sigma} K^a T_{\mu\nu} d\sigma^v = \frac{1}{2i\hbar} (\phi, \dot{K}\phi) + \\ + \frac{1}{6} \int \{ 2(\mathcal{D}^\alpha \phi^*) K_{\alpha\nu} + \phi^* \mathcal{D}^\alpha K_{\alpha\nu} \} d\sigma^v$$

и аналогичное равенство для тензора энергии-импульса спинорного поля

$$\int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu} = (\bar{\psi}, \hat{K} \psi) - \frac{i\hbar}{2} \int_{\Sigma} \bar{\psi} H^{\alpha} \psi K_{\alpha\nu} d\sigma^{\nu},$$

где  $\hat{K}$  - оператор (28) и (29), соответственно. Скобки, окружающие оператор  $\hat{K}$ , равняются (30) и (39), соответственно. В частности, для конформного векторного поля получаются равенства

$$\int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu} = \frac{1}{2i\hbar} (\phi, \hat{K} \phi),$$

$$\int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu} = (\bar{\psi}, \hat{K} \psi). \quad (51)$$

Эти интегралы являются вторичными квантованными операторами конформного момента.

Для изометрического векторного поля в скалярном варианте

$$\int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu} = \int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu}^{\text{can}} d\sigma^{\nu}. \quad (52)$$

В случае плоского мира именно это обстоятельство скрывало необходимость перехода от канонического тензора энергии-импульса к метрическому, пока не пришлось рассмотреть конформный момент импульса и принять во внимание принцип конформной инвариантности поведения безмассовых частиц.

### 9. Проблема вакуума

В спинорном варианте оболочки генераторов алгебры мы получили в виде комплексного линейного пространства. Определим действительные элементы оболочки. Для этого заметим, что если пара  $(u, \bar{v})$  является решением системы (38), то и пара  $(u, \bar{v})^* = (v, \bar{u})$  также является решением этой системы. Такие две пары назовем комплексно сопряженными. Решение назовем действительным, если  $(u, \bar{v})^* = (u, \bar{v})$ , т.е.  $u = \bar{v}$ . Соответствующий элемент  $U + U^*$  оболочки будем называть действительным.

В скалярном варианте поле  $\phi$  мы считаем действительным. Поэтому оболочку генераторов алгебры получаем в виде действительного векторного пространства. Но ничто не мешает нам рассматривать комплексные решения и уравнения (3). Соответствующие элементы (31) оболочки становятся комплексными.

В обоих вариантах мы имеем дело с комплексным линейным многообразием  $L^C$  и его вещественной частью  $L^R$ . Чтобы определить вакуум, в обоих вариантах надо задать на  $L^R$  эрмитову структуру. Но правила квантования полей в спинорном случае задают квадратичную форму, а в скалярном – внешнюю квадратичную форму. Таким образом, в обоих случаях, чтобы определить вакуум, нужно задать комплексную структуру, т.е. задать на  $L^R$  линейный оператор, квадрат которого равняется минус единичному. Тогда в спинорном случае определится внешняя квадратичная форма, а в скалярном – квадратичная форма. Вместе с тем определится оператор числа частиц.

Итак, проблема вакуумного состояния сводится к естественному выбору комплексной структуры. В случае статического мира комплексная структура задается вторично квантованным оператором энергии, т.е. оператором изометрического момента импульса, порожденного бесконечно малым сдвигом по времени. Когда масса покоя  $m$  равняется нулю, этот результат обобщается на случай конформно статического мира. Тот же сдвиг по времени дает оператор энергии, который становится оператором конформного момента импульса. При  $m=0$  так выбранное вакуумное состояние не зависит от конформного множителя  $B^2$ . Имеется интересный пример, а именно сферический мир де Ситтера, где нам удалось определить вакуум при любых  $m$ , несмотря на то, что этот мир нестационарный. В других случаях проблема однозначного выбора вакуума остается открытой.

## 10. Конформно-инвариантные взаимодействия полей

Принцип конформной инвариантности сильно ограничивает выбор нелинейных уравнений поля. Например, для одного скалярного поля лагранжиан взаимодействия должен равняться  $\frac{1}{4}f\phi^4$ , лагранжиан взаимодействия спинорного поля со скалярным должен равняться  $g\phi\bar{\Psi}H_4\Psi$ ;  $f$  и  $g$  - константы. Варьируя интеграл действия, получаем систему уравнений

$$\square\phi + \frac{1}{6}R\phi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi + f\phi^3 + g\bar{\Psi}H_4\Psi,$$

$$-i\hbar H^\nu\psi_\nu = (Mc - g\phi)H_4\Psi.$$

конформно инвариантную при  $m=0$ ,  $M=0$ . Здесь  $M$  - масса фермиона,  $m$  - масса бозона.

## Литература

1. Н.А.Черников. ИЛМ, физ.-мат. 2, 158, 1959.  
Препринт ОИЯИ, Р-723, Дубна, 1961. Между.Зимняя школа  
теор.физики при ОИЯИ, Дубна, 1964. Сб. "Гравитация и теория  
относительности", вып.2, Казань, 1965. Препринт ИТФ-68-44,  
Киев, 1968.
2. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников, Препринт ОИЯИ, Р-2151, 1965.  
ИЭТФ, 50, вып.5, 1966. ИЭТФ, 51, вып.8, 1966.  
Совет.мат.Phys. 3, 1966.  
Межд.школа по теор.физике, АН УССР, ОИЯИ, Ялта, 1966.
3. Н.А.Черников, ДАН СССР, 144, №1, 1962. Препринт ОИЯИ,  
Р-1028, 1962. Acta Phys.Polonica, XXIII, №.5, 1963.
4. Н.А.Черников. ДАН СССР, 144, №2, 1962.
5. Н.А.Черников, З.А.Тагиров. Ann.Inst.Henri Poincaré,  
IX, №.2, Sect.A, Paris, 1968. Препринт ОИЯИ, Р2-3777, 1968.
6. Н.А.Черников, Н.С.Навохина. Препринт ОИЯИ Р2-6109, 1971;  
Р2-6173, 1972; Р2-6351, 1972; Р2-6820, 1972; Р2-6965, 1973.
7. З.А.Тагиров, Н.А.Черников. ДАН СССР, 160, №5, 1965,  
Препринт ОИЯИ Е-1812, 1964.
8. З.А.Тагиров, Е.Д.Федорьев, Н.А.Черников, Препринт ОИЯИ,  
Р2-3392, 1967.
9. Н.С.Навохина. Сб. " Теории относительности и гравитация".  
вып.7, 1970, вып.8, 1971, Казань.
10. Н.С.Навохина. ТМФ 10, №3, 1972.
- II. Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р-1159, 1962,  
Acta Phys.Polonica, XXVI, №.6, 1964.

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ  
И ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ ТЕОРИИ НА ПОРОГЕ

Г.А.Вилковысский, Е.С.Фрадкин

Физический институт им.П.Н.Лебедева АН СССР

I. Обобщенные соотношения Уорда для функций Грина

Функции Грина квантовой теории гравитационного поля определяются производящим функционалом <sup>I-4</sup>:

$$Z[j_{\mu\nu}] = \frac{1}{Z_0} \int Y_x[\hat{g}] \exp \left\{ \frac{1}{\alpha} \oint [ \hat{g} ] - \right\} \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2\alpha} \left\{ \int \mathcal{K}''(\hat{g}) \mathcal{K}''(\hat{g}) d^4x + \int \hat{g}^{\mu\nu} j_{\mu\nu} d^4x \right\} d\mu(\hat{g}),$$

где  $Z_0$  - нормировочный интеграл,  $\alpha$  - постоянная, фиксирующая калибровку, и

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad \mathcal{K}''(\hat{g}) = \partial_\nu \hat{g}^{\mu\nu} \quad (2)$$

$$Y_x[\hat{g}] = \det Q^{\mu\nu}(\hat{g}) (Q^{\nu\sigma}(\delta))^{-1},$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}''_x(\hat{g}) &= (\partial_\sigma \hat{g}^{\nu\sigma}) \delta''_x \partial_\nu + \\ &+ (\partial_\sigma \hat{g}^{\nu\sigma}) \partial_\nu + \hat{g}^{\nu\sigma} \delta''_x \partial_{\nu\sigma}^2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\oint [\hat{g}] = \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (4)$$

Правильное выражение для локальной меры (приводящее к унитарной калибровочно-инвариантной матрице, не содержащей расходимостей типа  $\delta^{(4)}(0)$ ), получено в работе <sup>5</sup>. При любом доренц-инвариантном способе регуляризации эта мера имеет вид:

$$d\mu(\hat{g}) = \prod_X g^{3/2} g^{dd} \prod_{M \in V} d\hat{g}^{Mv}. \quad (5)$$

Обобщенные тождества Уорда выступают как следствия инвариантности действия (4) и доказанной в <sup>6</sup> инвариантности меры (5) относительно калибровочных преобразований:

$$\delta^{\zeta} \hat{g}^{Mv}(x) = \nabla_{(\hat{g})}^{\zeta} \hat{f}^{\sigma}(x). \quad (6)$$

Вывести их можно, сделав замену (6) переменных интегрирования в (1). Результатом является следующее уравнение для производящего функционала:

$$\left[ -\frac{1}{2} \hat{Q}_{\sigma}^{\mu} \chi^{\mu}(x) + \frac{1}{i} \hat{\nabla}_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}(x)} \ln \mathcal{Z}_{\chi}[\hat{g}] + \right. \\ \left. + \hat{\nabla}_{\sigma}^{\mu\nu} j_{\mu\nu}(x) \right] \Big|_{\hat{g} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}} \mathcal{Z}[j] = 0, \quad (7)$$

где оператор  $\hat{\nabla}_{\sigma}^{\mu\nu}$  трансформирован оператору (6). Подействуем слева оператором  $\hat{Q}_{\zeta}^{-1\sigma} \Big|_{\hat{g} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}}$  и в члене с источником протянем источник налево. Непосредственным вычислением проверяется <sup>6</sup>, что (7) принимает после этого вид

$$\left[ -\frac{1}{2} \chi^{\zeta}(x) + : \hat{Q}_{\zeta}^{-1\sigma} \hat{\nabla}_{\sigma}^{\mu\nu} j_{\mu\nu}(x) : \right] \Big|_{\hat{g} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j}} \mathcal{Z}[j] = 0, \quad (8)$$

где  $: : :$  означает, что источник в этом выражении стоит слева. Уравнение (8) эквивалентно следующему соотношению для функций Грина при выключном источнике

$$\frac{i}{2} \langle 0 | T \chi^{\zeta}(x) \phi[\hat{g}] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | T \hat{Q}_{\zeta}^{-1\sigma} \hat{\nabla}_{\sigma}^{\mu\nu}(x) \frac{\delta}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}(x)} \phi[\hat{g}] | 0 \rangle \quad (9)$$

где  $\phi[\hat{g}]$  - произвольный функционал. Подставляя

$$\phi_{nm}[\hat{g}] = \mathcal{K}^{d_1}(x_1) \dots \mathcal{K}^{d_n}(x_n) \cdot \hat{g}^{\beta_1 \chi_1}(y_1) \dots \hat{g}^{\beta_m \chi_m}(y_m), \quad (10)$$

получим бесконечную систему обобщенных соотношений Уорда в квантовой теории гравитационного поля.<sup>x)</sup>

Для дальнейшего анализа понадобятся две первых серии этих соотношений, соответствующие значениям  $m=0$  и  $m=1$  в (10). Первая серия обобщенных тождеств Уорда имеет вид:

$$\langle 0 | \Gamma \mathcal{K}^{d_1}(x_1) | 0 \rangle = 0 \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Gamma \mathcal{K}^{d_1}(x_1) \mathcal{K}^{d_2}(x_2) | 0 \rangle = \\ = \frac{d}{i} \delta^{d_1 d_2} \delta(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (II)$$

$$\langle 0 | \Gamma \mathcal{K}^{d_1}(x_1) \dots \mathcal{K}^{d_n}(x_n) | 0 \rangle = \quad (II)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ нечетное.} \\ \left(\frac{d}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \sum \delta^{d_{k_1} d_{i_1}} \dots \delta^{d_{k_{\frac{n}{2}}} d_{i_{\frac{n}{2}}}} \cdot \\ \cdot \delta(x_{k_1} - x_{i_1}) \dots \delta(x_{k_{\frac{n}{2}}} - x_{i_{\frac{n}{2}}}). & n \text{ четное} \end{cases} \quad (II)$$

Здесь  $\sum$  означает сумму по всем разбиениям  $(1, \dots, n)$  на  $\frac{n}{2}$  пар  $(k_1, i_1) \dots (k_{\frac{n}{2}}, i_{\frac{n}{2}})$ .

Вторая серия дается производящим уравнением (9) в виде рекуррентного соотношения:

x) Аналогичная система соотношений в квантовой электродинамике была впервые получена в работе 7. В работе 8 такие соотношения были найдены в теории поля Ниге-Миллса.

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \langle 0 | T \mathcal{X}^{d_1}(x_1) \mathcal{X}^{d_2}(x_2) \dots \mathcal{X}^{d_n}(x_n) \hat{g}^{\beta\gamma}(y) | 0 \rangle = \\
& = \sum_{j=2}^n \langle 0 | T \mathcal{X}^{d_2}(x_2) \dots \mathcal{X}^{d_{j-1}}(x_{j-1}) \mathcal{X}^{d_{j+1}}(x_{j+1}) \dots \\
& \quad \dots \mathcal{X}^{d_n}(x_n) \hat{g}^{\beta\gamma}(y) | 0 \rangle \cdot \\
& \quad \cdot \delta^{d_1 d_j} \delta(x_1 - x_j) + \\
& + \langle 0 | T \mathcal{X}^{d_2}(x_2) \dots \mathcal{X}^{d_n}(x_n) \cdot \\
& \quad \cdot \nabla_y^{\beta\gamma} | 0 \rangle Q^{-1\beta\gamma}_{d_1}(x_1, y) | 0 \rangle. \tag{I4}
\end{aligned}$$

Нас интересует решение уравнений для функций Грина с отличным от нуля вакуумным средним:  $\langle 0 | \hat{g}^{\alpha\beta}(x) | 0 \rangle = A \delta^{\alpha\beta}$ .

Определим оператор поля:

$$A = \text{const}$$

$(\mathcal{Q}^{d\beta}(x) = \hat{g}^{d\beta}(x) - \langle 0 | \hat{g}^{d\beta}(x) | 0 \rangle)$   
и обычным образом /9/ определим его пропагатор  $G^{d\beta; \gamma\sigma}(x, y)$   
и вершинные функции

$$\Gamma_{d_1 \beta_1, \dots, d_{n+2} \beta_{n+2}}^{(n+2)}(x_1, \dots, x_{n+2}).$$

Введем также пропагатор "фактивных частиц" /1/:

$$M^{d\beta}(x, y) = \langle 0 | T Q^{-1\beta\gamma}(x, y) | 0 \rangle$$

и вершинные функции взаимодействия с фактивными частицами:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{d\beta | \mu_1 v_1, \dots, \mu_n v_n}^{(n+2)}(x, y | z_1, \dots, z_n) = \\
& = - \frac{\delta^n M^{-1}_{d\beta}(x, y | j)}{\delta i \langle \hat{g}^{\mu_1 v_1}(z_1) \rangle \dots \delta i \langle \hat{g}^{\mu_n v_n}(z_n) \rangle} \Big|_{j=0}
\end{aligned}$$

Соотношения Уорда могут быть легко переформулированы в терминах введенных функций.

## II. Тождества Уорда для пороговых постоянных перенормировок

Условие перенормировки сформулируем как требование пропорциональности пороговой асимптотики функций Грина в вырожденной калибровке ( $\alpha = 0$ ), соответствующим свободным функциям  $\overset{\circ}{G}, \overset{\circ}{\Gamma}, \overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{\chi}$ , которые могут быть получены как вариации классического действия, взятые при  $\hat{g}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ .

$$G^{(\mu\nu; \alpha\beta)}(p, \alpha) \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0, p^2 \rightarrow 0]{} \tilde{Z}_2 \not\propto A \overset{\circ}{G}^{(\mu\nu; \alpha\beta)}(p, \alpha); M^{\alpha\beta}(p) \xrightarrow[p^2 \rightarrow 0]{} \tilde{Z}_2 A \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta}(p);$$
$$\Gamma^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+2}) \xrightarrow[\sum p_i = 0, p_i \rightarrow 0]{} \tilde{Z}_1 \frac{1}{\alpha} A^{-\frac{1}{2}} \overset{\circ}{\Gamma}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+2}); \chi^{(3)} \rightarrow \tilde{Z}_1^{-1} \overset{\circ}{\chi}^{(3)}; \chi^{(n+2)} \rightarrow 0, n > 1.$$

Мы покажем, что этот вид асимптотики не противоречит тождествам Уорда при условии, что постоянные перенормировки связаны рядом соотношений. При этом из бесконечного числа констант

$$\tilde{Z}_2, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_1^{(1)}, \tilde{Z}_1^{(2)}, \dots, \tilde{Z}_1^{(n)}, \dots$$

в теории остаются лишь две независимых (и, вообще говоря, бесконечных) величины:  $\tilde{Z}_2, Z_1 \equiv Z_1^{(1)}$ .

Сформулированному условию перенормировки можно удовлетворить по теории возмущений подходящим выбором регуляризации. В частности, регуляризация, предложенная в работе <sup>10</sup>, приводит к указанному виду асимптотики. При этом важно отметить, что вычисления по теории возмущений в регуляризации работы <sup>10</sup> показывают отсутствие инфракрасных расходимостей на массовой обедочке и наличие у функции Грина нормального полиса.

Максимально возможная Лоренц-ковариантная структура пропагатора гравитонов содержит пять скалярных функций, однако с учетом низшего тождества Уорда (12) лишь три из них независимы, при этом две не имеют полюса <sup>6</sup>. Полюсной член точного пропагатора гравитонов имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{i} G^{\mu\nu;\rho\gamma}(p, \alpha) &= \underset{p^2 \rightarrow 0}{=} \\
 &= [2 \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\gamma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\gamma} - \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\rho} - \\
 &- \frac{2}{p^2} (\delta_{\rho\gamma} p_\mu p_\nu + \delta_{\mu\nu} p_\rho p_\gamma) + \\
 &+ \frac{1}{p^2} (\delta_{\nu\beta} p_\gamma p_\mu + \delta_{\nu\gamma} p_\beta p_\mu + \delta_{\mu\beta} p_\gamma p_\nu + \\
 &+ \delta_{\mu\gamma} p_\beta p_\nu)] G^{\text{TT}}(p^2, \alpha) + \\
 &+ [\frac{1}{2} (\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\gamma} + \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\beta}) + \frac{1}{2p^2} (\delta_{\nu\beta} p_\gamma p_\mu + \\
 &+ \delta_{\nu\gamma} p_\beta p_\mu + \delta_{\mu\beta} p_\gamma p_\nu + \delta_{\mu\gamma} p_\beta p_\nu) - \\
 &- \frac{1}{p^2} (\delta_{\beta\gamma} p_\mu p_\nu + \delta_{\mu\nu} p_\beta p_\gamma)] \frac{\alpha}{p^2}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В вырожденной калибровке ( $\alpha = 0$ ) пропагатор (15) по-  
перенесен по любому из индексов. Свободный пропагатор имеет вид  
(15) с функцией  $G^{TT}(p^2, \alpha)$ , равной  $\delta(\Lambda + \frac{\alpha}{2}) \frac{1}{p^2}$ .

Далее

$$M^{\alpha\beta}(p) = (\delta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2}) M^{\perp}(p^2) + \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} M^{\parallel}(p^2) \quad (16)$$

$$M^{\perp}(p^2) \underset{p^2 \rightarrow 0}{=} M^{\parallel}(p^2).$$

Соответствующий свободный пропагатор равен

$$\delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{p^2}.$$

Структура же вершинных функций очень сложна, однако тождества Уорда можно проанализировать и не имея явного вида этих функций.

Рассмотрим сначала первые два соотношения второй серии тождеств Уорда (14). Эти соотношения для функций Грина в вырожденной калибровке могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{i}{p^2} (\delta^{\alpha\beta} p^\gamma + \delta^{\alpha\gamma} p^\beta - \delta^{\beta\gamma} p^\alpha) &= i (\delta^{\alpha\beta} p^\gamma + \\ &+ \delta^{\alpha\gamma} p^\beta - \delta^{\beta\gamma} p^\alpha) \frac{1}{p^2} \tilde{Z}_2 + \\ &+ \sum_{p^2 \rightarrow 0}^{\alpha\beta\gamma} (-p, p); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{q^2 K^2} A^{-1} \tilde{Z}_1^{-1} \tilde{Z}_2 (\delta^{\sigma_1 \alpha_1} K^{\sigma_2} + \delta^{\sigma_2 \alpha_1} K^{\sigma_1} - \delta^{\sigma_1 \sigma_2} K^{\alpha_1}) \cdot \\ \cdot (\delta^{\xi_1 \alpha_2} q^{\xi_2} + \delta^{\xi_2 \alpha_2} q^{\xi_1} - \delta^{\xi_1 \xi_2} q^{\alpha_2}) G^{\alpha\beta\gamma; \eta\theta}(p, 0) \cdot \\ \cdot \Gamma_{\sigma_1 \sigma_2; \xi_1 \xi_2; \eta\theta}^{(3)}(K, q, p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{q^2 K^2 p^2} A^{-1} \tilde{Z}_2^2 \tilde{Z}_1^{-1} (\delta^{\alpha\theta} p^\mu + \delta^{\theta\beta} p^\alpha - \\
&\quad - \delta^{\mu\alpha} p^\theta) (\delta^{f_1 d_2} q^{f_2} + \delta^{f_2 d_2} q^{f_1} - \delta^{f_1 f_2} q^{d_2}) \cdot \\
&\cdot \delta_{\alpha\theta}^{(3)}(s_1 s_2) (K | p | q) + \quad (18) \\
&+ \sum_{\substack{d_1 | \beta \gamma | d_2 \\ K^2, p^2, q^2 \rightarrow 0}} (K | p | q) ; \quad K + p + q = 0 \\
&\text{где (в } X \text{ - пространстве):} \\
&\sum_{\substack{d_1 | \beta \gamma | d_2 \dots d_n \\ (x_1 | y | x_2, \dots x_n)} = \\
&= \langle 0 | T \nabla^{\beta \gamma \dots} (q | y) \bar{Q}^{15}_{d_1} (x_1, y) \cdot \quad (19) \\
&\cdot X^{d_2} (x_2) \dots X^{d_n} (x_n) | 0 \rangle .
\end{aligned}$$

— функции Грина в совпадающих точках. Детальный анализ функций (19) при  $n=0$  и  $n=1$  позволяет найти их пороговую асимптотику с точностью до двух неизвестных констант<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d_1 | \beta \gamma \\ (-p, p) \\ p \rightarrow 0}} = [C_1 p^\alpha \delta^{\beta\gamma} + \quad (20) \\
&+ C_2 (p^\alpha \delta^{\beta\gamma} + p^\gamma \delta^{\alpha\beta})] \tilde{Z}_2 \frac{1}{A} \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\alpha_1 \beta \gamma \alpha_2 \\ (K, p, q)}} &= -\frac{d}{q^2 K^2 p^2} A^{-2} \tilde{Z}_2^2 \tilde{Z}_1^{-1} \left[ \tilde{C}_2 (\delta^{\alpha_2} p^\beta + \right. \\
 &\left. + \delta^{\beta \gamma} p^\alpha) + \tilde{C}_1 \delta^{\beta \gamma} p^\alpha \right] (\delta^{\alpha_1 \alpha_2} q^{\beta_2} + \\
 &+ \delta^{\beta_2 \alpha_2} q^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1 \beta_2} q^{\alpha_2}) \mathcal{Y}_{\alpha_1 \theta | \beta_1 \beta_2}^{(3)}(K, p | q).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Постоянныe  $C_1$  и  $C_2$  определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
 C_1 \delta^{\alpha \beta} \delta^{\gamma \nu} + C_2 (\delta^{\alpha \mu} \delta^{\beta \nu} + \delta^{\alpha \nu} \delta^{\beta \mu}) &= \\
 = \int M^{\alpha \alpha'}(K) G^{\mu \beta; \mu' \beta'}(-K) \cdot & \\
 \cdot \mathcal{Y}_{\alpha' \nu | \mu' \beta'}^{(3)}(K, 0 | -K) d^4 K. &
 \end{aligned} \tag{22}$$

При этом оказывается, что постоянныe  $\tilde{C}_1$ ,  $\tilde{C}_2$  определяются теми же самыми интегралами

$$\tilde{C}_1 = i C_1, \quad \tilde{C}_2 = i C_2. \tag{23}$$

Соотношение, аналогичное (17), в теории поля Инга-Миллса<sup>8</sup> тривиально дублирует нижее соотношение Уорда первой серии, аналогичное (12). Здесь же оно позволяет определить неизвестные постоянныe  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = -i A (\tilde{Z}_2^{-1} - 1) \tag{24}$$

$$C_2 = i A (\tilde{Z}_2^{-1} - 1),$$

и с помощью (23) и (21) поставить в соотношение (18) полностью известную асимптотику функции Грина в совпадающих точках. При этом убеждаемся, что добавление этой функции эквивалентно вычеркиванию одного множителя  $\tilde{Z}_2$  в правой части (18).

Громоздкость теории не позволяет выписать явного вида вершинных функций, но с помощью тождеств Нётер

$$\nabla_{\alpha}^{\mu\nu}(x) \frac{\delta S[\hat{g}]}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}(x)} = 0 \quad (25)$$

можно показать<sup>6</sup>, что простые вершины и пропагаторы удовлетворяют соотношениям того же вида, что соотношение Уорда для точных функций Грина. Это дает возможность сократить тензорные множители в (18) и получить соотношение между постоянными перенормировки при  $\lambda = 0$  :

$$Z_1 Z_2^{-1} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^{-1} \dots \quad (26)$$

Аналогичное соотношение имеет место и в теории поля Янга-Миллса 8.

Далее, первая серия тождеств Уорда (13) представляется в виде:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\text{div } G) \dots (\text{div } G)}_{h+2} \left[ \Gamma^{(h+2)} + \right. \\
 & + \sum S \Gamma^{(p_1+2)} G \Gamma^{(p_2+2)} + \dots \\
 & + \sum S \Gamma^{(p_1+2)} G \Gamma^{(p_2+2)} \dots G \Gamma^{(p_k+2)} + \dots \\
 & \left. + S \Gamma^{(3)} G \Gamma^{(3)} \dots G \Gamma^{(3)} \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где  $\sum$  означает суммирование по  $p_1, \dots, p_k$  при условии  $\sum p_i = n$ , а  $S$  - симметризацию по точкам. Как и в предыдущем случае, доказывается, что свободные функции удовлетворяют аналогичному соотношению. Уравнения (27) дают оставшиеся тождества Уорда для перенормировочных постоянных в вырожденной калибровке:

$$\sum_1^{(h)} \mathcal{Z}_1^{-1} = \mathcal{Z}_1^{-h} \mathcal{Z}_2^{h-1}. \tag{28}$$

Сделаем теперь в эффективном действии (определяющем полный набор диаграмм теории в вырожденной калибровке) и в производящем функционале замену переменных ( $\bar{C}, C$  - "фиктивные" поля):

$$\mathcal{G}_R^{\mu\nu} = \tilde{Z}_2^{-1/2} \mathcal{G}^{\mu\nu}, \quad \bar{C}_R^{\lambda} = \tilde{Z}_2^{-1/2} \bar{C}^{\lambda}, \quad C_k^{\lambda} = \tilde{Z}_2^{-1/2} C_k^{\lambda} \quad (29)$$

Определим, кроме  $\tilde{Z}_2$ , перенормированные параметры теории:

$$A_R^{-1} = A^{-1} \left[ \tilde{Z}_1^{-1} \tilde{Z}_2^{3/2} \right], \quad (30)$$

$$\mathcal{H}_R = \mathcal{H} \left( \tilde{Z}_1^{-1} \tilde{Z}_2^{3/2} \right). \quad (31)$$

После этого можно доказать б, что соотношения Уорда (26) и (28) позволяют привести исходный лагранжиан тождественно к такому виду, в котором после включения бесконечных множителей в фигурирующие в теории константы все функции Грина имеют конечную пороговую асимптотику. При этом контурчины, перенормирующие пороговую асимптотику функций Грина, не нарушают калибровочной инвариантности теории.

Постоянная  $\tilde{Z}_2$  может быть исключена из выражения для  $\hat{A}$ -матрицы, после чего в теории останутся две бесконечные величины:  $\tilde{Z}_2$  — перенормировка волновой функции  $\mathcal{G}$  и  $\tilde{Z}_1^{-1} \tilde{Z}_2^{3/2}$  — перенормировка постоянной тяготения и среднего поля  $A$  — одновременно.

Перенормированный оператор гравитационного поля:

$$\hat{g}_R^{\mu\nu} = A_R \delta^{\mu\nu} + \mathcal{G}_R^{\mu\nu}.$$

При этом постоянная и переменная части гравитационного поля перенормируются, вообще говоря, разными константами:

$$\hat{g}_R = \bar{z}_2^{-1/2} [ (z_1 \bar{z}_2^{-1}) A \delta + \psi ].$$

Это приводит к тому, что перенормированный лагранжиан не собирается к виду скаляра кривизны в терминах поля  $\hat{g}_R$ , а собирается в терминах другого поля:

$$\tilde{g} = \bar{z}_2^{-1/2} (A \delta + \psi) = \bar{z}_2^{-1/2} \hat{g}.$$

(последнее не противоречит сделанному выше утверждению о калибровочной инвариантности 6).

Поля  $\hat{g}_R$  и  $\tilde{g}$  совпадают между собой лишь в случае, если

$$Z_1 = \bar{z}_2. \quad (32)$$

Как мы покажем в следующем разделе, соотношение (32) справедливо, но оно не является тождеством Уорда.

В невырожденной калибровке постоянные перенормировки становятся функциями  $\omega$ . Множители  $\bar{z}_1^{(n)}, \tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)$  вводятся теми же соотношениями, что и ранее. Перенормировка волновой функции  $\psi$  определяется из соображений сохранения вида тождества Уорда. Можно показать, что это требование приводит к определению:

$$G^{\pi\pi}(p^2, \alpha) = (A \bar{Z}_2(\alpha) + \frac{\alpha}{2}) \frac{\alpha}{p^2}$$

$$p^2 \rightarrow 0.$$

Тогда соотношения (26), (28) справедливы также и при  $\alpha \neq 0$ . При этом перенормировка подлежит лишь поперечная часть волновой функции:

$$\psi_R^\pi = \bar{Z}_2^{-1/2} \psi^\pi.$$

Сохранение вида тождеств Уорда гарантирует тогда для функций Грина поля  $\psi_R^\pi$  оправедливость рассуждений, проведенных выше в случае вырожденной калибровки. Что же касается продольных частей функций Грина (зависящих от  $\alpha$ ), то в следующем разделе мы покажем, что не только перенормировка заряда

$$\bar{Z}_1^{-1}(\alpha) \bar{Z}_2^{3/2}(\alpha) = \bar{Z}_1^{-1}(0) \bar{Z}_2^{3/2}(0),$$

но и отдельно постоянные  $\bar{Z}_1$  и  $\bar{Z}_2$  калибровочно-инвариантны:

$$\bar{Z}_1(\alpha) = \bar{Z}_1(0), \quad \bar{Z}_2(\alpha) = \bar{Z}_2(0).$$

Это значит, что в разложении функций Грина по степеням  $\alpha$  (на пороге) бесконечным множителем обрастает лишь член нулевой степени, продольные же части функций Грина на пороге конечны.

## Ш. Масштабная инвариантность теории и соотношение $Z_1 = Z_2$

Помимо калибровочной инвариантности квантовая теория гравитационного поля обладает другим свойством инвариантности, которому в классической теории соответствуют известные свойства конформного преобразования эйнштейновского лагранжиана, в частности тот факт, что постоянное поле  $A \delta^{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Эйнштейна при произвольном  $A$ . Последнее определяет специфику нарушения симметрии в квантовой теории. Наконец, будет использовано еще одно масштабное свойство, которое определяется наличием фундаментальной постоянной размерности длины. Формально масштабная инвариантность выступает как свойство однородности функций Грина. Подобно та же доказательствам Нёттер, аналитическим выражением масштабной инвариантности служит теорема Эйлера об однородных функциях.

Производящий функционал зависит от источников и трех параметров теории:

$$Z = Z[Y | \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{A}, \frac{1}{2}].$$

Проводя в интеграле (I) замену переменных ( $Y_x = \int \prod d\bar{c} d\bar{c} e^{i \int \bar{c} Q c dx}$ ):

$$y' = \frac{y}{A}, \bar{c}' = \sqrt{A} \bar{c}, c' = \sqrt{A} c,$$

мы докажем первую теорему однородности <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} Z[Y | \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{A}, \frac{1}{2}] &= \\ &= Z[Ay | \frac{A}{\lambda}, 1, \frac{A}{2}]. \end{aligned} \tag{88}$$

Применяя теорему Эйлера, получим новую систему точных соотношений для функций Грина ( $a = (u, v; x)$ ):

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} + A \frac{\partial}{\partial A} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) G^{ab} = 2 G^{ab} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} + A \frac{\partial}{\partial A} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Gamma_{a_1 \dots a_{n+1}}^{(n+1)} = \\ = -(n+1) \Gamma_{a_1 \dots a_{n+2}}^{(n+1)} \quad (35) \end{aligned}$$

$n > 1.$

Рассмотрим теперь производящую  $G$ -функцию как функционал среднего поля /9, 6/:

$$G^{ab}(\langle g \rangle | A, \lambda, \lambda).$$

Уравнение движения для этой функции имеет вид:

$$\begin{aligned} -\delta^{ac} = G^{ce}(\langle g \rangle) \frac{\delta}{\delta \langle g \rangle^e} \cdot \\ \cdot \left\{ T^a \left[ \langle g \rangle^c + G^{ec}(\langle g \rangle) \frac{\delta}{\delta \langle g \rangle^c} \right] \right\} 1. \quad (36) \end{aligned}$$

где

$$T^\alpha[\hat{g}^\beta] = \frac{\delta S[\hat{g}]}{\delta \hat{g}^\alpha},$$

$S[\hat{g}]$  - эффективное действие.

Параметр  $A$  явно в это уравнение не входит, он появляется лишь в условиях перехода от  $G(\langle g \rangle)$  к функциям Грина:

$$G^{uv}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = G^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \Big|_{y=0} = G^{\alpha\beta}(\langle g \rangle) \Big|_{\langle g \rangle = A\delta} \quad (37)$$

и т.д.

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial A} G^{\alpha\beta}(\langle g \rangle | A, \alpha, \beta) = 0. \quad (38)$$

Иными словами функции Грина зависят параметрически от  $A$  только вследствие граничных условий (37).

Изучая трансформационные свойства квантованных уравнений Эйнштейна (36) при конформном преобразовании  $g \rightarrow A g$ , мы докажем вторую теорему однородности 6:

$$G^{\alpha\beta}(A\langle g \rangle | A\alpha, A\beta) = \\ = A^2 G^{\alpha\beta}(\langle g \rangle | \alpha, \beta). \quad (39)$$

Применяя теорему Эйлера, получим вторую систему масштабных соотношений для функций Грина:

$$- \Gamma_{\alpha\beta; \gamma\sigma; \mu\nu}^{(3)}(p, -p, 0) A \delta^{\mu\nu} + \\ + (\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta}) G_{\alpha\beta; \gamma\sigma}^{-1}(p) = \quad (40) \\ = - 2 G_{\alpha\beta; \gamma\sigma}^{-1}(p); \\ i \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots \alpha_{n+2}\beta_{n+2}; \mu\nu}^{(n+2)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i, 0) A \delta^{\mu\nu} + \\ + (\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta}) \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots \alpha_{n+2}\beta_{n+2}}^{(n+1)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i) = \\ = -(n+1) \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots \alpha_{n+2}\beta_{n+2}}^{(n+1)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i). \quad (4I)$$

Соотношения (34)–(35) и (40)–(41) удобно скомбинировать, что дает:

$$\frac{\partial}{\partial A} G_{\alpha\beta;\gamma\sigma}^{-1}(p) = -i \Gamma_{\alpha\beta;\gamma\sigma;\mu\nu}^{(3)}(p, -p, 0) \delta^{\mu\nu}; \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \Gamma_{\alpha_1\beta_1, \dots \alpha_{n+1}\beta_{n+1}}^{(n+1)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i) &= \\ = i \Gamma_{\alpha_1\beta_1, \dots \alpha_{n+1}\beta_{n+1}, \mu\nu}^{(n+2)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i, 0) \delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (43)$$

Проанализируем следствия соотношений (42)–(43) для пороговых постоянных перенормировки в вырожденной калибровке.

Можно показать,<sup>6</sup> что свободные вершинные функции и пропагатор гравитонов удовлетворяют тождествам:

$$G_{\alpha\beta;\gamma\sigma}^0(p) = \Gamma_{\alpha\beta;\gamma\sigma;\mu\nu}^{(3)}(p, -p, 0) \delta^{\mu\nu}; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} i \Gamma_{\alpha_1\beta_1, \dots \alpha_{n+1}\beta_{n+1}, \mu\nu}^{(n+2)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i, 0) \delta^{\mu\nu} &= \\ = -n \Gamma_{\alpha_1\beta_1, \dots \alpha_{n+1}\beta_{n+1}}^{(n+1)}(p_1, \dots p_n, -\sum_{i=1}^n p_i). \end{aligned} \quad (45)$$

С помощью этих соотношений получим из (42)–(48) уравнения для  $Z$  – множителей, как функций параметров теории:

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{A} Z_2^{-1} \right) = - \frac{1}{A^2} Z_1^{-1} \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{A^{n+1}} Z_1^{(n)-1} \right) = - \frac{n+1}{A^{n+2}} Z_1^{(n+1)-1} \quad (47)$$

$n \geq 1.$

Подставим полученные в предыдущем разделе тождества Йорда:

$$Z_1^{(n)-1} = Z_1^{-n} Z_2^{n-1}.$$

Тогда как условие совместности дифференциальных уравнений (46)–(47) найдем новое фундаментальное соотношение ( $\lambda = 0$ ):

$$Z_1 = Z_2. \quad (48)$$

Решение уравнений (46)–(47):

$$\frac{\partial Z_1}{\partial A} = \frac{\partial Z_2}{\partial A} = 0. \quad (49)$$

Вернемся к точным тождествам для функций Грина. Наличие в теории параметра  $\lambda$ , имеющего размерность длины ( $\lambda = 1$ ) обусловливает следующие свойства функций Грина (которые могут быть получены из уравнений (46)):

$$G(p|x) = x^2 G(\sqrt{x}p|1); \quad (50)$$

$$\Gamma_{(p_1, \dots, p_{n+2})|x}^{(n+2)} = \quad (51)$$

$$= x^{-2} \Gamma_{(\sqrt{x}p_1, \dots, \sqrt{x}p_{n+2})|1};$$

$$\sum p_i = 0.$$

Уравнения (50)-(51) снова имеют вид теорем однородности.

Получаем:

$$p^\sigma \frac{\partial}{\partial p^\sigma} G^{uv;dp}(p) - 2x \frac{\partial}{\partial x} G^{uv;dp}(p) = \quad (52)$$

$$= -4 G^{uv;dp}(p);$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} p_i^\sigma \frac{\partial}{\partial p_i^\sigma} \Gamma_{d_1 \beta_1, \dots, d_{n+2} \beta_{n+2}}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+2}) -$$

$$- 2x \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{d_1 \beta_1, \dots, d_{n+2} \beta_{n+2}}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+2}) =$$

$$= 4 \Gamma_{d_1 \beta_1, \dots, d_{n+2} \beta_{n+2}}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+2});$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} p_i = 0. \quad (53)$$

Исключая с помощью (52), (53) производные по  $x$  из уравнений (40) - (41), окончательно получим в вырожденной калибровке бесконечную систему соотношений для функций Грина с выходом за массовую оболочку:

$$p^\sigma \frac{\partial}{\partial p^\sigma} G_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{-1}(p) = \\ = 2i \Gamma_{\alpha\beta; \gamma\delta; \mu\nu}^{(3)}(p, -p, 0) A \delta^{\mu\nu}; \quad (54)$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} p_i^\sigma \frac{\partial}{\partial p_i^\sigma} \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+1}, -\sum_{j=1}^{n+1} p_j) - \\ - 2n \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_{n+1}, -\sum_{j=1}^{n+1} p_j) = \\ = 2i \Gamma_{\alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}, \mu\nu}^{(n+3)}(p_1, \dots, p_{n+1}, -\sum_{j=1}^{n+1} p_j, 0) A \delta^{\mu\nu}; \quad (55)$$

Наряду с тождествами Уорда и независимо от них эти новые соотношения являются точными следствиями полной системы динамических уравнений теории <sup>6</sup>. В отличие от тождеств Уорда "масштабные" тождества (54)–(55) не содержат функций Грина фиктивных частиц.

Введение "масштабно-инвариантной" регуляризации не составляет проблем <sup>6</sup>. В частности, регуляризация, предложенная в работе <sup>10</sup>, одновременно масштабно-инвариантна и калибровочно-инвариантна и приводит к тому, что  $Z_1 = Z_2 = I$ .

В случае невырожденной калибровки тождества (40)-(41) приводят к следующим уравнениям, определяющим зависимость  $\bar{Z}$  - множителей от  $\lambda$  б:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{Z}_2 = \bar{Z}_2 (1 - \bar{Z}_1^{-1} \bar{Z}_2) \quad (56)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{Z}_1^{-1} = 2 \bar{Z}_1^{-1} (\bar{Z}_1^{-1} \bar{Z}_2 - 1). \quad (57)$$

При начальном условии (48):

$$\bar{Z}_1(0) = \bar{Z}_2(0)$$

решение этих уравнений:

$$\bar{Z}_1(\lambda) = \bar{Z}_1(0) = \bar{Z}_2(\lambda) = \bar{Z}_2(0).$$

Благодаря этому соотношению в теории гравитации остается лишь одна существенно бесконечная постоянная - перенормировка постоянной тяготения  $\lambda$ . В результате все функции Грина перенормированной теории имеют конечную асимптотику на пороге. Однако это еще не означает, что бесконечности устраняются из внепороговых амплитуд.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B.S.De Witt, Phys. Rev., 162, 1195; 1239, (1967).
2. L.D.Faddeev, V.N.Popov, Phys. Lett., 25B, 30,(1967).
3. S.Mandelstam, Phys. Rev., 175, 1580; 1604, (1968).
4. E.S.Fradkin, I.V.Tyutin, Phys. Rev. D, 2, 2842,(1970).
5. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, Preprint N 137, P.N.Lebedev Phys. Inst., Moscow, (1971).
6. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, Phys. Rev. D. (in print).
7. Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 258, (1955).
8. A.A.Slavnov, Preprint ITP-71-83E, Kiev, (1971).
9. Е.С.Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7, (1965).
10. G.'t Hooft, M.Veltman, Nucl. Phys., B44, 189,(1972).

## СПИСОК УЧАСТНИКОВ

Алебастров В.А.	ОИЯИ
Аннен С.А.	СССР
Андреин В.И.	СССР
Ангелеску Н.	Румыния
Арбузов Б.А.	СССР
Атакинов Н.И.	СССР
Барбашов Б.И.	ОИЯИ
Березин Ф.А.	СССР
Бессонс Д.	Франция
Биленский С.М.	ОИЯИ
Блохинцев Д.И.	ОИЯИ
Блажек М.	Чехословакия
Валуев Б.Н.	ОИЯИ
Васильев А.Н.	СССР
Ватагин Г.В.	Италия
Весман Э.А.	СССР
Вицорек Э.	ОИЯИ
Волков И.К.	ОИЯИ
Волков Д.В.	СССР
Воронов Б.Л.	СССР
Вольф Ю.	ГДР

Гавличек	ЧССР
Гарчинский В.	ОИЯИ
Гавгнус Д.С.	СССР
Гизбург И.Ф.	СССР
Гориков В.Г.	СССР
Гогохия В.Ш.	СССР
Григорьев Б.И.	СССР
Гольфанд Д.А.	СССР
Дородных В.С.	СССР
Дюрр Х.	ФРГ
Ефимов Г.В.	ОИЯИ
Ефремов А.В.	ОИЯИ
Завьялов О.И.	СССР
Захаров В.А.	СССР
Зайков Р.	Болгария
Иванов Е.А.	СССР
Кадышевский В.Г.	ОИЯИ
Калусцик Я.	Польша
Киржниц Д.А.	СССР
Колеров Г.И.	ОИЯИ
Коноплева Н.П.	СССР
Курамов С.М.	СССР
Лазур	СССР
Ласнер Г.	ГДР
Леманн Х.	ФРГ
Ломсадзе Д.М.	СССР
Лукерски Я.	Польша

Матеев М.	ОИЯИ
Матвеев В.А.	ОИЯИ
Маликин В.Г.	ОИЯИ
Марков М.А.	СССР
Мак Г.	Швейцария
Медведев Б.В.	СССР
Мествиринвали М.А.	СССР
Мейман Н.Н.	СССР
Мир-Касимов Р.	ОИЯИ
Михул Э.	ОИЯИ
Мику М.	Румыния
Могилевский О.А.	СССР
Мельников В.Н.	СССР
Надь Т.	Венгрия
Надь К.	Венгрия
Намсрай Х.	Монголия
Ниниджима К.	Япония
Огневецкий В.И.	ОИЯИ
Павлов В.П.	СССР
Первушин В.Н.	ОИЯИ
Петрунькин В.А.	СССР
Петрина Д.Я.	СССР
Поливанов М.К.	СССР
Погребков А.К.	СССР
Прохоров Л.В.	СССР
Робашик Д.	ОИЯИ
Рутенберг И.Л.	СССР

Сельцер И.З.	СССР
Скрипник В.И.	СССР
Славнов А.А.	СССР
Славнов Д.А.	СССР
Смородинский Я.А.	СССР
Соловьев Л.Д.	СССР
Столинов Д.	ОИИ
Суаров У.С.	СССР
Суханов А.Д.	СССР

Тагиров З.А.	ОИЯИ
Тавхелидзе А.Н.	СССР
Тодоров И.	Болгария
Трубников С.В.	СССР
Тютин И.В.	СССР

Ульман А.	ГДР
Фаустов Р.Н.	ОИЯИ
Файнберг В.Я.	СССР
Фадеев Л.Д.	СССР
Филиппов А.Т.	ОИЯИ
Фомин П.И.	СССР
Фрадкин Е.С.	СССР
Франке В.А.	СССР
Халфин Л.А.	СССР
Хепп К.	Швейцария
Хонеркамп Дж.	ФРГ
Хрипкович И.Б.	СССР
Хрусталев О.А.	СССР

Черников Н.А.

ОИЯИ

Шавохина Н.С.

СССР

Шабалин Е.П.

СССР

Широков М.И.

ОИЯИ

Широков Ю.М.

СССР

Шварц А.С.

СССР

Ядчик А.

Польша

## СПИСОК ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

1. В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов, Ш.З.Сельцер.  
О некоторых физических следствиях в нелокальной квантовой теории поля.  
V.A.Alebastrov, G.V.Efimov, Sh.Z.Sel'tser.  
On Some Physical Consequences in Nonlocal Quantum Field Theory.
2. В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов.  
О причинности в нелокальной теории поля с форм-факторами из класса целых функций.  
V.A.Alebastrov, G.V.Efimov.  
On Causality in Nonlocal Field Theory with Form Factors from the Class of Entire Functions.
3. В.И.Андрюшин, В.Н.Мельников, К.П.Станикович.  
К проблеме нахождения более точного верхнего предела элементарной длины.  
V.I.Andriushin, V.N.Mel'nikov, K.P.Stanikovich.  
On the Problem of Finding a More Accurate Upper Limit of the Elementary Length.
4. Н.Ангелеску, Т.Ненчю.  
О некоторых континуальных мерах, связанных с винеровской морой.  
N.Angelescu, T.Nenchiu.  
On Some Continual Measures Associated with the Wiener Measure.
5. Ж.Д.Бессис.  
Приближения вне рамок теории возмущений в теории поля с лагранжианом: вариационные принципы и операторное Паде-приближение.  
J.D.Bessis.  
Nonperturbational Approach to Lagrangian Field Theory: Variational Principles and Operator Pade Approximation.
6. Д.И.Блохинцев.  
Поля в стохастическом пространстве и нелокальная теория поля.  
D.I.Blokhintsev.  
Fields in a Stochastic Space and Nonlocal Field Theory.
7. А.В.Борисов, В.И.Огневецкий.  
Нелинейная реализация аффинной группы Клейна. Совместная  
нелинейная реализация аффинной и конформной симметрий как теория  
гравитационного поля.  
A.V.Borisov, V.I.Ogievetsky.  
Nonlinear Realization of the Klein Affine Group. Simultaneous  
Nonlinear Realization of the Affine and Conformal Symmetries  
as a Gravitational Field Theory.
8. Г.В.Ватагин.  
Модель нелокальной квантовой теории поля и ее экспериментальное  
подтверждение.  
G.V.Wataghin.  
A Model of Nonlocal Quantum Field Theory and its Experimental Confirmation.
9. Д.В.Волков.  
Гольдстоновские и гаугиевые поля для групп симметрий, содержащих  
в качестве подгруппы группу Пуанкаре.  
D.V.Volkov.  
Goldstone and Gauge Fields for Symmetry Groups Including  
the Poincare Group as a Subgroup.

10. Б.Л.Воронов.  
О точной одиночастичной функции Грина в нелокальной квантовой теории поля с целыми форм-факторами.  
B.L.Voronov.  
On Exact Single-Particle Green Function in Nonlocal Quantum Field Theory with Entire Form Factors.

11. И.Ф.Гинзбург.  
Физические следствия масштабной инвариантности. О вычислении аномальных размерностей.  
I.F.Ginzburg.  
Physical Consequences of Scale Invariance. On the Calculation of Anomalous Dimensionalities.

12. В.Ш.Гогохия.  
Приближенный метод решения уравнения Эдвардса с неперенормируемым взаимодействием.  
V.Sh.Gogokhija.  
An Approximate Method of Solving the Edwards Equation with Nonrenormalizable Interaction.

13. Ю.А.Гольфанд.  
Унитарность и причинность как следствие аналитических свойств амплитуд.  
Yu.A.Gol'fand.  
Unitarity and Causality as a Consequence of the Analytical Properties of Amplitudes.

14. В.И.Григорьев.  
Теория поля в пространстве ограниченно локализуемых точек.  
V.I.Grigoriev.  
Field Theory in a Space of Limitedly Localizable Points.

15. Х.Дюрр. Процедуры унитаризации в теориях с индифинитной метрикой и макропричинность.  
H.P.Dürr.  
Unitarization Procedures in Theories with Indefinite Metric and Macrocausality.

16. Х.Дюрр.  
Градиентные симметрии в нелинейной спинорной теории.  
H.P.Dürr.  
Gauge Symmetries in Nonlinear Spinor Theory.

17. А.В.Ефремов.  
Что говорят неупругие процессы о физике малых расстояний?  
A.V.Efremov.  
What Do Inelastic Processes Tell About Small Scale Physics?

18. О.И.Завьялов.

*R* -операция как следствие индефинитной метрики в расширенном пространстве состояний (нижние порядки).

**O.I. Zavialov.**

**R-Operation as a Consequence of the Indefinite Metric in an Expanded Space of States (lowest orders).**

19. Е.А.Иванов, В.И.Огневецкий.

Модели алгебры полей с максимальной гладкостью зависимостей вершин от импульсов.

**E.A. Ivanov, V.I. Ogievetsky.**

**Models of Field Algebra with Maximum Smooth Momentum Dependence of Vertices.**

20. Е.Капусцик.

Теория поля в конечномерных векторных пространствах.

**E.Kapuscik.**

**The Field Theory in Finite Dimensional Vector Spaces.**

21. Д.Л.Киржнин, В.А.Чечин.

Космические лучи сверхвысоких энергий и возможная модификация relativisticheskoy teorii pri  $v \sim c$ .

**Kirzhnits D.A., V.A.Chechin.**

**Cosmic Rays of Superhigh Energies and a Possible Modification of Relativistic Theory for  $v \sim c$ .**

22. С.П.Кулеминов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондирев, А.Н.Тавхелидзе.

Метод прямолинейных путей и проблема эйконала.

**S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, M.A.Smondyrev, A.N.Tavkhelidze.**

**Straight-Line Path Method and the Eikonal Problem.**

23. А.Ласснер.

Функционалы Wightmanского типа (существование полей).

**A.Lassner.**

**Functionals of the Wightman Type (Existence of Fields).**

24. Х.Лемманн.

Одноцветное приближение в кирально-инвариантных лагранжианах.

**H.Lehmann.**

**The One-Loop Approximation in Chiral-Invariant Lagrangians.**

25. Я.Лукierski.

Вторичное квантование операторов билокальных полей и составление частицы.

**J.Lukierski.**

**Second Quantization of Bilocal Field Operators and Composite Particles.**

26. Г.Мак.

Групповое приближение к конформно-инвариантной квантовой теории поля.

**G.Mack.**

**Group-Theoretical Approach to Conformal Invariant Quantum Field Theory.**

27. В.Г.Малышкин, К.Зибольд.  
 $\mu$ -распад и  $\nu e$ -взаимодействия в нелокальной теории слабых взаимодействий  
V.G.Malyshkin, K.Zibol'd.  
 $\mu$ -Decay and  $\nu e$ -Interactions in Nonlocal Weak Interaction Theory.

28. М.А.Марков.  
О регуляризующих свойствах гравитационного поля.  
M.A. Markov.  
On Regularizing Properties of Gravitational Field.

29. В.Л.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе.  
Автомодельность при больших углах рассеяния и структура адронов.  
V.L. Matveev, R.M. Muradian, A.N. Tavkhelidze.  
Autamodelity at Large Scattering Angles and the Hadron Structure.

30. В.Л.Матвеев, Е.Вицорек, Д.Робашик, А.Н.Тавхелидзе.  
Конформная инвариантность и причинность для матричных элементов токов.  
V.A. Matveev, E.Wieczorek, D.Robashik, A.N.Tavkhelidze.  
Conformal Invariance and Causality for the Matrix Elements of Currents.

31. К.Нишиджима.  
Теорема Хигга в формализме Янга-Фелдмана.  
K.Nishijima.  
Higg's Theorem in the Yang-Feldman Formalism.

32. В.Н.Первушин, М.К.Волков.  
Расчет форм-факторов  $\pi$ -мезона в теории кирального типа.  
V.N. Pervushin, M.K. Volkov.  
Calculation of the  $\pi$ -Meson Form Factor in a Theory of Chiral Type.

33. Д.Я.Потрина, В.И.Скрипник.  
О сходимости рядов теории возмущений в нелокальной неполиномиальной квантовой теории поля при бесконечном объеме.  
D.Ya. Petrina, V.I. Skripnik.  
On Convergence of Perturbation Series in Nonlocal Nonpolynomial Quantum Field Theory at an Infinite Volume.

34. А.К.Погребков, В.Н.Сушко.  
Гейзенберговские поля и уравнения движения в конструктивном подходе к двумерным моделям теории поля.  
A.K. Pogrebkov, V.N. Suchko.  
Heisenberg Fields and the Equations of Motion in the Constructive Approach to Two-Dimensional Models of Field Theory.

35. Л.В.Прохоров.  
Квантовая теория поля в терминах лишь физических величин.  
L.V. Prokhorov.  
Quantum Field Theory in Terms of Only Physical Quantities.

36. М.Л.Рутенберг.  
О теореме эквивалентности.  
M.L.Rutenberg.  
On the Theorem of Equivalence.

37. Д.А.Славнов.  
Обобщенная регуляризация Паули-Вилларса.  
D.A.Slavnov.  
A Generalized Pauli-Villars Regularization.

38. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев.  
Функциональные методы в теориях калибропочного типа.  
A.A.Slavnov, L.D.Faddeev.  
Functional Methods in Theories of Gauge Type.

39. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев,  
Инвариантная теория возмущений для нелинейных киральных лагранжианов.  
A.A.Slavnov, L.D.Faddeev.  
Invariant Perturbation Theory for Nonlinear Chiral Lagrangians.

40. Л.Д.Соловьев.  
Квантовая электродинамика без теории возмущений и инфракрасных  
расходимостей.  
L.D.Soloviev.  
Quantum Electrodynamics without Perturbation Theory and  
Infrared Divergences.

41. У.С.Суяров, Л.Ш.Ходжаев.  
Функциональная структура суперпропагаторов функций Вайтмана  
и других квантово-полевых величин в локализуемой неполиномиальной  
лагранжевой теории поля.  
U.S.Sujarov, L.Sh.Khodzhaev.  
Functional Structure of the Wightman Function Superpropagators  
and Other Quantum Field Quantities in Localized Nonpolynomial  
Lagrange Field Theory.

42. П.И.Фомин.  
Некоторые свойства вакуума в искривленном пространстве  
и их физические следствия.  
P.I.Fomin.  
Some Features of Vacuum in a Curved Space and their Physical  
Consequences.

43. В.А.Франке.  
О возможности включения необратимости во времени в аппарат  
квантовой теории поля.  
V.A.Franke.  
On a Possible Inclusion of the Time Irreversibility in the  
Formalism of Quantum Field Theory.

44. К.Хепп.  
Строгие результаты в макроскопической квантовой электродинамике.  
K.Hepp.  
Rigorous Results in Macroscopic Quantum Electrodynamics.

45. Дж.Хонеркамп.  
Ковариантная теория возмущений и киральныи суперпропагаторы.  
J. Honerkamp.  
*Covariant Perturbation Theory and Chiral Superpropagators.*

46. И.В.Хриплович.  
Перенормируемость, причинность, квазиклассика.  
I. V. Khriplovich.  
*Renormalizability, Causality, Quasiclassic.*

47. Н.С.Шавохина.  
Двухкомпонентное нейтрино в общей теории относительности.  
N. S. Shavokhina.  
*A Two-Component Neutrino in General Relativity.*

48. А.С.Шварц.  
Аксиоматическая теория рассеяния и уравнения движения.  
A. S. Shwarts.  
*Axiomatic Scattering Theory and Equations of Motion.*

49. Ю.М. Широков.  
Одновременные коммутаторы и их возможные обобщения.  
Yu. M. Shirokov.  
*Equal-Time Commutators and their Possible Generalizations.*

50. М.И.Широков.  
"Одевание" и теорема Хага.  
M. I. Shirokov.  
*"Dressing" and the Haag Theorem.*

51. А.Ядчук.  
О локализуемости фотонов.  
A. Jadczyk.  
*On Localizability of Photons.*

52. М.Блажек.  
К проблеме аналитического продолжения по массам.  
M. Blazek.  
*On the Problem of Analytic Continuation with Respect to Masses.*

53. А.В.Виленкин, П.И.Фомин.  
Собственная энергия электрона и принцип соответствия.  
A. V. Vilenkin, P. I. Fomin.  
*Electron Proper Energy and the Correspondence Principle.*

54. Д.А.Киржнич, Г.Ю.Крючков.  
Квантовая электродинамика без ложного полюса.  
D. A. Kirzhnits, G. Yu. Kriuchkov.  
*Quantum Electrodynamics without False Pole.*

55. Ю.М.Ломсадзе, Е.П.Сабад.  
Некоторые экспериментально проверяемые следствия нарушенной микропричинности по аксиоматической квантовой теории поля.  
Yu. M. Lomsadze, E. P. Sabad.  
*Some Experimentally Verifiable Consequences of Broken Microcausality by Axiomatic Quantum Field Theory.*

56. О.А.Могилевский.  
Нелинейная квантовая электродинамика спина 3/2.  
O. A. Mogilevsky.  
*Nonlocal Quantum Electrodynamics of Spin 3/2.*

57. Д.Робашик, Е.Вицорек.  
Локальные свойства дуальных теорий.  
D. Robashik, E. Wieczorek.  
*On Local Properties of Dual Theories.*

Copyright © 1973

Joint Institute for Nuclear Research

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
Заказ 16370. Тираж 400. Уч.-изд.листов 12,  
Редактор В.Р.Саранцева. Подписано к печати 1/У1-73  
Обложка А.Коваленко.