

Chern-Simons行列模型を用いた超弦理論の非摂動的側面の研究

著者	杉山 健斗
発行年	2019-12
出版者	静岡大学
URL	http://doi.org/10.14945/00027499

静岡大学 博士論文

Chern-Simons 行列模型を用いた
超弦理論の非摂動的側面の研究

- *Non-perturbative Aspects of Superstring Theory from Chern-Simons Matrix Models* -

2019 年 12 月

大学院 自然科学系教育部

杉山健斗

概要

量子重力理論の構築は理論物理学における重要な課題であり、現在のところその最も有力な候補は超弦理論である。超弦理論は摂動的な定式化が成されているものの、摂動論を超えた非摂動的側面が未だ明らかではない。ゲージ/重力対応は、超弦理論の非摂動的側面をゲージ理論の解析から明らかにする試みの1つである。

本博士論文では、ゲージ/重力対応を通じて超弦理論との関係が期待されている Chern-Simons (CS) 行列模型のラージ N 極限を詳細に調べた結果を記載する。行列模型のラージ N 極限の振る舞いは、行列固有値に関する鞍点方程式によって特徴付けられる。本研究では、これまで解が唯一であると考えられてきた CS 行列模型の鞍点方程式の解が新たに無限個存在することを示す。そしてこれら無数の解の解析的な構成法を提案し、その物理的な役割について議論する。特に CS 行列模型の1つである ABJM 行列模型に現れるこの解が、D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる超弦理論の非摂動効果と関係することを定量的に示す。またこの証拠に基づいて、本研究で発見した CS 行列模型の様々な解が超弦理論の非摂動的側面を捉えている可能性を議論する。

目次

第1章 序論	3
1.1 背景	3
1.2 本研究の目的と概要	8
1.3 本論文の構成	10
第2章 3次元超対称 Chern-Simons-matter 理論	12
2.1 $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論	12
2.2 $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論と超弦理論	13
2.3 S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論の局所化	18
第3章 行列模型のラージ N 極限	21
3.1 Hermitian 行列模型	21
3.2 ラージ N 極限	23
3.2.1 自由エネルギー	24
3.2.2 リゾルヴェントの方法	26
3.3 例題：Gaussian 型ポテンシャル	28
第4章 pure $U(N)$ Chern-Simons 行列模型のマルチカット解	31
4.1 Hermitian 行列模型 vs. Chern-Simons 行列模型	31
4.2 準備	34
4.3 ワンカット解	35
4.4 ステップ型ツーカット解	37
4.4.1 $N = 2$ の場合	37
4.4.2 ラージ N 極限の場合	38
4.5 ステップ型マルチカット解	42
4.6 ステップ型マルチカット解の重ね合わせ	45
4.7 一般解の構成	48
第5章 ABJM 行列模型のマルチカット解	51
5.1 ABJM 行列模型における鞍点方程式	51
5.2 DMP 解	54
5.3 ABJM 行列模型のマルチカット解	56
5.3.1 一般解の構成	56

5.3.2	対称ステップ型マルチカット解	57
5.4	超弦理論の非摂動効果との関係性	60
5.4.1	ABJM 行列模型の非摂動効果	60
5.4.2	マルチカット解 vs. D2 ブレーンインスタントン	62
5.4.3	pure $U(N)$ CS 行列模型におけるラージ N インスタントン	66
5.4.4	他のマルチカット解におけるインスタントン極限	66
第 6 章	結論	68
付 録 A	第 3 章における補足計算	73
A.1	Vandermonde 行列式の導出	73
A.2	Migdal 積分形式の導出	75
A.3	Lagrange 未定乗数法を用いた自由エネルギーの簡単化	76
付 録 B	ラージ N 極限の練習問題	78
B.1	4 次の相互作用を持つポテンシャル	78
B.2	Gross-Witten-Wadia 型相転移	79
B.3	カスプ型ポテンシャルの臨界現象	81
B.3.1	ワンカット解	84
B.3.2	原点对称なツーカット解	85
B.3.3	非多項式型ポテンシャル	87
B.3.4	議論	88
付 録 C	ラージ N インスタントン	90
C.1	解釈 (1): 非自明な鞍点へのトンネル効果	90
C.2	解釈 (2): 非自明な周回積分	92
C.3	マルチカット解との関係性	93
付 録 D	正則性を用いた行列模型の解析解の構成	94
D.1	Hermitian 行列模型の場合	94
D.2	Chern-Simons 行列模型の場合	95
D.2.1	ワンカット解	95
D.2.2	ステップ型ツーカット解	96
D.2.3	一般化	99
付 録 E	pure $U(N)$ Chern-Simons 行列模型の厳密計算	100

第1章 序論

1.1 背景

量子重力理論の構築に向けて

¹自然界に存在する様々な物質を構成する基本要素は何だろうか。そのようなものが存在するとして、それはどのような理論に基づくだろうか。これらは、古代ギリシャ文明の頃から人類が持つ素朴かつ根源的な問いである。

素粒子物理学は、これらの疑問に科学的に挑む学問である。現在のところ、実験と理論の両面から確認されている範囲では、その解答は標準模型と一般相対性理論に集約されている。

標準模型は、自然界の物質を構成するクォーク (quark)、レプトン (lepton) と呼ばれる点状の基本粒子と、ヒッグス (Higgs) 粒子、そしてこれらに働く幾つかの力によって構成された理論である。粒子間に働く力は、単純な引力や斥力だけではなく、粒子を生成させたり崩壊させたりといった働きも含まれることから、一般に“相互作用”と呼ばれる。

自然界にはこれまで知られている限り、以下の4種類の相互作用が存在している。

1. 電磁相互作用： 電子等を原子核に結びつける力。
2. 弱い相互作用： β 崩壊やニュートリノ反応を起こさせる弱い力。
3. 強い相互作用： 原子核やクォークを結びつける非常に強い力。
4. 重力相互作用： エネルギーを持つ全ての物質間に働く弱い力。

この中で1. 電磁相互作用、2. 弱い相互作用、3. 強い相互作用の3種類は標準模型の中に含まれており、量子場の理論 (quantum field theory, QFT) と呼ばれる体系によって、目に見えないくらいミクロな領域の物理まできちんと記述されることが知られている。量子場の理論では、物質間に働く相互作用もまた、ゲージ (gauge) 粒子と呼ばれる基本粒子の交換によって記述される。

以上のような幾つかの基本粒子で記述された標準模型は、世界各地で行われている高エネルギー加速器実験の結果をことごとく再現し、これまでに非常に多くの成功を収めている。

¹研究背景についての参考文献は、超弦理論に関する教科書 [1, 2, 93] 及びゲージ/重力対応に関する文献 [94, 95] である。

ところで、ここまで登場しなかった第4の相互作用に相当する重力相互作用はどのような理論で記述されるだろうか。重力は、電磁相互作用と同様に私達が生活する中で身近に感じる力であり、その研究の歴史もまた古い。現在、重力相互作用を記述する体系は、Einsteinによって提唱された一般相対性理論である。一般相対性理論もまた、標準模型と同様に多くの実験結果と矛盾の無い結果を再現する確立した理論である。

ところが一般相対性理論には、1つの重大な欠点がある。それは、一般相対性理論には量子論の効果が入っていないという点である。量子論に基づく、物質の動力学は、一定のミクロな領域で確率論に基づいた量子揺らぎの効果が無視出来ないことが分かっている。重力理論にも、量子効果が効いてくる以下のエネルギースケールが知られている。

$$\text{Planck スケール: } E_{pl} := M_{pl}c^2 = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV.} \quad (1.1)$$

ここで c は光速、 M_{pl} は Newton 定数 G_N から読み取られる Planck 質量 $M_{pl} := \sqrt{\hbar c / G_N}$ である。このエネルギースケールの存在は、以下で記述した Planck 長以下のミクロな領域の物理を調べようとする、量子効果が含まれていない一般相対性理論では予言出来ないことを示している。

$$\text{Planck 長: } l_{pl} := \frac{\hbar c}{E_{pl}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m.} \quad (1.2)$$

長さ l_{pl} 以下のミクロな領域の物理を予言するには、どうしたら良いだろうか。点粒子を基本要素とした量子場の理論を用いて一般相対性理論のミクロな領域を補完しようすると、これらの相性は非常に悪いということが知られており、これまで通りの解析は難しい。²

自然界に存在する全ての相互作用を統一的に理解する夢に向けて、量子重力理論の構築は重要である。しかしこの構築は、未だ完全には成されていない現代の未解決課題である。

超弦理論の取り組み

現在のところ、量子重力理論の第一候補は弦理論と呼ばれる体系である。弦理論とは、理論の基本要素を、点状粒子から長さが $\mathcal{O}(l_{pl})$ ぐらいの1次元的な“ひも”に拡張した理論である。この理論は、ひもの励起状態の中に重力相互作用を特徴付ける重力子 (graviton) が含まれていることから、量子重力の定式化になっているのではないかと考えられている。

また超対称性 (supersymmetry, SUSY) と呼ばれる特殊な対称性を持った“超”弦理論は、標準模型に現れる全てのゲージ場、物質場とみなすことが可能な励起状態を持っている。この事実から、超弦理論は量子重力理論の定式化になっているばかりではなく、自然界に

²この困難は、量子場の理論における繰り込み (renormalization) の考え方に基づく。4次元時空上の重力相互作用は、次元解析から irrelevant な相互作用である。従って、低エネルギーでは量子効果は非常に小さく無視することが出来るが、Planck スケール E_{pl} を超えた領域では強結合になる。強結合領域では、一般相対性理論を超えた様々な項が理論に入ってくる自由度が生まれてしまい、理論を制御することが難しい。

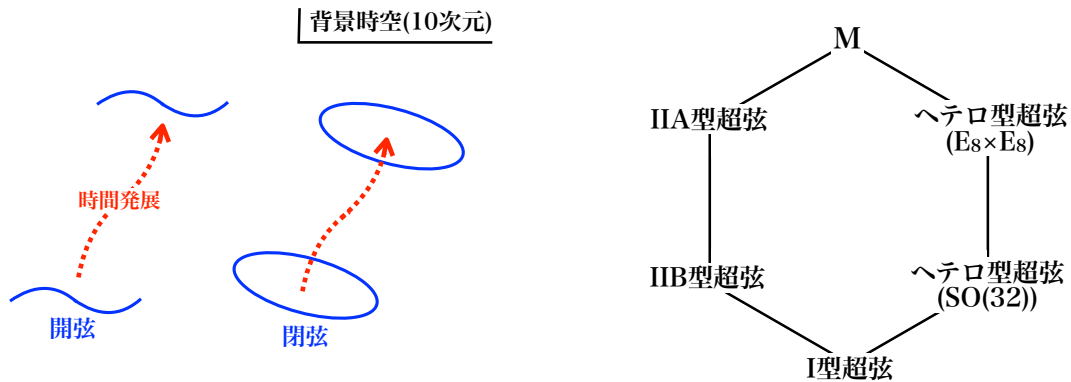


図 1.1: (左図:) 超弦理論における基本要素。開いたひも (開弦) と閉じたひも (閉弦) が 10 次元の背景時空上に存在する。(右図:) 超弦理論の双対性。上記のような IIA 型、IIB 型、I 型、ヘテロ型 ($SO(32)$)、ヘテロ型 ($E_8 \times E_8$) が存在し、これらは双対性で繋がると考えられている。M 理論は IIA 型超弦理論の強結合領域を記述するとされている膜の理論である。

存在する全ての相互作用や物質を 1 つの枠組みで記述する統一理論としての期待がかけられている。

以下では超弦理論について、これまでに知られている側面と理解が十分とは言えない側面を述べる。超弦理論の基本要素であるひもは、図 1.1 左で示したような 10 次元の時空上を漂う 1 次元的な物体である。閉じたひもの励起状態は重力相互作用を特徴付けるスピン 2 の励起を含み、一方で開いたひもの励起状態はゲージ相互作用を特徴付けるスピン 1 の励起を含む。

これらひもは結合定数 g_s を持ち、この相互作用を通じて分裂したり結合したりする。そしてこの理論は、通常量子場の理論における摂動論のように、結合定数 g_s に関する弱結合摂動展開によって定式化されている。

これまでに、物理的な無矛盾性等の様々な解析から、摂動的に定義された超弦理論は、図 1.1 右に記載した 5 種類であることが知られている。またこれらは幾つかの双対性 (duality) によって、1 つの理論の異なる側面に過ぎないと予想されている。

このような 1 つの統一的な理論の存在が見えてくると、弦結合定数 g_s の摂動的な理解を超えて、強結合領域も含めた超弦理論の全貌を理解したいと考えるようになる。しかし、超弦理論の摂動論を超えた非摂動的な側面については、十分な理解が進んでいるとは言えない。

通常量子力学や量子場の理論において、摂動論が理論の真空周りの一側面しか記述しないこと等を踏まえると、超弦理論においてもその非摂動的側面の理解が重要であると考えられる。

弱結合摂動展開 $g_s \ll 1$ を超えた超弦理論の非摂動的側面についての研究は、1995 年に以下の 2 つの大きな進展がある。

1. M 理論の提唱 (Witten 1995 年) [3]
2. D ブレーンの発見 (Polchinski 1995 年) [4]

M 理論は、IIA 型超弦理論の強結合領域に相当するとされている 11 次元時空上の理論である。³この理論には、超弦理論の基本要素であった“ひも”から更にもう 1 次元拡張された M2 ブレーン (M2-brane, membrane) と呼ばれる“膜”が基本要素として登場する。しかし、膜の理論の量子化が困難であることが相まって、その全容は謎に包まれている。分かっていることは、幾つかの励起状態の存在と、この理論が古典的には超対称性を持つ 11 次元の重力理論によって記述されるという点のみである。

一方で、D ブレーン (D-brane) とは超弦理論に新たに存在することが明らかになった励起状態である。この励起状態もまた、M2 ブレーン同様に広がりを持った高次元的な物体であることが分かっている。空間 p 次元に広がった D ブレーンは、一般に D_p ブレーンと呼ばれている。

以上のように、1990 年中旬頃からひもの摂動論を超えた領域には様々な次元を持つ物体が現れることが示されてきた。

ゲージ/重力対応

このような、1 次元的なひもに限らない励起状態が存在する超弦理論の非摂動的側面を理解するにはどうしたら良いだろうか。現在までに幾つかの方向性が示されてきている中で、本研究ではゲージ/重力対応と呼ばれる双対性を用いた方針に着目する。⁴

1997 年、Maldacena は D ブレーンを用いた議論からゲージ/重力対応 [13] と呼ばれる予想を提唱した。以下では、不完全な説明であるがこのアイデアを直感的に紹介する。

図 1.2 左で描かれたような、 N 枚の D ブレーンが平行に重なった状況でのひもの励起を考えてみることにしよう。D ブレーン上におけるひもの励起の典型例は、図 1.2 右のような筒型の世界面 (world sheet) を描いた過程である。この世界面には、以下の 2 種類の解釈が存在することが知られている。

1 つ目は、これを“開弦が 1 ループを描いた”と考える解釈である。開弦は、低エネルギー極限でゲージ粒子を特徴付ける。従って、この考え方を N 枚の D ブレーンの場合に

³図 1.1 の描き方について、5 種類の超弦理論で五角形を作り、真ん中に M 理論を置く描き方も存在する。この描き方は、M 理論が超弦理論全体を覆う統一理論の正体であると考えられる立場に基づく。一方、図 1.1 は M 理論を IIA 型理論の強結合領域での描像と位置付け、他の摂動的超弦理論と同様に超弦理論の一側面と考える立場である。

⁴超弦理論の非摂動的側面に迫る現代の主な方針は、ゲージ/重力対応の他に以下の 2 つが挙げられる。

1. 弦の場の理論の構築
 2. 行列模型を用いた定式化
1. の方針は、点粒子の場の理論の拡張から弦の場の理論を構成し、その非摂動的側面までを理解しようとする素朴な試みである。また 2. の方針は、行列模型 (matrix model) と呼ばれる行列を基本要素とした理論を用いて弦理論の非摂動的に定式化する試みである。この試みは、非臨界弦理論における研究 [5, 6, 7, 8] や、超弦理論に対する研究 [9, 10, 11, 12] 等が挙げられる。

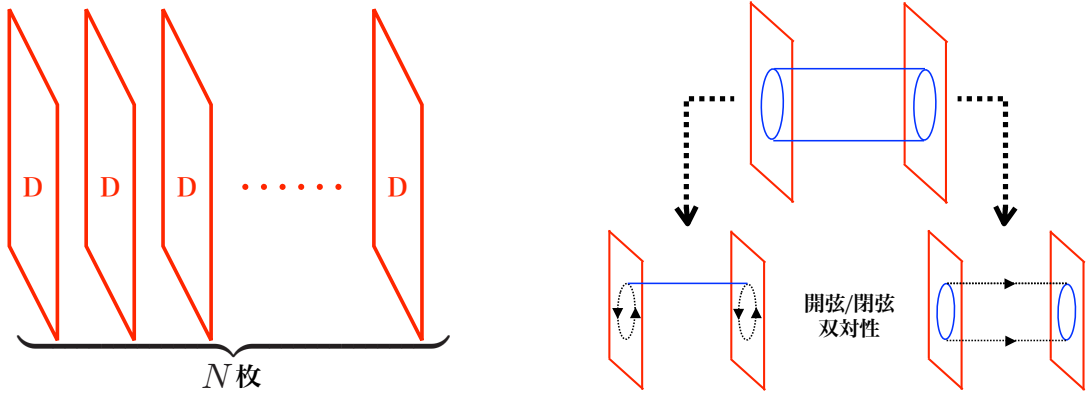


図 1.2: (左図:) N 枚の D ブレーンが背景時空上に平行に重なった状況。(右図:) 開弦/閉弦双対性。筒状の世界面が 2 枚の D ブレーンを橋渡ししている過程では、開弦 (左) の励起と閉弦 (右) の励起の 2 種類の解釈が存在する。

拡張すると、この上の低エネルギー有効理論は $U(N)$ ゲージ理論である。例えば、IIB 型超弦理論に現れる D3 ブレーンが N 枚重なった状況では、この上の低エネルギー励起は 4 次元の $\mathcal{N} = 4 U(N)$ Yang-Mills (YM) 理論で記述されることが分かっている。

2 つ目は、これを“閉弦が D ブレーン間で交換された”と考える解釈である。閉弦は、先に述べた通り低エネルギー極限で重力子の特徴付ける。従ってこの考え方に基づくと、低エネルギー有効理論は重力理論である。D3 ブレーンの場合だと、これは $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上の重力理論である。AdS 時空とは、反ドジッター (anti-de Sitter) 時空の略称で、複数枚の D ブレーンの存在によって平坦時空から大きく曲げられた重力解を指す。

さて、ゲージ/重力対応とは、このような開弦/閉弦の各解釈に基づいて現れた両者の物理量、例えば以下で示した分配関数等が等価であるという主張である。

$$Z_{\text{ゲージ理論}} \stackrel{\text{予想}}{=} Z_{\text{AdS 時空上の重力理論}}. \quad (1.3)$$

この予想にはきちんとした証明はまだ存在しないが、現在までに幾つかの定量的な状況証拠が集まっている。

この等価性を信じると、重力理論 (閉弦理論) とゲージ理論の各パラメータは以下のように対応すると考えられている。

$$g_s \sim 1/N, \quad l_s/l_{\text{AdS}} \sim 1/\lambda. \quad (1.4)$$

ここで g_s は弦結合定数、 l_s は Planck 長程のひもの長さ、 l_{AdS} は AdS 時空における AdS 半径と呼ばれるパラメータである。また N はゲージ群の自由度、 λ はゲージ結合定数 g_{YM} と N をかけあわせた 'tHooft 結合定数 $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N$ である。

この対応関係を信じると、 $N \rightarrow \infty$ と取ったラージ N 極限 (large- N limit) かつ強結合極限 $\lambda \rightarrow \infty$ は、ひもが広がりを持つ効果や量子効果が効いてこない閉弦理論の古典極限に相当する。今の場合、古典極限には超対称性を持った重力理論である超重重力理論 (supergravity, SUGRA) が現れる。

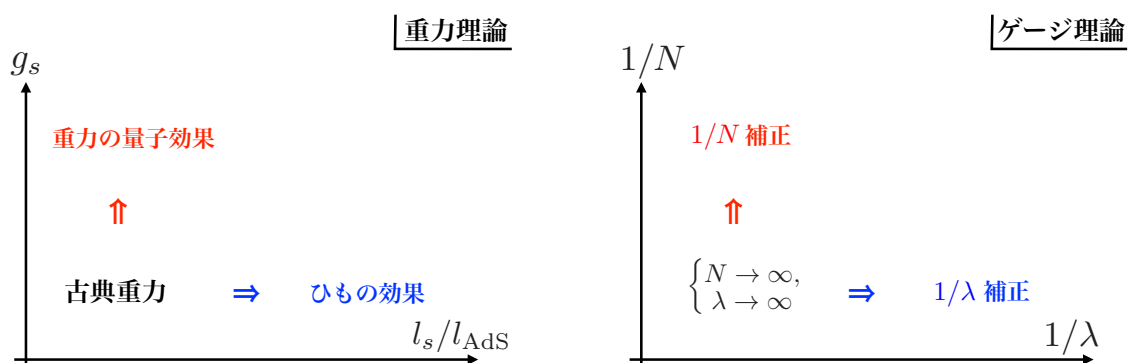


図 1.3: (左図:) 重力理論のパラメータ空間。 g_s は弦結合定数、 l_s はひもの長さ、 l_{AdS} は AdS 半径である。一般に AdS 時空上の重力理論は古典極限 $g_s \rightarrow 0$, $l_s \rightarrow 0$ を超えた解析が難しい。(右図:) ゲージ理論のパラメータ空間。 N はゲージ群の自由度、 λ は'tHooft 結合定数である。双対性を信じると、 $N \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ が古典重力と対応する極限に相当する。ゲージ理論側は、任意領域できちんと定義されており、こちらの解析から原理的には重力の量子効果やひもの効果が予言出来ると期待される。

一方この極限からの $1/N$ 補正は、超弦理論に基づく重力の量子補正と考えることが出来る。ゲージ理論側はこれまでに解析方法が様々に開発されてきた点粒子の場の理論であるので、場の理論の解析から超弦理論の一側面が捉えられるという訳である。またこの結果に関するこれまでの解析との無矛盾性の確認は、古典論であるために解析が容易な超重重力理論の計算結果との比較によって主に行われる。⁵

以上のように、ゲージ/重力対応を用いると、特定の状況からの低エネルギー励起のみを考えてはいるものの、ゲージ理論の解析を通じて超弦理論のこれまで知られていない側面に迫れる可能性がある。特にゲージ理論側は、有限の (N, λ) で定義された理論であるので、原理的には、この詳細な解析から直接解析が難しい重力の非摂動効果を解析することが出来ると期待される。

1.2 本研究の目的と概要

本博士論文では、ゲージ/重力対応から超弦理論や M 理論の低エネルギー極限との双対性が期待されている 3 次元超対称 Chern-Simons-matter (CSM) 理論と呼ばれるゲージ理論に注目する。このクラスの理論の中には、Aharony, Bergman, Jafferis, Maldacena によって 2008 年に提唱された ABJM 理論 [14] と呼ばれる複数枚の M2 ブレーンの低エネルギー極限を記述する理論が存在している。従って、この解析から AdS 時空上の M 理論や IIA 型超弦理論の非摂動的側面に迫れる可能性がある。

⁵4 次元の $\mathcal{N} = 4 U(N)$ YM 理論と AdS 時空上の閉弦理論の場合には、可積分性や数値解析を用いて、古典極限を超えた等価性の確認が示されている。

また ABJM 理論を含む 3 次元超対称 CSM 理論は、量子場の理論として直接解析することが困難であるが、近年進展が著しい局所化 [15, 16, 17] と呼ばれる手法を用いることで、Chern-Simons (CS) 行列模型と呼ばれる比較的単純な N 個の行列固有値のダイナミクスに還元されることが明らかになっている。特に、ABJM 理論を還元して現れる行列模型は ABJM 行列模型と呼ばれる。行列模型まで還元されたこれらの理論は、場の理論において良く知られた解析法である $1/N$ 展開法 ($1/N$ expansion)[18, 19] を用いて、その非摂動効果を含めた詳細な解析が可能である。⁶

本研究の目的は、CS 行列模型の詳細な解析から超弦理論の非摂動的側面を明らかにすることである。本論文では、CS 行列模型のラージ N 極限での新たな振る舞いを解析した私達の研究結果 [21, 22] を記載する。ここで N は行列模型の基本変数となる行列のサイズである。ラージ N 極限とは、その自由度について無限大極限 $N \rightarrow \infty$ を取り、 $1/N$ に関する摂動展開で理論の物理量を評価することに相当する。

以下では、本研究の概要を述べる。一般的に行列模型のラージ N 極限での振る舞いは、 N 個の行列固有値に関する運動方程式の解によって特徴付けられる。これまでの CS 行列模型に関する運動方程式の解析では、その解析解の構成が先行研究 [23, 24, 25, 26] によって成されていたものの、それは系の基底状態に相当する 1 種類しか発見されていなかった。

本研究では、この模型の解析解が新たに無限個存在することを示し、この無限個の解の系統的な構成方法を提案する。新たに構成されたこれらの解は、その解析解が持つ特徴からマルチカット解 (multi-cut solution) と呼ばれる。このマルチカット解の発見及び解析的な構成が、本研究が初めて明らかにした主な成果である。

CS 行列模型におけるマルチカット解の存在は、既存の解を基底状態とみなした場合、これに対する非摂動的な励起状態の存在に相当すると考えられる。従ってここでゲージ/重力対応を用いると、これらの励起状態は、D ブレーンのダイナミクスや、これまでに知られていない双対な超重力理論における解の存在等の、超弦理論の非摂動的側面と関係することが示唆される。

本論文の終盤では、この示唆の具体的かつ定量的な証拠を示すために、ABJM 行列模型に現れるマルチカット解の物理的役割に着目する。ABJM 行列模型は、先に述べたように IIA 型超弦理論や M 理論の低エネルギー極限との対応関係が期待されており、従ってこの模型のマルチカット解はこれらの非摂動的側面を捉えている可能性がある。

本研究では、私達が新たに発見した ABJM 行列模型におけるマルチカット解の一部が、ある極限で D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる IIA 型超弦理論の非摂動的な励起状態と定量的に関係することを示す。D2 ブレーンインスタントンは、IIA 型超弦理論の古典極限に相当する IIA 型超重力理論の解析から存在が知られていた励起状態であり、この一致をもって私達のマルチカット解と超弦理論の非摂動効果の関係を裏付けることが出来る。

⁶ $1/N$ 展開法は、1974 年、'tHooft が研究 [18] にて強い相互作用を記述するゲージ理論の解析に用いた手法である。その後、Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber による研究 [19] にて、この手法の行列模型の解析への適用が整備された。またゲージ理論と行列模型のラージ N 極限での対応関係を示した重要な研究として、江口, 川合によるラージ N 還元 (large- N reduction)[20] が挙げられる。

また本論文の最後には、この定量的な証拠から ABJM 行列模型に限らない CS 行列模型の様々なマルチカット解が、超弦理論の非摂動的側面と関係する可能性を議論する。

以上が本研究の目的と概要である。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は、以下の通りである。大きく分けると、第 2, 3 章が本研究における予備知識を紹介したレビュー部分で、第 4, 5 章が論文 [21, 22] で示した新しい結果に基づく。

まず第 2 章では、3 次元超対称 CSM 理論を導入する。3 次元超対称 CSM 理論はゲージ/重力対応を通じて、超弦理論の低エネルギー極限と対応関係にあると期待されているあるクラスのゲージ理論の総称である。特に ABJM 理論 [14] と呼ばれる CSM 理論の 1 つは、幾つかの極限の下で IIA 型超弦理論や M 理論の低エネルギー有効理論に相当することが期待されており、先行研究 [26] 等からその定量的な証拠も上がっている。

また ABJM 理論を含む CSM 理論は、局所化を通じて CS 行列模型と呼ばれる行列模型に厳密に還元されることが知られている。本章では、本研究で解析を行うこの模型がどのように導出されるかを概観する。

局所化によって導出された CS 行列模型は、研究 [19] 等により良く整備されたラージ N 極限の手法が適用可能な解析しやすい模型である。第 3 章では、以下に続く章で CS 行列模型を解析する準備として、最も単純な行列模型である Hermitian 行列模型のラージ N 極限の解析法 [19] を紹介しよう。本章の内容はやや技術的な側面が強いため、研究結果と直接関係しない技術的な補足計算は付録 A にまとめた。

また本論文における本筋の内容とは逸れるが、Hermitian 行列模型におけるラージ N 極限の練習問題を付録 B に記載した。特に B.3 では、私達の研究 [27] に沿ってカスプ型ポテンシャルを持つ行列模型の非自明な臨界現象をまとめたので、興味に合わせて参照して頂きたい。

以上により、CS 行列模型を解析する準備が整う。第 4 章では、pure $U(N)$ CS 行列模型のラージ N 極限に着目する。pure $U(N)$ CS 行列模型は、数ある CS 行列模型の中で最も単純な模型に相当し、従ってこの解析を元に ABJM 行列模型を含む様々な CS 行列模型への一般化が可能である。本章では、私達の研究 [21, 22] に沿って、pure $U(N)$ CS 行列模型のラージ N 極限に、これまでに発見されていなかった無限個の解析解が存在することを示す。そしてこれらの解の系統的な構成法を提案する。これらの解は、解の持つ数理的な構造からマルチカット解と呼ばれる。ラージ N 極限での複数個の解の存在は、第 3 章で学ぶ行列模型の一般論に従うと、理論の非摂動効果の存在を示唆している。

本章と関連する付録は、付録 D 及び付録 E である。付録 D では、本研究で行ったマルチカット解の構成における別の導出法を補足する。また付録 E では、本章の議論に必要な pure $U(N)$ CS 行列模型の分配関数における厳密計算の導出法を紹介する。

第5章では、ABJM 行列模型に着目する。ABJM 行列模型にも、pure $U(N)$ CS 行列模型と同様にこれまでに発見されていなかったマルチカット解が存在する。本章では、まず pure $U(N)$ CS 行列模型の解析の一般化から、ABJM 行列模型における無限個のマルチカット解の系統的な構成が可能であることを示す。

次にこのマルチカット解の一部が、D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる IIA 型超弦理論の非摂動的な励起状態と定量的に関係することを示す。なお付録 C では、本章の後半で議論に挙がるラージ N インスタントンの基礎的な事項を補足解説した。

最後に第6章では、各章を振り返った後に本研究の結論と今後の展望、課題を述べる。

以上が本論文の構成である。

第2章 3次元超対称 Chern-Simons-matter 理論

本章では、3次元超対称 Chern-Simons-matter (CSM) 理論について、本研究 [21, 22] の背景を知る上で必要な事項に絞って簡潔に紹介する。本章の内容は、文献 [28, 29, 30, 31, 96, 97] に基づく。3次元 CSM 理論に関する更なる詳細な背景は、これらの文献を参照して頂きたい。

まずは節 2.1 にて、3次元超対称 CSM 理論を導入する。次に節 2.2 にて、このクラスの理論の幾つかが、ゲージ/重力対応を通じて AdS 時空上の超弦理論や M 理論と関係していることを紹介する。最後に節 2.3 にて、 S^3 上の超対称 CSM 理論が、近年進展した局所化の手法により行列模型と呼ばれる比較的単純な理論に還元されることを示す。この際に現れる行列模型が、本研究で主題となる Chern-Simons (CS) 行列模型と呼ばれる理論である。

2.1 $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論

この節では、 $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論について紹介する。 \mathcal{N} は理論の超対称変換の数に相当する。超対称性を持つとは、理論にボゾンの自由度とフェルミオンの自由度を入れ替える対称性が存在していることを指す。

簡単のため、まずは $\mathcal{N} = 2$ でゲージ群が $U(N)$ 、物質場が結合していない場合を紹介しよう。3次元多様体 \mathcal{M}_3 上の $\mathcal{N} = 2$ pure $U(N)$ CS 理論の作用及び分配関数は

$$S_g[A, \sigma, D, \lambda, \lambda^\dagger] = \frac{ik}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr} \left[A \wedge dA + \frac{2i}{3} A \wedge A \wedge A - \lambda^\dagger \lambda + 2D\sigma \right], \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$Z = \int \mathcal{D}(A, \sigma, D, \lambda, \lambda^\dagger) \exp [-S_g[A, \sigma, D, \lambda, \lambda^\dagger]], \quad (2.1)$$

と与えられる。ここで $A(x) := A_\mu(x) dx^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$) は、 \mathcal{M}_3 上のゲージ場 1 形式で、 $N \times N$ Hermitian 行列場である。超対称化によって現れる場 $(\sigma, D, \lambda, \lambda^\dagger)$ もまた、 $U(N)$ の随伴表現 (adjoint representation) に属する $N \times N$ Hermitian 行列場である。この中でも λ, λ^\dagger は、ゲージ場の超対称パートナーに相当する複素 Dirac 場に相当する。一方で、 σ, D は超対称変換が閉じるように導入された実スカラー補助場である。

結合定数に相当する k は、CS 準位 (Chern-Simons level) と呼ばれる質量次元 0 のパラ

メータであり、理論のゲージ変換

$$A \rightarrow A^{(g)} = gAg^{-1} - ig(dg^{-1}), \quad (g \in U(N)) \quad (2.2)$$

における不変性から、整数性 $k \in \mathbb{Z}$ が要請される。ゲージ群 $U(N)$ に関する CS 準位が k で与えられる時、簡単に $U(N)_k$ と記述するのが慣習である。

CS 項のみで記述されたこの理論 (2.1) は、一般的な Yang-Mills (YM) 項と CS 項を持つゲージ理論の低エネルギー極限に相当する。これは、以下の議論に基づく。

簡単のため、3次元多様体 \mathcal{M}_3 が平坦時空 \mathbb{R}^3 である場合を考えよう。YM 項及び CS 項のラグランジアン \mathcal{L} は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} &= \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \cdots, \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]), \\ \mathcal{L}_{\text{CS}} &= \frac{ik}{4\pi} \text{Tr}(\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}) + \cdots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

と書くことが出来る。 g_{YM} はゲージ結合定数、 k は CS 準位である。また \cdots 部分は超対称化に伴って現れる場を持つ項に相当するが、この議論では関係しないため、明らかに書かないことにする。

一般に低エネルギーの赤外領域では、繰り込みの観点から結合定数の質量次元の高い項が支配的である。先に述べたように、CS 項の係数 k は次元勘定から質量次元 0 である。一方で、YM 項の係数 $1/g_{\text{YM}}^2$ は質量次元 -1 である。従って CS 項が存在する $k \neq 0$ の場合であれば、YM 項は素朴な次元勘定から赤外領域では効かない。¹ また k 自身は、先に述べたようにゲージ対称性から整数値に量子化されており、 g_{YM} のようにエネルギースケールの変化に伴って変更を受けない。以上より、理論 (2.1) は 3次元ゲージ理論の低エネルギー極限、すなわち共形場理論 (conformal field theory, CFT) に相当していることが分かる。

以上が、超対称 CSM 理論の中で最も単純な $\mathcal{N} = 2$ pure $U(N)_k$ CS 理論の概要である。このゲージ群を一般の群 G に拡張し、ゲージ対称性や超対称性から可能な物質場を任意に結合させた理論が、一般の $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論である。次節では、幾つかの特別な $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論がゲージ/重力対応を通じて超弦理論と関係していることを紹介しよう。

2.2 $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論と超弦理論

前節では、超対称 CSM 理論と呼ばれるクラスの 3次元ゲージ理論について紹介した。この中の幾つかの理論は、ゲージ/重力対応 [13, 32] を通じて、AdS 時空上の超弦理論や M 理論の低エネルギー有効理論であることが期待されている。数ある CSM 理論の中でも、特

¹この議論は、より単純には YM 項と CS 項の微分の数と比較するという説明方法がある。YM 項は、式 (2.3) を眺めてみれば微分が 2 つ存在する。一方、CS 項は微分が 1 つである。座標に関する微分 ∂_μ は、運動量表示では運動量 p_μ そのものである。運動量 p_μ は、低エネルギー極限で小さな値を取るの、 p_μ の高次に相当する YM 項は赤外領域の物理では効いてこないとみなせる。

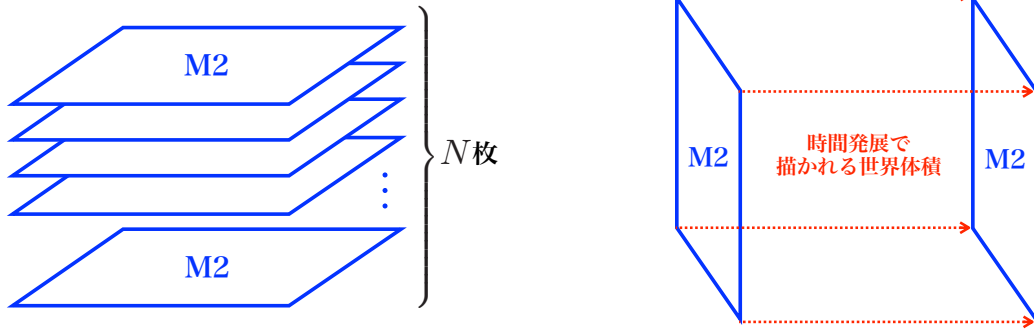


図 2.1: (左図:) N 枚の M2 ブレーンが背景時空中に平行に重なった状況。(右図:) M2 ブレーンの時間発展。膜状の物質が時間発展すると、その軌道が描く世界体積は 3 次元である。従って、この世界体積上の低エネルギー有効理論は 3 次元の場の理論であると期待出来る。

に超弦理論や M 理論との関係がよく知られた例は Aharony, Bergman, Jafferis, Maldacena によって 2008 年に提唱された ABJM 理論 [14] と呼ばれる理論である。ABJM 理論は、ゲージ群が $G = U(N)_k \times U(N)_{-k}$ で、双方のゲージ群に対して基本表現 (bi-fundamental representation) を取る物質場が 4 個結合した $\mathcal{N} = 6$ CSM 理論である。

以下では、ABJM 理論が研究対象として注目されることになった経緯を簡潔に述べる。この経緯には、Witten により 1995 年に提唱された M 理論 [3] が深く関係する。

Maldacena によりゲージ/重力対応 [13, 32] が提唱されて以来、超弦理論の研究者の中では、M 理論の理解にもこの考え方が役立つのではないかという期待があった。M 理論はその構成要素が M2 ブレーンと呼ばれる 2 次元膜であるため、その量子論的な性質を直接的に調べることは膜の量子化の困難に伴って難しい。このような膜の上の低エネルギー有効理論が、ゲージ/重力対応の考え方を通じてゲージ理論で記述出来たら、直接的には解析が難しい M 理論の理解が進むと期待される。

M 理論の古典極限に相当する 11 次元超重力理論の解析は、Klebanov, Tseytlin による 1996 年の研究 [33] によって成されている。この結果に基づくと、M2 ブレーンが N 枚集まった状況では、理論の自由エネルギー $F_{\text{SUGRA}} := -\log Z_{\text{SUGRA}}$ における N 依存性が

$$F_{\text{SUGRA}} \sim \mathcal{O}(N^{3/2}), \quad (2.4)$$

と振る舞うことが知られている。従って双対なゲージ理論が構成されたとすると、このような非自明な N 依存性を古典極限 $N \rightarrow \infty$ で持つことが絶対条件である。ゲージ理論の中でよく知られた YM 理論は、ラージ N 極限で自由エネルギーが $\mathcal{O}(N^2)$ と振る舞うことが知られており、M 理論の低エネルギー有効理論としては不適である。

このような背景を持った理論研究の中で、超弦理論においてこれまで調べられてきた双対性等の知識を駆使して構築された理論が ABJM 理論 [14] である。²この理論は、図 2.1 左

²ゲージ理論を用いて M 理論を調べようという試みは、Schwarz による 2004 年の研究 [34] に始まる。また、

で示したように、 N 枚の M2 ブレーンが 11 次元時空間中に並行に重なった状況下での低エネルギー励起を記述すると期待されている超対称共形場理論である。ABJM 理論に至る D ブレーンを用いた議論は非常に複雑であるため、本論文では割愛する。構成の詳細に興味がある場合は、原論文 [14] を参照して頂きたい。

以下では、超弦理論や M 理論の詳細を知らずとも直感的に理解が可能な、M 理論の低エネルギー有効理論が 3 次元超対称 CSM 理論になる理由を、文献 [97] に沿って述べるに留める。

まず M 理論の構成要素である M2 ブレーンは 2 次元的な膜である。従って、図 2.1 右で示したように時間発展で 3 次元的な軌道を描く。この軌道は一般に世界体積 (world volume) と呼ばれ、M2 ブレーン上の低エネルギー励起は、この世界体積上の理論である。従って、M2 ブレーン上の低エネルギー有効理論は 3 次元時空上の場の理論となることが期待される。

また M 理論が持つパラメータはプランク長 l_{pl} のみであることが知られており、無次元のパラメータは存在しない。これは M 理論を統一理論の候補として捉えた時の魅力の 1 つなのであるが、これを信じると、低エネルギー有効理論であるゲージ理論もまた余計な無次元パラメータを持たないと考えられる。場の理論において、そのような理論は共形場理論である。

以上の考察、及び M 理論に存在する超対称性が低エネルギーでも保たれていること等を考慮すると、このような条件を満たすゲージ理論は前節で紹介した 3 次元超対称 CSM 理論である。なお、本研究では解析を行わないが、重力双対の存在が明らかになっている CSM 理論は、ABJM 理論の他に、ABJM 理論を拡張した Aharony, Bergman, Jafferis による ABJ 模型 [39] や Gaiotto, Tomasiello による GT 模型 [40] 等が挙げられる。また、CSM 理論の中で最も単純な pure $U(N)$ CS 理論 (2.1) の重力双対の存在は明らかではないが、この理論は Witten による研究 [41] により、位相的弦理論 (topological string theory) と呼ばれる特殊な弦理論と対応関係にあること等が分かっている。

ABJM 理論における M 理論極限と IIA 型超弦理論極限

以下では ABJM 理論 [14] に話題を絞り、これまでの先行研究と本研究の立ち位置を述べる。この概略図は、図 2.2 に記載した。

次節で述べる技術的な理由から、理論が定義されている 3 次元多様体 M_3 を球面 S^3 の場合に限定する。 S^3 上の ABJM 理論には、以下の 2 種類のラージ N 極限が知られている。

$$\begin{aligned} \text{M 理論極限} : N &\rightarrow \infty, \quad k : \text{固定}, \\ \text{IIA 型超弦理論極限} : N &\rightarrow \infty, \quad \lambda := N/k : \text{固定}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

歴史的には Bagger, Lambert による研究と Gustavsson による研究から構成された BLG 模型 [35, 36, 37, 38] と呼ばれる理論が、複数枚の M2 ブレーン上の低エネルギー有効理論として有望であった。しかし BLG 模型は、ゲージ群が満足すべき条件が強すぎる等の問題から、例外的な幾つかの理論しか構成することが出来ないことが後に明らかになった。これらの歴史を踏まえて構成された理論が ABJM 理論 [14] である。

ABJM		
	M理論極限 (N, k)	IIA理論極限(N, λ)
ラージ N (古典重力極限)	$F_{ABJM} \sim N^{3/2}$	$F_{ABJM} \sim N^2$
$1/N, e^{-N}$ 補正 (量子効果)	フェルミガス法	本研究

図 2.2: 本研究の立ち位置。ABJM 理論は、各古典極限において超重力理論と一致することが Drukker, Marino, Putrov による研究 [26] により確認されている。これを踏まえると、その更なる詳細な解析から重力の量子効果を読み取ることが出来ると期待される。本研究では、特に IIA 型超弦理論極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda := N/k$: 固定) における非摂動効果に着目する。

これらは、ゲージ/重力対応を通じてそれぞれ AdS 時空上の M 理論及び超弦理論の低エネルギー極限と双対関係にあることが期待されている。

まずは M 理論極限 ($N \rightarrow \infty, k$: 固定) について述べる。CS 準位 k を固定した ABJM 理論は、先述の通り図 2.1 左で示した N 枚の M2 ブレーン系の低エネルギー有効理論に相当する。

特に k を固定したままラージ N 極限を取った極限は、11 次元の超重力解 $\text{AdS}_4 \times S^7/Z_k$ と物理量が一致することが期待される古典極限である。Drukker, Marino, Putrov による研究 [26] では、ABJM 理論から導かれる自由エネルギー $F := -\log Z$ について、11 次元超重力解の自由エネルギー (2.4) と古典極限で一致することが確かめられている。この結果は、AdS 時空上の M 理論におけるゲージ/重力対応の定量的な証拠を与えたと言える。研究 [26] については、本研究の内容と深く関わりを持つため、第 5 章にて詳しく紹介する。

以上の証拠に基づくと、ABJM 理論をラージ N 極限で更に調べることで、これまで評価することが難しかった M 理論の量子効果を解析することが出来ると考えられる。M 理論の場合、唯一のパラメータは Planck 長 l_{pl} であるため、 $1/N$ 補正は Planck 長に対する補正に相当する。ABJM 理論自身は、有限値の (N, k) で非摂動的にきちんと定義された場の理論である。従って、この解析からこれまでの直接的な解析ではよく分かっていない

M 理論の非摂動的側面に関する理解が進むと意義深い。

実は、近年 M 理論極限に関する非摂動効果の研究については進展が著しい。特に Marino, Putrov による研究 [42] では、フェルミガス法 (Fermi gas approach) と呼ばれる手法が開発された。この手法を用いると、ABJM 理論の $N^{3/2}$ 則 (2.4) をより簡単に導出することが出来る。更にこの方法を発展させると、 $1/N$ 展開の非摂動効果も含めた詳細な解析が可能であることが最近の進展 [42, 43, 44, 45, 46] により判明している。フェルミガス法を用いた解析の進展は、レビュー文献 [30, 31] を参照して頂きたい。

次に、IIA 型超弦理論極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda := N/k$: 固定) について述べよう。この極限は、IIA 型超弦理論の低エネルギー極限との対応が期待されている極限である。 $\lambda = N/k$ を有限に保つこの極限は、YM 理論との類推から 'tHooft 極限 ('tHooft limit) とも呼ばれており、本研究ではこの極限における ABJM 理論の振る舞いに着目する。

IIA 型超弦理論極限では、古典極限に相当するラージ N 極限かつ強結合極限 $\lambda \rightarrow \infty$ を取ったリーディングにおいて、10 次元超重力解 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ と物理量が一致することが期待される。これもまた Drukker, Marino, Putrov による研究 [26] において、古典極限での自由エネルギーの一致が確認されており、この解析結果もこのモデルでゲージ/重力対応が上手く働いている証拠の 1 つとして数えられている。

この双対性に基づく、リーディングからの $1/N$ 補正は弦結合定数 g_s に対する補正、すなわち量子効果である。 $1/\lambda$ 補正はひもの長さ l_s と関係し、基本要素であるひものが広がりを持っている効果に相当する。

さて、M 理論極限における詳細な解析の成功等を踏まえると、IIA 型超弦理論極限においても、ABJM 理論の更なる解析から超弦理論の非摂動的側面に迫れるのではないかと考えられる。1 つのゲージ理論から、M 理論と IIA 型超弦理論の両面を、非摂動効果まで含めて解析する準備が整ったモデルは、ABJM 理論 [14] とその亜種 [39, 40] 以外には知られておらず、この視点からも ABJM 理論は超弦理論の非摂動効果を調べる良いモデルであると考えられる。しかし Drukker, Marino, Putrov による研究 [26] 以来、この極限における非摂動効果に関する進展はやや乏しい。

本研究では、ABJM 理論を含む超対称 CSM 理論の 'tHooft 極限での振る舞いに注目する。ABJM 理論の場合、この極限を詳細に解析することで IIA 型超弦理論の非摂動的側面の理解が期待される。超弦理論の非摂動効果は、典型的に D ブレーンの励起による寄与である。

先に本論文の結論を述べておくと、私達は ABJM 理論の自由エネルギーの $1/N$ 展開の中に、IIA 型超弦理論の非摂動的な物体である D2 ブレーンが非自明な背景時空に巻き付いた非摂動効果が含まれている可能性を示した。D2 ブレーンインスタントンと呼ばれるこの配位は、先行研究 [47] によって ABJM 理論の励起状態の中に存在することが既に判明しているが、本研究では、この D2 ブレーンインスタントンが“複数個”励起した状態と予想付く配位を初めて発見した。またこの他にも超弦理論の非摂動的側面と関係する可能性を持った様々な励起状態の存在を発見した。ABJM 理論に関するこれらの解析は、第 5 章に紹介する。

さて、第5章で述べる結論に向けて1つずつ議論を詰めていく。ABJM 理論を含む S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論は、局所化 (supersymmetric localization) と呼ばれる手法 [15, 16, 17, 48, 49] により、比較的解析のしやすい模型に厳密に還元されることが知られている。Drukker, Marino, Putrov による研究 [26, 47] や、本論文で述べる私達の研究 [21, 22] は、全てこの局所化を用いて還元された模型の解析に基づく。次節では、この局所化のアイデアを示し、本研究で詳細に解析した還元された分配関数について紹介しよう。

2.3 S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ Chern-Simons-matter 理論の局所化

この節では、超対称性を用いた局所化 (supersymmetric localization) [15, 16, 17, 48, 49] により、 S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論が行列模型に次元還元されることを紹介する。以下に示すように、 S^3 のようなコンパクト多様体上の超対称場の理論の分配関数は、超対称性を代表とするグラスマン奇 (Grassmann odd) な対称性を利用して、非常に簡単な分配関数に還元させることが出来る。

局所化の基本的なアイデアを紹介しよう。あるコンパクト多様体上に定義されたグラスマン奇な対称性 δ を持つ理論 $S[\phi]$ を考える。 ϕ は理論内に存在する場の集合である。このような理論の分配関数は、形式的に

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi]], \quad \delta S[\phi] = 0, \quad (2.6)$$

と書くことが出来る。ここで分配関数の積分測度 $\mathcal{D}\phi$ は、変換 δ の下で不変であると仮定する。物理的には、この対称性に量子異常 (anomaly) が無いことを課すことに相当する。グラスマン奇な対称性 δ を持つこの理論は、

$$\mathcal{L}_B := \delta^2, \quad (2.7)$$

に対しても不変である。 \mathcal{L}_B は、グラスマン奇な対称性の2乗であることからグラスマン偶 (Grassmann even) な対称性で、ゲージ対称性や Lorentz 対称性の線形結合によって書かれる。

次に、以下の変形された分配関数を導入しよう。

$$Z(t) := \int \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi] - t\delta V]. \quad (2.8)$$

ここで δV は、Q-厳密項 (Q-exact term) と呼ばれる。 V 自身は、理論の Lorentz 対称性やゲージ対称性等の線形結合から書かれる \mathcal{L}_B に対して不変なグラスマン奇な演算子であるとする。また t は変形パラメータで、 $t=0$ を取ると元の分配関数 Z と一致する。

実は物理量 $Z(t)$ は、パラメータ t に依らないことが以下の素朴な計算から導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dZ(t)}{dt} &= - \int \mathcal{D}\phi \delta V \exp[-S[\phi] - t\delta V] \\ &= - \int \mathcal{D}\phi \delta (V \exp[-S[\phi] - t\delta V]) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで2番目の等式では、作用 S が δ に対して不変であること、及び V が $\mathcal{L}_B = \delta^2$ に対して不変であることを用いた。また最後の等式では、理論がコンパクト多様体上に定義されている場合、表面項が0になることを用いた。

以上より、 $Z(t)$ は t に依らないため、元の分配関数 $Z(0)$ と任意の t での $Z(t)$ は同値であることが分かる。そこで、変形された分配関数 $Z(t)$ について、 $t \rightarrow \infty$ 極限を考えてみよう。この極限では、場 ϕ に関する経路積分 $\mathcal{D}\phi$ を、鞍点近似により評価することが出来る。例えば、Q-厳密項 δV のボゾン部分 $(\delta V)_B$ に最小値が存在し、これが原点に規格化されていたとすると、経路積分の値は $t \rightarrow \infty$ 極限で

$$(\delta V)_B = 0, \quad (2.10)$$

に局在する。従ってこの方程式の解の周りで鞍点近似を行えば、 $Z(t)$ は積分の実行から元の分配関数よりも簡約化されると期待出来る。

以上の手順を形式的にまとめたものが、以下の式である。

$$Z = Z(0) \underset{\frac{dZ(t)}{dt}=0}{=} Z(t) \underset{\frac{dZ(t)}{dt}=0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t). \quad (2.11)$$

このように、局所化によって簡約化された球面 S^3 上の分配関数は、 S^3 分配関数と呼ばれる。

さて、先行研究 [16, 17, 48, 49] では、以上の局所化のアイデアを用いて S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論の簡約化が行われた。以下では CSM 理論の S^3 分配関数がどのような形式で与えられるかについて、 $\mathcal{N} = 2$ pure $U(N)$ CS 理論と ABJM 理論の場合で紹介しよう。具体的に、式 (2.1) 等からどのように S^3 分配関数が導かれるかについての詳細な計算は、原論文 [16, 17] やレビュー文献 [28, 50] を参照して頂きたい。

超対称 CSM 理論の中で、最も単純な $\mathcal{N} = 2$ pure $U(N)$ CS 理論の S^3 分配関数は

$$Z_{U(N)_k \text{CS}}(N, k) = \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \frac{du_i}{2\pi} e^{-\frac{k}{4\pi i} \sum_i u_i^2} \prod_{i < j}^N \left[2 \sinh \frac{u_i - u_j}{2} \right]^2, \quad (2.12)$$

と与えられる [51, 16, 17]。元の分配関数 (2.1) と比較すると、局所場の理論における経路積分から、単なる N 自由度の数に関する有限積分に次元還元されている点が大きな違いである。

ABJM 理論への一般化に備えて、式 (2.12) の各部分が、局所化の手順で何を評価した結果に相当するのかを述べておく。まず u_i , ($i = 1, \dots, N$) は、元の分配関数 (2.1) では $N \times N$ 行列スカラー補助場 σ の固有値に相当する。固有値 u_i に関して Gaussian 型で与えられる指数関数部分は、鞍点近似 $t \rightarrow \infty$ の下での理論の作用 $S_g(2.1)$ の古典解である。古典解であるにも関わらず、 N 個の行列固有値 u_i , ($i = 1, \dots, N$) に関する定数積分が残っているのは、Q-厳密項 δV の最小値を特徴付ける式 (2.10) が、有限個の定数モジュライ (moduli) を持った解を与えるからである。また \sinh 型で与えられた部分は、ゲージ場の

作用について鞍点近似 $t \rightarrow \infty$ を取った時の古典解からの揺らぎを評価した 1 ループ行列式に相当する。

ABJM 理論の場合に移ろう。ABJM 理論の S^3 分配関数は

$$Z_{\text{ABJM}}(N, k) = \frac{1}{(N!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \frac{d\mu_i}{2\pi} e^{-\frac{k}{4\pi i} \mu_i^2} \prod_{j=1}^N \frac{d\nu_j}{2\pi} e^{\frac{k}{4\pi i} \nu_j^2} \frac{\prod_{i < j}^N [2 \sinh \frac{\mu_i - \mu_j}{2}]^2 \prod_{i < j}^N [2 \sinh \frac{\nu_i - \nu_j}{2}]^2}{\prod_{i,j=1}^N [2 \cosh \frac{\mu_i - \nu_j}{2}]^2}, \quad (2.13)$$

と与えられる [16, 17]。pure $U(N)$ CS の場合と同様、積分変数 μ_i, ν_j , $(i, j = 1, \dots, N)$ は、ゲージ群 $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ に関する各スカラー補助場 σ の固有値である。指数関数部分は各ゲージ群の作用の古典解である。sinh 項もまた、ゲージ項に関する古典解からの揺らぎの 1 ループ行列式である。一方で、式 (2.12) の場合には無い cosh 型で与えられた分母の項は、各ゲージ群について基本表現を取る 4 個の物質場の 1 ループ行列式に相当する。

以上のように、局所化を用いると S^3 上の $\mathcal{N} \geq 2$ CSM 理論は比較的単純な有限次元積分に還元される。これら積分は、次章で紹介する行列模型と呼ばれる系に構造がよく似ていることから Chern-Simons (CS) 行列模型と呼ばれる。

本研究では、この CS 行列模型の 'tHooft 極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda := N/k$: 固定) に着目する。式 (2.12) や式 (2.13) を眺めると、有限次元積分まで還元されたことは良いが、まだ未完遂の積分が残っている。これを、超弦理論の低エネルギー極限と関係するラージ N 極限 (2.5) で評価するには、どうしたら良いだろうか。実はこの解析には、研究 [19] によって整備された行列模型のラージ N 極限を評価する手法が上手く応用可能であることが知られている。従って次章では、CS 行列模型のラージ N 極限を評価する準備として、研究 [19] とそれに続く進展によって整備された行列模型の解析法を紹介する。

第3章 行列模型のラージ N 極限

本章では、CS 行列模型のラージ N 極限を調べる上で基礎となる行列模型の解析手法を紹介しよう。まず節 3.1 では、行列模型の中で最も単純な Hermitian 行列模型を導入する。節 3.2 では、行列模型のラージ N 極限に関する Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber らによる研究 [19] を紹介する。節 3.3 では、節 3.2 で紹介した一般論に従って、簡単な例題である Gaussian 型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型のラージ N 極限を評価した結果を記載する。

なお本章における補足的な計算は、付録 A にまとめた。更に付録 B には、幾つかの例題を解析した結果を記載した。特に節 B.3 では、私達の研究 [27] に基づいて、カスプ型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型の臨界現象を調べた結果をまとめた。

また本章、及び本章に関連する付録 A, 付録 B の内容は、文献 [29, 52, 53, 98] に基づく。

3.1 Hermitian 行列模型

行列模型 (matrix model) とは、行列を基本変数とする 0 次元場の理論の総称である。“0 次元”とは場の局所自由度が存在しないことに相当し、従ってこの理論における経路積分は通常の数に関する有限次元積分である。また局所自由度が存在しないためにこの理論には運動項が存在せず、作用はポテンシャル項のみで構成される。

最も単純な $N \times N$ Hermitian 行列 M を変数とする 1 行列模型の分配関数、及び自由エネルギーは

$$Z_N := \int dM \exp [-N \operatorname{Tr} V(M)], \quad F := -\log Z_N, \quad (3.1)$$

と与えられる。変数行列に関する積分測度 dM は

$$\int dM := \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dM_{ii} \prod_{i < j}^N d\operatorname{Re} M_{ij} d\operatorname{Im} M_{ij}, \quad (3.2)$$

と定義されている。これは任意の並進 $M_{ij} \rightarrow M_{ij} + \epsilon_{ij}$ に対して不変な測度である。行列 M によって記述される任意の物理量 $\mathcal{O}(M)$ の真空期待値は、通常の場合の理論と同様に

$$\langle \mathcal{O}(M) \rangle := \frac{1}{Z_N} \int dM \mathcal{O}(M) \exp [-N \operatorname{Tr} V(M)], \quad (3.3)$$

と与えられる。

この模型は Hermitian 行列模型と呼ばれる。Hermitian 行列模型 (3.1) 自身も、ラージ N 極限で非臨界弦理論と呼ばれる弦理論と対応関係にあることが知られている。この対応関係の詳細については、文献 [98] に記載された内容と参考文献に挙げられた論文を参照して頂きたい。本論文における本章の内容は、CS 行列模型の解析を見越した準備という位置付けであるため、行列模型のラージ N 極限における技術的な側面に絞って記載する。

さて N^2 自由度の積分 (3.1) は、一般的なポテンシャルを持つ場合には解析的に評価することが難しい。ところがラージ N 極限では、任意の多項式型ポテンシャル

$$V(M) = \sum_{k \geq 0} \frac{g_k}{k} M^k, \quad (3.4)$$

を持つ行列模型の場合で、自由エネルギーを評価する一般論が Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber らによる研究 [19] によって与えられている。ここで g_k , ($k = 0, 1, \dots$) は、結合定数に相当する任意パラメータである。

以下では、研究 [19] に基づいて積分 (3.1) の評価法を紹介する。後で示すように、これは CS 行列模型 (式 (2.12) や式 (2.13)) の解析にも応用が可能である。まず積分 (3.1) の被積分関数は、

$$\exp[-N \text{Tr} V(M)] = \exp \left[-N \sum_{i=1}^N V(z_i) \right],$$

と書き換えることが出来る。ここで z_i , ($i = 1, \dots, N$) は Hermitian 行列 M の固有値で、実数の変数である。積分測度 dM は、今のように被積分関数が行列の固有値にのみ依る場合、適当なゲージ固定を行って固有値積分以外の自由度を先に積分してしまうことで

$$dM \propto \prod_{i=1}^N dz_i \Delta^2(\{z_i\}), \quad \Delta(\{z_i\}) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j), \quad (3.5)$$

と厳密に変形可能である。ここで $\Delta(\{z_i\})$ は、Vandermonde 行列式と呼ばれる。また、 α は物理量の真空期待値 (3.3) を評価する際には関係してこない分配関数の定数倍部分を見捨てたという意味である。式 (3.5) の導出については、付録 A.1 に記載した。

以上より、分配関数 (3.1) は N^2 自由度の積分から、 N 自由度の積分

$$\begin{aligned} Z_N &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dz_i \Delta^2(\{z_i\}) \exp \left[-N \sum_{i=1}^N V(z_i) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dz_i \exp [-N^2 S_{\text{eff}}(\{z_i\})], \end{aligned} \quad (3.6)$$

に厳密に還元されることが分かる。この 2 行目で導入した有効作用 $S_{\text{eff}}(\{z_i\})$ は

$$S_{\text{eff}}(\{z_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(z_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \log |z_i - z_j|, \quad (3.7)$$

である。この有効作用を眺めると、第1項目が各固有値 z_i ($z = i, \dots, N$) に対するポテンシャル項の役割を果たしていることが分かる。この項を、本論文では“古典”ポテンシャルと呼ぶ。一方で、Vandermonde 行列式由来の第2項目は、異なる固有値間の2体相互作用として働くことが分かる。1つの固有値が第2項目の相互作用部分も含めて実際に感じることになるポテンシャルを、本論文では“有効”ポテンシャルと呼ぶことにする。

これとよく似た構造を CS 行列模型も持っていることに気付く。例えば pure $U(N)$ CS 行列模型 (2.12) を見直してみると、積分変数 u_i , ($i = 1, \dots, N$) が行列固有値の役割を果たしていることが分かる。pure $U(N)$ CS 行列模型に関する有効作用は

$$S_{\text{eff}}^{\text{pure } U(N) \text{ CS}}(\{u_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{4\pi i \lambda} - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \log \left(2 \sinh \frac{u_i - u_j}{2} \right), \quad (\lambda := N/k), \quad (3.8)$$

と与えられる。第1項目は、Gaussian 型で与えられる固有値 u_i に関する古典ポテンシャル項である。一方で sinh 項は、Hermitian 行列模型と関数形が異なるものの、固有値間の2体相互作用項として働いている。このように Hermitian 行列模型は CS 行列模型と非常によく似ており、同じ解析手段によって評価出来そうであることが見て取れる。

3.2 ラージ N 極限

ラージ N 極限とは、理論が持つパラメータ N について $N \rightarrow \infty$ を取って、結合定数 g_k については任意の値のまま自由エネルギー等の物理量を評価する手法である。この手法を用いる大きな利点の1つは、通常の場合の理論の解析で行う結合定数 g_k に関する弱結合摂動展開では評価が出来ない強結合領域 $g_k \gg 1$ における物理量の評価が可能となる点である。この意味で、 $1/N$ 展開法は場の理論の非摂動的手法の1つに数えられる。

今、積分 (3.6) を見れば分かるように、有効作用は N^2 によってスケール倍されている。有効作用 S_{eff} (3.7) 自身は、和記号 $\sum_{i=1}^N$ を素朴に $\mathcal{O}(N)$ であると見積もると、ポテンシャル項と相互作用項共にラージ N 極限で $\mathcal{O}(N^0)$ であることが分かる。従って $N \rightarrow \infty$ では、積分の評価において鞍点近似が有用である。鞍点方程式は、有効作用 (3.7) に対する微分から

$$\frac{dS_{\text{eff}}(\{z_i\})}{dz_i} = 0, \quad \rightarrow \quad V'(z_i) = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{z_i - z_j}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.9)$$

と与えられる。この式を見ると、Vandermonde 行列式由来の右辺が固有値間の斥力として働いていることが分かる。各固有値に対する古典ポテンシャル $V(z_i)$ は共通であるため、全ての固有値はこのポテンシャルを最小化する鞍点 $V'(z_i) = 0$ に近づく。ところが古典的な鞍点の近傍では固有値間の斥力が強く働くため、 N 本の方程式 (3.9) を同時に解くと、

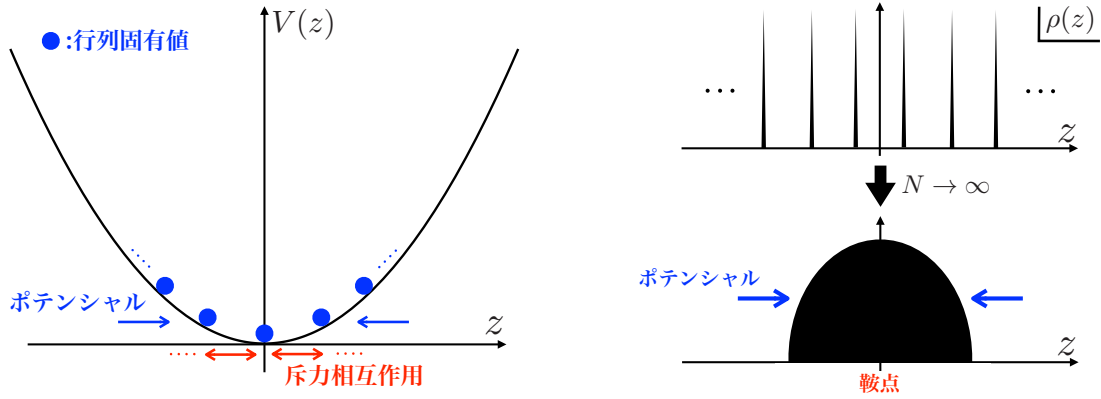


図 3.1: (左図:) ポテンシャル $V(z)$ 中の固有値 z_i , ($i = 1, \dots, N$) の分布。ポテンシャル $V(z)$ が固有値を全て鞍点 $V'(z) = 0$ 近傍に集積させるが、固有値間に斥力相互作用が働き、 $\mathcal{O}(1/N)$ ぐらいの適当な距離を持って配位する。(右図:) 固有値密度 $\rho(z)$ の連続関数化。ラージ N 極限では固有値間の $\mathcal{O}(1/N)$ の隔たりは見えなくなって連続関数化する。

これら固有値は $\mathcal{O}(1/N)$ ぐらいの適当な距離を保って配位すると考えられる。簡単のため、古典的な鞍点がただ1つしかない場合の固有値の分布を図 3.1 左に記載した。

一般に、 N 本の方程式 (3.9) を同時に解くことは難しい。しかしそのラージ N 極限での固有値の振る舞いを調べることは、以下の固有値スペクトル密度関数を導入することで可能である。

$$\rho(z) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(z - z_i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) dz = 1. \quad (3.10)$$

この規格化は、定義から簡単に確かめることが出来る。 $\rho(z)$ は、各固有値がラージ N 極限で鞍点近傍に局在する特徴から、この極限では有限領域に台 (support) をもった連続関数として振る舞うと考えられる。これもまた、簡単のため鞍点が1つしかない場合で図 3.1 右に記載した。

さて、固有値密度 $\rho(z)$ を用いると鞍点方程式 (3.9) は

$$V'(z) = 2P \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho(w)}{z - w} dw, \quad (z \in \mathcal{C}), \quad (3.11)$$

と書き換えられる。ここで P は $w = z$ の特異点からの寄与を除いた、積分の主値を取るという意味である。また \mathcal{C} は各固有値がラージ N 極限で配位する領域を特徴付けており、すなわち固有値密度 $\rho(z)$ の台である。このようにして N 本の方程式 (3.9) を同時に解く問題は、連続関数 $\rho(z)$ についての積分方程式 (3.11) を解く問題へと帰着する。

3.2.1 自由エネルギー

見通しを良くするために、固有値密度 $\rho(z)$ が方程式 (3.11) から導出された際に、自由エネルギーがどのように与えられるのかを先に明らかにしておく。

まずは簡単のため、方程式 (3.11) の解がユニークである場合を考える。分配関数 (3.6) の積分について鞍点近似を行うと、積分の結果はラージ N 極限で鞍点での被積分関数の値に局在する。従って自由エネルギーは

$$F = -\log Z_N \approx N^2 \left[\int_C dz \rho(z) V(z) - P \int_C dz \rho(z) \int_C dw \rho(w) \log |z - w| \right] + \dots, \quad (3.12)$$

と得られる。¹この \dots 部分は古典ポテンシャル内のパラメータ g_k に依らない定数部分、及び $1/N$ 展開の高次補正である。以上のように、固有値密度 $\rho(z)$ がラージ N 極限のもとで得られれば、鞍点近似で自由エネルギーのリーディングを解析的に求めることが出来る。またここでは無視した $1/N$ 展開の摂動補正も、自由エネルギーのリーディングを解いた情報から漸化的に評価することが出来ることが、研究 [54] によって知られている。

なお固有値密度 $\rho(z)$ に関する矛盾ない解が複数ある場合、よく知られた鞍点近似の一般論に従って各々の解からの寄与を足し上げることが必要である。例えば $\rho(z)$ の解が2種類あって、これらからの寄与がそれぞれ $Z_N^{(1)} = e^{-F_{(1)}}$, $Z_N^{(2)} = e^{-F_{(2)}}$ と与えられる場合を考えてみよう。解がユニークである場合の自由エネルギー (3.12) との類推から、各々の寄与から評価される自由エネルギーは $F_{(1)}, F_{(2)} \sim \mathcal{O}(N^2)$ である。今、与えられた結合定数で自由エネルギーが $F_{(1)} < F_{(2)}$ の関係にあるとすると、全自由エネルギー F は

$$F \approx -\log \left(Z_N^{(1)} + Z_N^{(2)} \right) = F_{(1)} - \log \left(1 + e^{-(F_{(2)} - F_{(1)})} \right) \approx F_{(1)} + \mathcal{O} \left(e^{-(F_{(2)} - F_{(1)})} \right), \quad (3.13)$$

と評価することが出来る。これは解 (1) からの寄与が解 (2) からの寄与に対してラージ N 極限で支配的であることを示す。一方で解 (2) からの寄与は、支配的な解からの寄与 $F_{(1)}$ に対する指数関数的な補正である。この議論は、解が3種類以上ある場合への一般化も可能である。以上のように、解がユニークでない場合でも各々の自由エネルギーの大小関係を比較することでラージ N 極限のリーディングに効いてくる解を判別し、評価することが可能である。

また理論のパラメータ g_k を変化させていくと、大小関係 $F_{(1)} < F_{(2)}$ が変化する可能性がある。仮にある臨界点で、大小関係が $F_{(1)} > F_{(2)}$ に切り替わったとすると、式 (3.13) において解 (1) と解 (2) の役割が入れ替わる。 $F_{(1)} = F_{(2)}$ となる臨界点では、ラージ N 極限での自由エネルギーのリーディングの形状が理論のパラメータの関数として不連続的に変化する。このような現象は、ラージ N 相転移 (large- N phase transition) と呼ばれる。

¹積分 (3.12) は直接計算しても評価することが可能であるが、固有値密度の規格化に関する Lagrange 未定乗数を用いると更に簡単化されることがよく知られている。これは実際に固有値密度を導出した後、自由エネルギーを評価するにあたって計算を簡単にする非常に便利な手順であるため、付録 A.3 に補足として記載した。

3.2.2 リゾルヴェントの方法

さて、この小節では鞍点方程式 (3.11) の解法を紹介する。この方程式を解くには、リゾルヴェント (resolvent) と呼ばれる以下の連続関数を定義するのが便利である。

$$W(z) := \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho(w)}{z-w} dw. \quad (3.14)$$

リゾルヴェントは、 $z \in \mathcal{C}$ において連続的な特異性、すなわち分岐 (branch cut) を持つ関数である。複素解析における公式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{z-w \pm i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{z-w} \mp i\pi\delta(z-w), \quad (3.15)$$

を用いると、リゾルヴェントは定義 (3.14) から

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(z \pm i\epsilon) = \text{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho(w)}{z-w} dw \mp i\pi\rho(z), \quad (z \in \mathcal{C}), \quad (3.16)$$

を満たす。従って、鞍点方程式 (3.11) はリゾルヴェントを用いて

$$V'(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [W(z+i\epsilon) + W(z-i\epsilon)], \quad (z \in \mathcal{C}), \quad (3.17)$$

と書くことが出来る。一方で、固有値密度 $\rho(z)$ は

$$\rho(z) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [W(z+i\epsilon) - W(z-i\epsilon)], \quad (z \in \mathcal{C}), \quad (3.18)$$

と書くことが出来る。この形式から、固有値密度 $\rho(z)$ はリゾルヴェント $W(z)$ の分岐近傍における分岐の不連続性から読み取ることが出来ると分かる。

またリゾルヴェント $W(z)$ は、定義 (3.14) から漸近条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \frac{1}{z} + \dots, \quad (3.19)$$

を満足する関数である。

ポテンシャルが多項式型 (3.4) で与えられる場合、リゾルヴェントの分岐 \mathcal{C} の構造を指定すると、鞍点方程式 (3.17) を満たす解が積分形式で与えられることが、Migdal の研究 [55] により知られている。

リゾルヴェント $W(z)$ が、 l 個の分岐 $[a_j, b_j]$, ($j = 1, \dots, l$) を持つ関数であるとする。これは図 3.2 左のような、 l 個の古典的な鞍点近傍にそれぞれ幾つかの固有値が貯まっている一般的な解であり、マルチカット解 (multi-cut solution) と呼ばれる。図 3.2 左で表したように、各鞍点近傍にはそれぞれ N_j , ($j = 1, \dots, l$) 個の固有値が貯まっているとし、規格化 $N = \sum_{j=1}^l N_j$ を満たしているとする。マルチカット解の積分形式で与えられた解は

$$W(z) = \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dw}{4\pi i} \frac{V'(w)}{z-w} \prod_{j=1}^l \sqrt{\frac{(z-a_j)(z-b_j)}{(w-a_j)(w-b_j)}}, \quad (3.20)$$

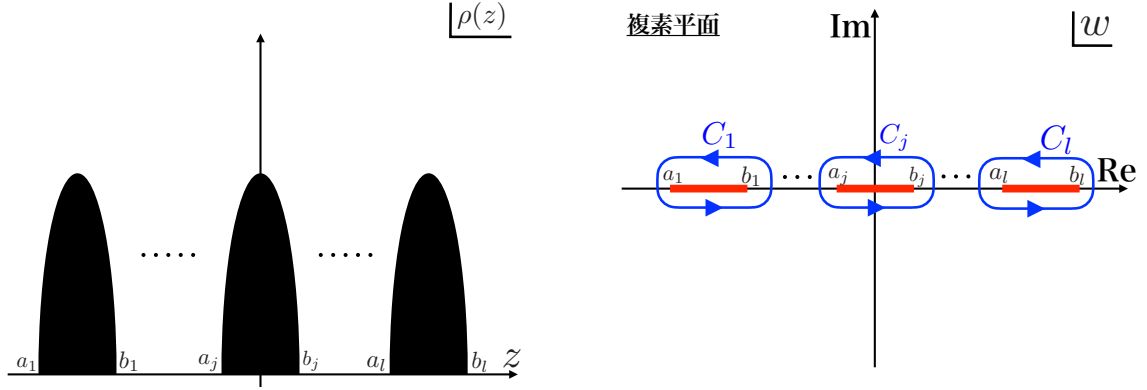


図 3.2: (左図:) マルチカット解 (3.20) の固有値の分布。各分岐 $[a_j, b_j]$, $(j = 1, \dots, l)$ に N_j 個の固有値が集積している。(右図:) 積分 (3.20) の積分経路。積分経路は、被積分関数の各分岐を反時計回りに一周した経路の和で与えられる。

である。²ここで C_j は、図 3.2 右で描かれているような分岐 $[a_j, b_j]$ を反時計回りに一周する閉経路である。Migdal の積分形式 (3.20) の導出については、付録 A.2 に記載した。

また Hermitian 行列模型のラージ N 極限における解析手段を最初に構成した研究 [19] では、Migdal 積分形式を用いずに、 $W(z)$ から作られる関数の正則性と漸近条件から解を導出する方法が用いられた。この手法もまた、リゾルヴェント $W(z)$ を導く手法として標準的であるので、付録 D.1 に記載した。

Migdal 積分形式 (3.20) を用いた方法に戻ろう。積分形式の解 (3.20) には、 $2l$ 個の未定値 a_j, b_j , $(j = 1, \dots, l)$ が含まれている。この未定値の決定には、まず漸近条件 (3.19) を積分形式の解 (3.20) に要請する。すると、ここから $(l + 1)$ 個の条件式

$$\delta_{kl} = \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dw}{4\pi i} \frac{w^k V'(w)}{\prod_{j=1}^l \sqrt{(w - a_j)(w - b_j)}}, \quad (k = 0, \dots, l), \quad (3.21)$$

が導出される。

残った未定値を決定する条件式は、各鞍点近傍での固有値の充填量が矛盾無く

$$\frac{N_j}{N} = \int_{a_j}^{b_j} \rho(z) dz = \frac{i}{2\pi} \oint_{C_j} W(z) dz, \quad (j = 1, \dots, l), \quad (3.22)$$

と与えられることを課すことで得られる。ここで注意することは、この条件式は一見 l 個の独立な式を与えているが、条件式 (3.22) を全て足し上げると固有値全部の規格化条件と等価であるため、それは無限遠における条件式 (3.21) の $k = l$ の場合と等価な条件である

²Migdal の積分形式 (3.20) を用いて可能な解を評価し尽くしたい時、可能なマルチカット解の分岐の数 l が幾つまでであるか知っておきたい。通常多項式型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型の場合、分岐は古典的な鞍点の近傍にのみ作ることが可能なので、古典的な鞍点 $V'(z) = 0$ の数と可能な l の最大値は一致する。また CS 行列模型の場合だと、Hermitian 行列模型とは異なる相互作用項の効果で古典的な鞍点と無関係な位置に分岐が出来る解が存在し、可能なマルチカット解が無数に拡張される [21, 22]。これは第 4 章にて詳しく議論しよう。

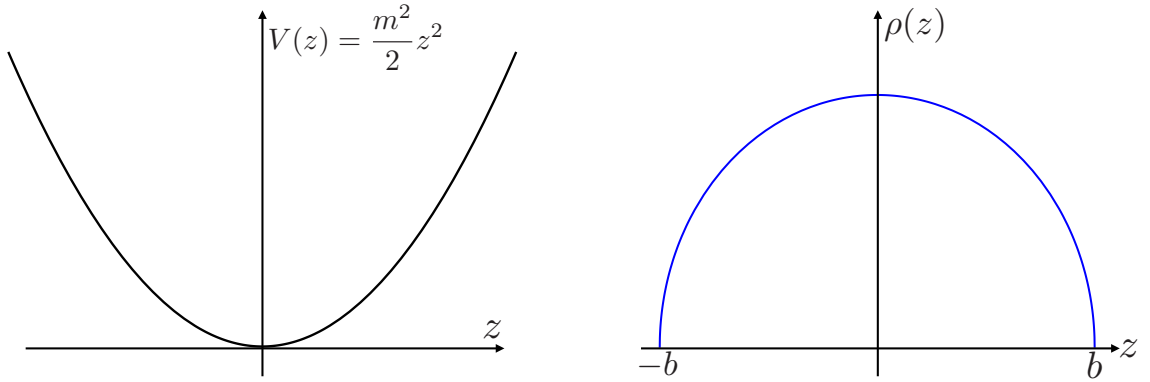


図 3.3: (左図:) Gaussian 型ポテンシャル (3.23)。 (右図:) Gaussian 型ポテンシャルの問題で導かれる固有値密度 (3.26)。 ラージ N 極限での、この振る舞いは Wigner の半円則と呼ばれる。

という点である。従って条件 (3.22)、(3.21) から現れる独立な条件式は $(l+1) + l - 1 = 2l$ 個である。

以上のように、境界条件を適切に要請することで $2l$ 個の未定値 $a_j, b_j, (j = 1, \dots, l)$ を過不足無く決定することが可能である。

このようにしてリゾルヴェント $W(z)$ を、適当な仮定のもとで完全に決定することが出来る。 $W(z)$ が導出された後には、関係式 (3.18) を用いて、連続関数になめされた固有値密度 $\rho(z)$ が評価可能である。またこの $\rho(z)$ を用いると、式 (3.12) の積分の実行から自由エネルギーのラージ N 極限での値を評価することが出来る。

なお、最初に述べたように Hermitian 行列模型の場合は行列固有値が実数である。従って導出された固有値密度 $\rho(z)$ がラージ N 極限での解として矛盾無いためには、正值性 $\rho(z) \geq 0$ が成り立っていないといけない。正值性を満たさない解は、固有値密度 $\rho(z)$ の定義 (3.10) と矛盾するため、鞍点方程式の解としては認められない。

3.3 例題： Gaussian 型ポテンシャル

この節では、前節の一般論に従ってラージ N 極限を評価した簡単な例題を紹介しよう。付録 B には、この節で紹介する例題よりやや複雑な幾つかの例題を解析した結果を記載したので、興味に合わせて参照せよ。特に節 B.3 では、私達の研究 [27] に基づいて、カस्प型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型の臨界現象を調べた結果をまとめた。

さて、本文中では最も基本的な例題として図 3.3 左に記載した Gaussian 型ポテンシャルの場合

$$V(z) = \frac{m^2}{2}z^2, \quad V'(z) = m^2z, \quad (m > 0), \quad (3.23)$$

を紹介する。このポテンシャルを持つ行列模型はランダム行列模型とも呼ばれ、素粒子物理学に限らない様々な理論物理学への応用があることが知られている [53]。³

このポテンシャルの古典的な鞍点は $z = 0$ 唯一であるため、課すべき Migdal 積分形式はワンカット解である。またポテンシャルの形状が持つ原点对称性から、明らかに分岐の端点 a, b は $a = -b$ を満足する。従って、この仮定の下で Migdal 積分形式 (3.20) を課せば、リゾルヴェントは

$$\begin{aligned} W(z) &= \oint_C \frac{dw}{4\pi i} \frac{m^2 w}{z - w} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{w^2 - b^2}} \\ &= \frac{m^2 z}{2} - \frac{m^2}{2} \sqrt{z^2 - b^2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

と評価することが出来る。⁴積分経路 C は分岐 $[-b, b]$ を反時計回りに一周する閉経路である。残る未定値 b は漸近条件 (3.19) から

$$b = \frac{2}{m}, \quad (3.25)$$

と得られる。また固有値密度 $\rho(z)$ は、関係式 (3.18) より

$$\rho(z) = \frac{m^2}{2\pi} \sqrt{b^2 - z^2}, \quad (z \in [-b, b]), \quad (3.26)$$

と読み取ることが出来る。図 3.3 右には、固有値密度 (3.26) の概形をプロットした。ランダム行列模型の固有値密度が、ラージ N 極限で有限領域 $[-b, b]$ に半円的に分布するこの現象は、Wigner の半円則 (Wigner's semi-circle law) と呼ばれる。

自由エネルギーは鞍点近似の下では、積分 (3.12) の実行から評価出来る。固有値密度 (3.26) を用いると、Gaussian 型ポテンシャルを持つ行列模型の自由エネルギーはラージ N 極限のリーディング $\mathcal{O}(N^2)$ までで

$$F = -\log Z_N \approx N^2 \left[\frac{3}{4} + \log m \right] + \dots, \quad (3.27)$$

と得られる。

以上により、練習問題も含めて本研究の内容に関する技術的な側面の紹介が済んだ。ここで第 2 章で導出した CS 行列模型を改めて見直してみよう。式 (3.8) で紹介したように、pure $U(N)$ CS 行列模型 (2.12) に残された N 次元定数積分は、Hermitian 行列模型と非常によく似た形式になっており、本章で学んだラージ N 極限の解析手段が適用出来そうであることが見て取れる。次章では、まず pure $U(N)$ CS 行列模型 (2.12) の場合にこの手法を適用した私達の研究結果を紹介する。

³本論文では練習のためにラージ N 極限を取って評価した結果を記載するが、ランダム行列模型 (3.23) は有限の N で厳密に評価することが可能な行列模型の 1 つである。

⁴この形式の周回積分の評価には、多くの場合、Cauchy の定理を用いた積分路の変更が有用である。分岐 $w \in [-b, b]$ を囲む閉経路を無限遠まで広げることを考える。するとこの積分は、 $w = z$ 及び $w = \infty$ 周りの特異点を、留数定理を用いて評価する問題に帰着する。

また本章で紹介した $1/N$ 展開法は、pure $U(N)$ CS 行列模型だけでなく、更に複雑な ABJM 行列模型 (2.13) にも適用が可能である。第 5 章では、ABJM 行列模型 (2.13) にこれを適用した私達の研究結果を示す。

第4章 pure $U(N)$ Chern-Simons 行列 モデルのマルチカット解

以上により、CS 行列モデルのラージ N 極限を解析する準備が整った。本章では、CS 行列モデルの中で最も単純な pure $U(N)$ CS 行列モデルのラージ N 極限に着目する。pure $U(N)$ CS 行列モデルは、第3章で学んだ Hermitian 行列モデルとよく似たモデルであるが、その鞍点方程式を解いてみると Hermitian 行列モデルには現れない様々なマルチカット解が存在する。本研究では、この解がどのような機構で現れるのかを明らかにし、次に様々な見つかる解を分類しながら一般解の系統的な構成法を提案する。

4.1 Hermitian 行列モデル vs. Chern-Simons 行列モデル

第2章の式 (2.12) で紹介したように、pure $U(N)$ CS 行列モデルの分配関数及び自由エネルギーは、以下で与えられる。

$$Z_N = \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \frac{du_i}{2\pi} e^{-\frac{N}{4\pi i \lambda} \sum_i u_i^2} \prod_{i < j}^N \left[2 \sinh \frac{u_i - u_j}{2} \right]^2, \quad F := -\log Z_N. \quad (4.1)$$

ここで $k \in \mathbb{Z}$ は CS 準位で、 $\lambda := N/k$ は 'tHooft 結合定数である。定義から、'tHooft 結合定数 λ は実数である。また $\lambda < 0$ の分配関数は、形式 (4.1) から $\lambda > 0$ の場合の分配関数の複素共役であることが分かる。従って本章では、'tHooft 結合定数 λ は正の実数の場合のみを考える。

この分配関数は、Gaussian 型ポテンシャル (3.23) を持つ Hermitian 行列モデルの分配関数 (3.6) と非常によく似ている。唯一の違いは、Vandermonde 行列式から得られる固有値間の相互作用部分である。しかしこの相互作用もまた、固有値 u_i と u_j が十分に近い極限では

$$2 \sinh \frac{u_i - u_j}{2} \approx (u_i - u_j) + \mathcal{O}((u_i - u_j)^3),$$

と働くため、Hermitian 行列モデルの Vandermonde 行列式の場合とよく似た斥力的な寄与をもたらすと考えられる。

実はこの分配関数 (4.1) の積分は、任意の λ, N について厳密計算が可能であることが研究 [16, 56] によって知られている。ところが、このモデルの 'tHooft 極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda$: 固定)

を取ると、ラージ N インスタントン (large- N instanton) の存在など、非自明な特徴が存在することが幾つかの研究 [25, 57, 58, 59, 60, 61] によって報告されている。¹ラージ N インスタントンに関する基礎的な事項は、付録 C を参照して頂きたい。また分配関数 (4.1) の厳密計算については、付録 E に補足として記載した。

さて本研究でも、この分配関数の積分について 'tHooft 極限を取り、Hermitian 行列模型の場合と同様に鞍点近似で評価することを考えてみよう。鞍点方程式は

$$\frac{u_i}{\pi i \lambda} = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i}^N \coth \frac{u_i - u_j}{2}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (4.2)$$

と与えられる。この方程式のラージ N 極限での 1 つの解析解は、固有値が原点の周りに貯まるワンカット解であることが研究 [23, 24, 25] により知られている。また有限の N でこの分配関数を計算した研究 [16, 56] との比較から、このワンカット解はラージ N 極限で積分に最も支配的に効いてくる解であることも分かっている。

では、果たして鞍点方程式 (4.2) の解はユニークだろうか。Hermitian 行列模型の場合を思い出してみると、左辺は Gaussian 型ポテンシャルで古典的な鞍点は原点のみなので、解は一見ワンカット解唯一であると考えられる。ところがこの方程式 (4.2) の解はユニークでは無く、それどころかこれには無限個の解が存在する。図 4.1 には、鞍点方程式 (4.2) を Newton 法と呼ばれる手法で数値的に解いた際に見つかる様々な解の一部を記載した。² 図 4.1 左上は、先行研究 [23, 24, 25] によってよく知られたワンカット解である。一方で、その他の解は固有値が複数の領域にそれぞれ蓄積したマルチカット解である。

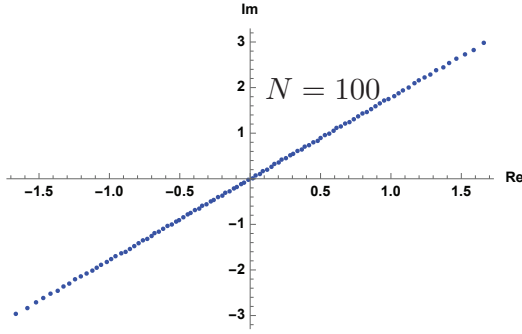
このようなマルチカット解が、鞍点近似をした際に積分 (4.1) に効いてくる配位であるかどうか、明確な回答は無い。しかしこれらが鞍点方程式 (4.2) の解として存在する以上、Hermitian 行列模型の例で紹介した式 (3.13) のようにワンカット解からの指数関数的な補正として効いてくる可能性はあると考えられる。また双対な重力理論があるとすれば、鞍点方程式の各解は、異なる重力解の存在と対応すると期待される。

このような無限個のマルチカット解は pure $U(N)$ CS 行列模型に限らない一般的な CS 行列模型に共通して現れる。ところがこれらの解は、確かに鞍点方程式の解であるにも関わらず解析解が未構成であり、その物理的な役割もまた明らかでは無い。

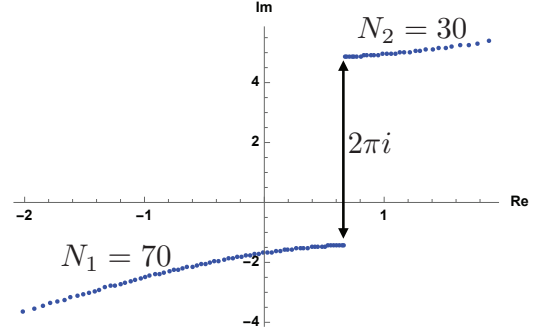
本研究 [21, 22] の目標は、これらマルチカット解の解析的な理解とこの物理的な役割を明らかにすることである。本章では、まず CS 行列模型の中でも最も単純な pure $U(N)$ CS

¹このような現象は、厳密計算が可能な幾つかの行列模型において同様に報告されている。例えば Gaussian 型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型は、厳密計算が可能な行列模型の 1 つであるが、そのラージ N 極限を調べると積分には効いてこないラージ N インスタントンが見つかることが、研究 [25] により知られている。また Gross-Witten-Wadia 行列模型 [62, 63, 64] もまた厳密計算が可能であるが、'tHooft 極限を取ると各相でラージ N インスタントンが存在することが最近の研究 [65, 66, 67] によって明らかになっている。

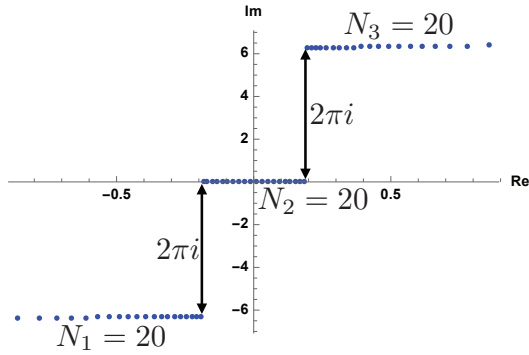
²鞍点方程式の数値解析には、数式処理ソフト Mathematica を用いて、先行研究 [68, 69, 70, 71] の解析を応用した。なお、CS 行列模型は鞍点方程式 (4.2) が実数のみで閉じた形式になっていないため、固有値 u_i ($i = 1, \dots, N$) が取る値が複素平面上に拡張されていることに注意せよ。



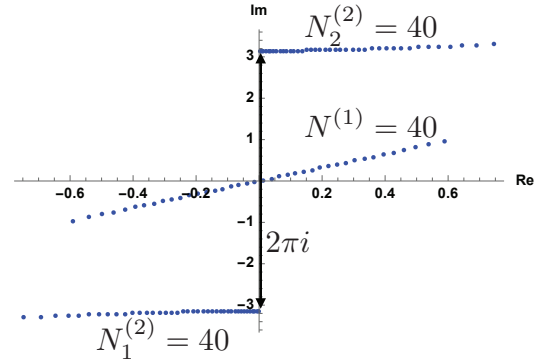
ワンカット解



ステップ型ツーカット解



ステップ型マルチカット解



ワンカット解とステップ型ツーカット解の重ね合わせ

図 4.1: pure $U(N)$ CS 行列模型の'tHooft 極限に現れる様々な固有値の配位。鞍点方程式 (4.2) を Newton 法を用いて数値的に評価した。Newton 法で入力が必要な、固有値 u_i の複素平面上での初期位置 (初期条件) を変えて解析を行うと、様々な配位が見つかる。

行列模型 (4.1) に着目する。特に、数値的に見つかるこの全てのマルチカット解の解析解の導出に、Migdal の積分形式 (3.20) を拡張した積分形式 (4.44) を用いることが有用であることを示す。そして構成された解析解が、図 4.1 で示した数値解析から得られる結果を全て再現することを示す。

さて、pure $U(N)$ CS 行列模型の場合で、数値解析から見つかるこれらマルチカット解には共通した特徴がある。それは、図 4.1 の矢印で表示したような各分岐間の $2\pi i$ の整数倍の変位である。このような分岐を持つ解を、本論文では“ステップ型”マルチカット解と呼ぶ。また図 4.1 右下のような、 $2\pi i$ の整数倍変位で全ての分岐が繋がらない解はステップ型マルチカット解の“重ね合わせ”と呼ぶことにしよう。この分類は、導出される解の分岐の構造と関係していることが後で分かる。

見通しを良くするために、本章の構成を記載しておく。まず節 4.2 では、第 3 章で学んだリゾルヴェントの方法で、pure $U(N)$ CS 行列模型の鞍点方程式 (4.2) を解く準備を行

う。次に節 4.3 では、先行研究 [23, 24, 25] によってよく知られたワンカット解の導出を紹介する。節 4.4 では、図 4.1 右上に示されたステップ型ツーカット解の解析解を構成した結果を記載する。節 4.5 では、ステップ型ツーカット解の拡張によって得られる図 4.1 左下のステップ型マルチカット解を構成する。更に節 4.6 では、ワンカット解とステップ型ツーカット解の重ね合わせによって特徴付けられる図 4.1 右下のような配位の解析解を構成する。以上の手順から、鞍点方程式 (4.2) の一般解を推察することが出来る。節 4.7 では、pure $U(N)$ CS 行列模型の 'tHooft 極限の一般解として積分形式 (4.44) を提案しよう。

4.2 準備

この節では、鞍点方程式 (4.2) をリゾルヴェントの方法を用いて評価する準備を行う。まず、便利のため新しい変数 $U_i := \exp(u_i)$ を導入する。鞍点方程式 (4.2) は、この座標系で

$$\log U_i = \frac{2\pi i\lambda}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{U_i + U_j}{U_i - U_j}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (4.3)$$

と与えられる。³Hermitian 行列模型の鞍点方程式 (3.9) と式 (4.3) を比較すると、変数変換 $U_i := \exp(u_i)$ を行ったことで、右辺が Hermitian 行列模型の相互作用項とより似てきたことが分かる。

研究 [28, 72] に従って、固有値密度 $\rho(Z)$ 及びリゾルヴェント $v(Z)$ を

$$\rho(Z) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(Z - U_i), \quad v(Z) := \int_{\mathcal{C}} dW \rho(W) \frac{Z + W}{Z - W}, \quad (4.4)$$

と定義する。ここで形式的に書かれた経路 \mathcal{C} は、複素平面上の固有値密度 $\rho(Z)$ の台である。鞍点方程式 (4.4) は、Hermitian 行列模型の場合と同様にリゾルヴェントを用いると

$$V'(Z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v(Z + i\epsilon) + v(Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}), \quad V'(Z) := \frac{1}{\pi i\lambda} \log Z, \quad (4.5)$$

と書ける。また固有値密度は台 \mathcal{C} 上で

$$\rho(Z) = -\frac{1}{4\pi i\lambda} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v(Z + i\epsilon) - v(Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}), \quad (4.6)$$

と与えられる。なお CS 行列模型の場合には、固有値 U_i の取る値が複素数に拡張されているため固有値密度 $\rho(Z)$ もまた一般に複素数である。

³ここで $\tilde{U}_i := U_i e^{-2\pi i\lambda}$ と置き直すと、これは Stieltjes-Wigert 行列模型と呼ばれる Hermitian 行列模型の鞍点方程式 $\frac{1}{\tilde{U}_i} \log \tilde{U}_i = \frac{4\pi i\lambda}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{\tilde{U}_i - \tilde{U}_j}$ と厳密に一致することが研究 [56] により知られている。本研究で使用する変数 $U_i := e^{u_i}$ [72] を用いる利点は、元の分配関数 (4.1) の変数 u_i における対称性 $u_i \rightarrow -u_i$ が、 $U_i \rightarrow 1/U_i$ と分かりやすく、後の計算が簡単化することである。

またリゾルヴェント $v(Z)$ は、定義 (4.4) から漸近条件

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} v(Z) = 1 + \dots, \quad \lim_{Z \rightarrow 0} v(Z) = -1 + \dots, \quad (4.7)$$

が課される。変数変換をする前の座標系 $z := \log Z$ では、これらは正負の異なる無限遠 $z \rightarrow \pm\infty$ での振る舞いに関する漸近条件に相当する。

以上より、解析解の導出に向けた準備は整った。次節では、Migdal 積分形式 (3.20) を用いる方法の拡張で、方程式 (4.5) を漸近条件 (4.7) の下で解くことを考える。

4.3 ワンカット解

この節では、研究 [23, 24, 25] によって示されたワンカット解の導出を紹介する。数値解析の結果では、図 4.1 左上の配位に相当する。この解の導出には幾つかの手法が知られているが、ここでは後のマルチカット解の解析で一般化がしやすい Migdal 積分形式の手法 [55] を用いる。Migdal 積分形式を用いない別の導出法は、補足 D.2 を参照せよ。

ポテンシャル $V(Z)$ (4.5) は、 $Z = 1 (z = 0)$ に古典的な鞍点を持つ。従って、この近傍に固有値が集積するワンカット解を構成することが出来る。固有値密度 $\rho(Z)$ が、 $Z = 1$ の近傍 $Z \in [A, B]$ に台を持つと仮定しよう。ただし端点は、 $|A| < |B|$ を満たすとする。すると、鞍点方程式 (4.5) のワンカット解は

$$v(Z) = \oint_{C_1} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A)(Z - B)}{(W - A)(W - B)}}, \quad (4.8)$$

と与えられる。ここで、 C_1 は $W \in [A, B]$ を複素平面上で反時計回りに一周する閉経路である。この経路積分を評価すると

$$v(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z}}{2} \right),$$

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad f_0 = \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}, \quad f_1 = \frac{2}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}, \quad (4.9)$$

である。⁴更に漸近条件 (4.7) を課すと、未定値である端点 A, B は

$$A = \exp(-2 \cosh^{-1}(e^{\pi i \lambda})), \quad B = \exp(2 \cosh^{-1}(e^{\pi i \lambda})) = 1/A, \quad (4.10)$$

と決定することが出来る。固有値密度 $\rho(Z)$ は、式 (4.6) を用いて

$$\rho(Z) = \frac{1}{4\pi^2 \lambda Z} \log \left(\frac{Z + \sqrt{AB} - i\sqrt{(Z - A)(B - Z)}}{Z + \sqrt{AB} + i\sqrt{(Z - A)(B - Z)}} \right), \quad (Z \in [A, B]), \quad (4.11)$$

⁴この評価には、研究 [73] によって行われた積分経路の変更が有用である。経路 C_1 を Cauchy の定理を用いて、 $W = Z$ の極と $W \in [-\infty, 0]$ を囲む閉経路へと変更すると、留数の評価及び対数の不連続性からワンカット解 (4.9) が導出出来る。

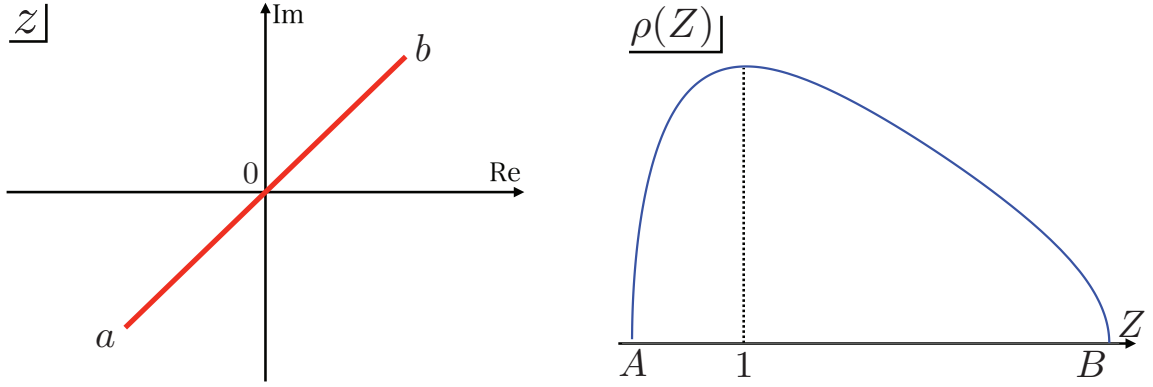


図 4.2: (左図:) ワンカット解 (4.9) における固有値密度 $\rho(Z)$ の概形。(右図:) z 平面における固有値の配位。 $A = e^a, B = e^b$ 及び a, b は、式 (4.12) で与えられる。

と与えられる。 A, B が実数である場合の、この固有値密度の概形を図 4.2 左にプロットした。また z 平面での固有値配位は、図 4.2 右の通りである。分岐の端点は、 z 平面では

$$b = \log B = 2 \cosh^{-1} (e^{\pi i \lambda}), \quad a = \log A = -2 \cosh^{-1} (e^{\pi i \lambda}), \quad (4.12)$$

である。

なお z 平面でこの配位を見た場合、実際の固有値は $z \in [a, b]$ のみに配位しているにも関わらず、リゾルベント $v(Z(z) = e^z)$ は無限個の分岐 $z \in [a + 2\pi i n, b + 2\pi i n], (n \in \mathbb{Z})$ を持つことに注意せよ。この無限個の分岐は、鞍点方程式 (4.2) の右辺の周期性 $u_i \rightarrow u_i + 2\pi i$ が起因している。また固有値が配位していない分岐 $z \in [a + 2\pi i n, b + 2\pi i n], (n \neq 0)$ 上では、鞍点方程式の左辺に周期性が無いために両辺の値が合わず方程式の解になっていないことが確かめられる。

本論文では、 z 平面で見た時に固有値が何カ所にまとまって配位しているかによって解を分類する。例えば z 平面で、 k 個の領域に固有値が配位している解を “ k カット解” と呼ぶことにする。従って今導出した解 (4.9) は、 z 平面で見ると無限個の分岐が存在するが、CS 行列模型の場合ではこれを “ワンカット解” と呼ぶ。

この固有値密度 (4.11) を用いると、Hermitian 行列模型の場合と同様の手法で自由エネルギー $F := -\log Z_N$ のラージ N 極限を評価することが出来る。これは研究 [24] によって有限の λ の場合で評価されており、結果は

$$F_{(1)} \approx N^2 \left[-\frac{\pi i}{12\lambda} - \frac{\pi i \lambda}{3} - \frac{1}{4\pi^2 \lambda^2} (\text{Li}_3(e^{-2\pi i \lambda}) - \zeta(3)) \right] + \dots, \quad (4.13)$$

と与えられる。ここで $\text{Li}_3(x)$ は多重対数関数 (dilogarithm)、 $\zeta(3)$ はゼータ関数である。後でマルチカット解から導かれる自由エネルギーと比較するために、弱結合極限 $|\lambda| \ll 1$ での振る舞いを評価しておく、物理には関係しない位相部分を除いて、これは

$$F_{(1)} \approx \frac{N^2}{2} \log \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \dots, \quad (|\lambda| \ll 1), \quad (4.14)$$

である。ただし λ は正の実数の場合を仮定した。

また $\lambda = N/k$ が実数であるとする、この解は $|\lambda| \leq 1$ の領域までしか有効で無いことが研究 [68] によって示されている。端点 b は、 $|\lambda|$ が 1 に近づく極限では

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm 1} b(\lambda) = \pm 2\pi i, \quad (4.15)$$

と振る舞い、分岐は虚軸上 $[-2\pi i, 2\pi i]$ に漸近する。ところが CS 行列模型の場合には周期性から $z \in [a + 2\pi i n, b + 2\pi i n], (n \neq 0)$ にもまた分岐が存在するため、この極限では全ての分岐が融合してしまう。従ってこの極限では、解の分岐の構造に矛盾が起こりワンカット解は破綻する。

実はこの $\lambda := N/k = 1$ という点は、有限の (N, k) で分配関数 (4.1) を評価した研究 [16, 56] により特別な臨界点であることが知られている。分配関数 (4.1) を厳密計算してみると、この結果は

$$Z_N = e^{\frac{N^2}{4}\pi i} e^{\frac{\pi i}{6k}N(N^2-1)} k^{-\frac{N}{2}} \prod_{m=1}^{N-1} \left[2 \sin \frac{\pi m}{k} \right]^{N-m}, \quad (4.16)$$

と与えられる。この導出については付録 E に記載した。厳密計算の結果 (4.16) を見ると、 $N-1 \geq k$ では分配関数 Z_N が厳密に 0 になっていることに気付く。ラージ N 極限では、この臨界点は $\lambda = 1$ に相当する。この点を超えた領域では、局所化後の S^3 分配関数 (4.1) は厳密に 0 になってしまい、これを用いて書かれた自由エネルギー $F = -\log Z_N$ は物理的な意味を持たない。臨界点では、経験的に元の超対称 CSM 理論に超対称性の破れが起こっていると解釈される。

4.4 ステップ型ツーカット解

次に、図 4.1 右上で描かれたステップ型ツーカット解の構成を考える。以下からが、私達の研究 [21, 22] で解析的に示した新しい結果である。

ポテンシャル $V(Z)$ は、 $Z = 1$ にしか古典的な鞍点を持たないので、鞍点方程式 (4.5) が安定なツーカット解を持つことは一見不思議である。この謎を解く鍵となるのは、鞍点方程式 (4.2) の右辺における固有値の周期性 $u_i \rightarrow u_i + 2\pi i$ である。実はこの周期性によって、 $2\pi i$ 離れた固有値の間にはあたかも互いが非常に近くにいるかのような強い斥力的な相互作用が働く。そして、これに伴って古典的な鞍点が複数個無くともマルチカット解が安定に存在することを示すことが出来る。

4.4.1 $N = 2$ の場合

相互作用項の周期性 $u_i \rightarrow u_i + 2\pi i$ が、マルチカット解の謎を解き明かす鍵となっていることを簡単に見るために、まずは $N = 2$ の場合の鞍点方程式を考えてみよう [68]。後

で示すように、この議論のラージ N 極限への一般化は簡単である。 $N = 2$ の場合の鞍点方程式は

$$\frac{u_1}{2\pi i\lambda} = \frac{1}{2} \coth \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad \frac{u_2}{2\pi i\lambda} = -\frac{1}{2} \coth \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad (4.17)$$

と与えられる。まずは2つの方程式を足し合わせると、 $u_2 = -u_1$ が得られる。これを用いると、方程式 (4.17) は

$$\frac{u_1}{2\pi i\lambda} = \frac{1}{2} \coth u_1, \quad (4.18)$$

と還元される。この方程式を厳密に解くことは難しいが、弱結合展開 $|\lambda| \ll 1$ を考えてみれば無限個の解を持つことが分かる。

右辺の周期性に注意しながら弱結合摂動解を導出してみると、これには大きく分けて以下の2通りの解が存在する。

$$u_1 = \pm \sqrt{\pi i \lambda} + \dots, \quad u_1 = \pi i n + \frac{\lambda}{n} + \dots. \quad (4.19)$$

ここで n は、ノンゼロの整数である。1つ目の解は、ラージ N 極限でワンカット解 (4.11) に相当する解である。一方で、2つ目の解は周期性から得られる新しいクラスの無限個の解である。“無限個”と述べた意味は、 n が一般に整数であれば幾つでも考えられるためである。特にこの解は $u_1 - u_2 = 2\pi i n + O(\lambda)$ を満足し、固有値間が $2\pi i$ の整数倍だけ離れているという特徴がある。

この特徴は、 N を十分大きく取った数値解析から見つかる“ステップ型”ツーカット解 (図 4.1 右上) にも見られる。またこの周期性から、他の様々なマルチカット解も存在していると推察される。

4.4.2 ラージ N 極限の場合

さて、ラージ N 極限の場合の解析に移ろう。図 4.1 右上で見られる解を構成するために、 z 平面で $[a_i, b_i]$, ($i = 1, 2$) に分岐を持つ場合を考える。ただし、各分岐は $\text{Re}(a_i) \leq \text{Re}(b_i)$ かつ $\text{Im}(a_i) \leq \text{Im}(b_i)$ を満たすとしよう。また、分岐間が $2\pi i$ の整数倍だけ離れている特徴を考慮して

$$a_2 = b_1 + 2\pi i n, \quad (4.20)$$

を仮定する。 n は、正の整数である。また各分岐 $[a_i, b_i]$ 上にはそれぞれ N_i , ($i = 1, 2$) 個の固有値が蓄積しているとする。全体の固有値の数が N 個であることから、これらは規格化 $N = N_1 + N_2$ を満足する。以上の描像を描いたものが、図 4.3 左である。

Z 平面では、分岐の端点は $A_i = e^{a_i}$ 及び $B_i = e^{b_i}$ に射影される。条件 (4.20) は

$$A_2 = e^{2\pi i n} B_1, \quad (4.21)$$

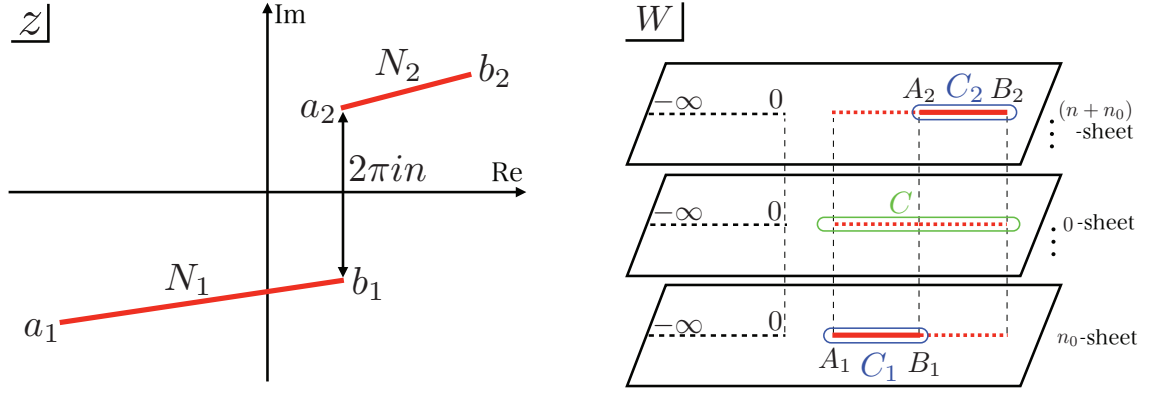


図 4.3: (左図:) z 平面におけるステップ型ツーカット解の固有値配位の概形。赤線が固有値が配位する分岐である。(右図:) Migdal 積分形式における W 平面上での積分路。点線が被積分関数の分岐である。また青線が、式 (4.22) の積分路 C_1 及び C_2 である。一方で、緑線が式 (4.23) における積分路 C である。

である。ステップ型マルチカット解で特徴的なこの点は、後の一般化を見越して $D_1 := B_1$ と定義しておく。 A_2 と B_1 は、 n が整数であるため、一見 Z 平面上で同一点とみなして良いと考えられる。しかし関数 $V'(Z)$ 内の $\log Z$ は、複素関数の性質からよく知られているように $Z \in [-\infty, 0]$ で接続された無限枚の Riemann 面上に定義される関数である。すなわち A_2 と B_1 は、図 4.3 右で示されるように異なる Riemann 面上の点に相当し、各点では $\log Z$ の値が異なる。従ってこれらは、 Z 平面に移ってもまた区別されるべき点である。

以上の仮定の下で、Migdal 積分形式を課してステップ型ツーカット解を構成しよう。鞍点方程式 (4.5) を満たすリゾルヴェントは

$$v(Z) = \oint_{C_1 \cup C_2} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A_1)(Z - B_2)}{(W - A_1)(W - B_2)}}, \quad V'(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log Z, \quad (4.22)$$

である。ここで、 C_1, C_2 はそれぞれ異なる Riemann 面上の分岐 $[A_1, B_1], [A_2, B_2]$ を反時計回りに囲む閉経路である。

この積分形式は、通常のツーカット解の場合の Migdal 積分形式 (3.20) とは被積分関数の構造が異なることに注意せよ。今、条件 (4.21) から 2 つの分岐 $[A_1, B_1], [A_2, B_2]$ は $\log Z$ の面の構造を除いて 1 本に繋がっている。従って今の場合、このルート部分はこの 1 つの分岐に繋がっている構造を考慮して、 $[A_1, B_2]$ に 1 つの分岐がある積分形式を課するのが適切である。

この積分 (4.22) を評価しよう。ここまでで述べてきたように、積分内の $V'(W)$ には $\log W$ が含まれるので、分岐の構造に注意しなくてはならない。分岐 $[A_1, B_1]$ が、 $\log W$ の主面 (principal sheet) から n_0 枚目だけ離れた面上に定義された分岐であるとする。この時、分岐 $[A_2, B_2]$ は、仮定 (4.21) から $(n_0 + n)$ 面上の値である。従って積分 (4.22) は、以下のよ

うに書き換えることが出来る。

$$v(Z) = \oint_C \frac{dW}{4\pi i} \frac{1}{\pi i \lambda} \frac{\log W}{Z-W} \sqrt{\frac{(Z-A_1)(Z-B_2)}{(W-A_1)(W-B_2)}} + \oint_{C_1} \frac{dW}{4\pi i} \frac{2n_0}{\lambda} \frac{1}{Z-W} \sqrt{\frac{(Z-A_1)(Z-B_2)}{(W-A_1)(W-B_2)}} \\ + \oint_{C_2} \frac{dW}{4\pi i} \frac{2(n+n_0)}{\lambda} \frac{1}{Z-W} \sqrt{\frac{(Z-A_1)(Z-B_2)}{(W-A_1)(W-B_2)}}. \quad (4.23)$$

ここで積分路 C は、図 4.3 で示したような主面上で分岐 $[A_1, B_2]$ を囲む閉経路である。第 1 項目の積分は、ワンカット解 (4.8) と同様の積分である。一方で、第 2, 3 項目は新しい項であるが、解析的に積分を実行することが出来て、結局ステップ型ツーカット解は

$$v(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z}}{2} \right) + \frac{n}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{q(Z) + \sqrt{q^2(Z) - 4}}{2} \right) + \frac{n_0}{\lambda}, \\ f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad f_0 = \frac{2\sqrt{A_1 B_2}}{\sqrt{A_1} + \sqrt{B_2}}, \quad f_1 = \frac{2}{\sqrt{A_1} + \sqrt{B_2}}, \\ q(Z) = \frac{q_1 Z - q_0 D_1}{Z - D_1}, \quad q_1 = \frac{2(2D_1 - A_1 - B_2)}{B_2 - A_1}, \quad q_0 = \frac{2(D_1 B_2 + D_1 A_1 - 2A_1 B_2)}{D_1(B_2 - A_1)}, \quad (4.24)$$

と与えられる。⁵ 付録 D.2.2 では、Migdal 積分形式とは異なる解の導出法からも、このステップ型ツーカット解 (4.24) が得られることを紹介している。またこの解がどのように鞍点方程式 (4.5) を満足しているのか、式 (D.9) 及び (D.22) にて示したので、参照して頂きたい。

リゾルヴェント $v(Z)$ から固有値密度を読み取る関係式 (4.6) を用いると、固有値密度は

$$\rho(Z) = \frac{1}{4\pi^2 \lambda Z} \log \left(\frac{Z + \sqrt{A_1 B_2} - i\sqrt{(Z-A_1)(B_2-Z)}}{Z + \sqrt{A_1 B_2} + i\sqrt{(Z-A_1)(B_2-Z)}} \right) \\ + \frac{n}{\pi^2 \lambda Z} \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{Z-A_1}{B_2-Z}} \sqrt{\frac{B_2-D_1}{D_1-A_1}} \right), & (Z \in [A_1, B_1]), \\ -\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_2-Z}{Z-A_1}} \sqrt{\frac{D_1-A_1}{B_2-D_1}} \right), & (Z \in [A_2, B_2]), \end{cases} \quad (4.25)$$

と得られる。図 4.4 には、 $|\lambda| \ll 1$ の時の固有値密度 $\rho(Z)$ の概形をプロットした。この図 4.4 を見ると、通常の Hermitian 行列模型の場合には見られない興味深い特徴として、 $Z = D_1$ 近傍での固有値密度の対数発散があることに気付く。この発散は、リゾルヴェント (4.24) 内の $q(Z)$ が持つ極 $Z = D_1$ によって現れている。

⁵ この第 2 項目は、以下のように逆三角関数を用いて書き換えることも可能である。

$$\log \left(\frac{q(Z) + \sqrt{q^2(Z) - 4}}{2} \right) = 2i \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{Z-A_1}{Z-B_2}} \sqrt{\frac{B_2-D_1}{D_1-A_1}} \right).$$

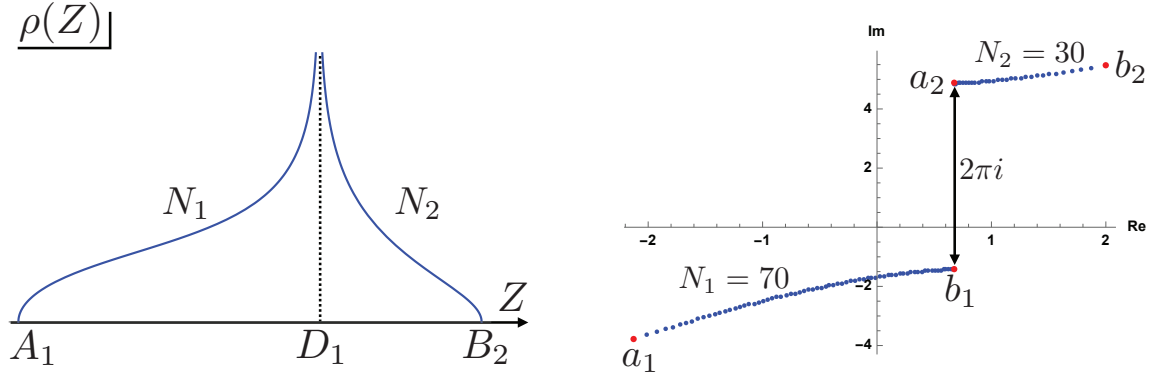


図 4.4: (左図:) ステップ型ツーカット解の固有値密度 (4.25) の弱結合極限 $|\lambda| \ll 1$ での概形。 Z 平面でプロットすると、 $[A_2, B_2]$ は $[A_1, B_1]$ と同じ Riemann 面上にいるかのように振る舞うことに注意せよ。また $Z = D_1 (= B_1)$ に対数発散が見られる。(右図:) Newton 法の結果 (青点) と解析解 (4.24) から得られる端点 (赤点) の比較。Newton 法の結果は、パラメータ $(N_1, N_2, n, \lambda) = (70, 30, 1, 0.5)$ を用いた。これらは良く一致している。

最後に、解 (4.24) における未定値 $A_1, B_1 (= D_1), B_2$ の決定について考えよう。この決定には、 $Z \rightarrow \infty$ 及び $Z = 0$ でそれぞれ与えられた漸近条件 (4.7) を用いる。更に、固有値密度に関する規格化条件

$$\frac{N_1}{N} = \int_{A_1}^{B_1} \rho(Z) dZ = \frac{1}{4\pi i} \oint_{C_1} \frac{v(Z)}{Z} dZ, \quad (4.26)$$

を課す。これは分岐 $[A_1, B_1]$ に、矛盾無く N_1 個の固有値が蓄積していることを要請することに相当する。以上より 3 つの未定値 $A_1, B_1 (= D_1), B_2$ を、 λ 及び $N_1/N, n$ の関数として決定することが出来る。⁶なお、 n_0 は一見未定値として残っているように見えるが、 A_1 の決定によって自動的に決定される値である。

任意のパラメータ $(\lambda, n, N_1/N)$ の場合で、境界条件からこの端点を解析的に求めることは難しい。端点が解析的に評価出来るのは、例えば弱結合極限 $|\lambda| \ll 1$ を取った場合である。この場合の解はユニークに決定することが可能で、これは z 平面での端点で以下の通りである。

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - \frac{2\pi\lambda}{n} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_1}{N}\right) + O(\lambda^2), & b_2 &= a_2 + \frac{2\pi\lambda}{n} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_2}{N}\right) + O(\lambda^2), \\ b_1 &= d_1 = a_2 - 2\pi i n = -\frac{2\pi i n N_2}{N} + \frac{\lambda\pi}{2n} \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_1}{N}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_2}{N}\right) \right) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

ここで、 $d_1 := \log D_1$ である。このように弱結合極限では、 λ が実数の場合に分岐は $O(\lambda)$ の広がりを持って実軸に平行に伸びる。

⁶ $N_1 = N_2$ の時には、解は対称性 $Z \rightarrow 1/Z$ を持つため計算が簡単化される。この場合には、対称性から $A_1 = 1/B_2$ かつ $A_2 = 1/B_1 = e^{\pi i n}$ であり、規格化条件 (4.26) は自明である。残る未定値 B_2 の決定には、漸近条件 (4.7) のどちらか一方を課したら良く、片方を課すともう片方は対称性から自明に成り立つ。

有限の λ では、原点对称性がある $N_1 = N_2$ の場合で $n = 1, 2, 3, 4$ までで解析的な評価をすることが出来る。例えば $n = 1$ の場合では、端点の解はユニークに

$$B_2 = 1/A_1 = e^{\pi i} \left(-i(e^{\pi i \lambda} - 1) + \sqrt{2e^{\pi i \lambda} - e^{2\pi i \lambda}} \right)^2, \quad A_2 = e^{2\pi i} B_1 = e^{\pi i}, \quad (4.28)$$

である。

また漸近条件 (4.7)、及び規格化条件 (4.26) は、未定値 A_1, B_1, B_2 について数値的に解くことが可能である。⁷例えば $(\lambda, n, N_1/N) = (0.5, 1, 0.7)$ と取って、端点を評価した結果は図 4.4 の通りである。この結果は、Newton 法で導出されたツーカット解を、固有値密度 (4.25) が矛盾無く再現していることを示す。⁸

また、端点の決定が難しいことに伴って一般の $(\lambda, n, N_1/N)$ における自由エネルギーの評価は難しい。数値的な解析も、固有値密度の分岐構造の複雑さから信頼性の高い結果を導くことは厳しい。

解析的な評価が可能であると分かったのは、弱結合極限 $|\lambda| \ll 1$ における自由エネルギーのみである。 $N_1 = N_2$ の場合で、弱結合極限 $|\lambda| \ll 1$ における自由エネルギーは

$$F_{(2)} = \frac{N^2 n^2 \pi i}{4\lambda} + N^2 \log \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \dots, \quad (|\lambda| \ll 1), \quad (4.29)$$

である。ここで、第 1 項目は λ が実数である場合、物理的ではない位相項であるので無視しても構わない。

ラージ N 極限でマルチカット解がどのように効いてくるか知るために、ワンカット解の弱結合極限 (4.14) とこれを比較してみよう。 $\log(1/\lambda)$ 項の比較から、これらは明らかに

$$F_{(1)} < F_{(2)}, \quad (|\lambda| \ll 1), \quad (4.30)$$

の関係にある。従って、ラージ N 極限における自由エネルギーの一般論 (3.13) より、ステップ型ツーカット解は少なくとも弱結合ではラージ N 極限でワンカット解を超えて支配的な寄与としては効いてこないことが分かる。

4.5 ステップ型マルチカット解

前小節では、ステップ型ツーカット解を構成した。この小節では、 $2\pi i$ の整数倍で特徴付けられる“ステップ”を、複数回起こしているステップ型マルチカット解の構成を示す。ステップ型マルチカット解は、例えば図 4.1 左下のような固有値配位である。

⁷数値的に分岐の端点を決定するために、本研究では Mathematica の FindRoot を用いた。端点に関する方程式の解はユニークではなく、FindRoot の初期条件に依存して様々な解に収束する。図 4.4 右ではこれらの解の中で、Newton 法の結果と一致するものを選んだ。端点に関する他の解が全て矛盾のない解であるかどうかは分からない。特に、弱結合極限で固有値密度の正值性が保たれない場合、 $\rho(Z)$ の定義からそのような解は禁止される。

⁸この解析では、先行研究 [69, 70, 71] を参考に、解析解の分岐の端点が Newton 法の結果と一致することを確認した。今の場合で、解析解の分岐全体が複素平面上にどのように伸びているかを確認することは、 $|\lambda| \ll 1$ 極限の場合でない限り技術的に難しい。

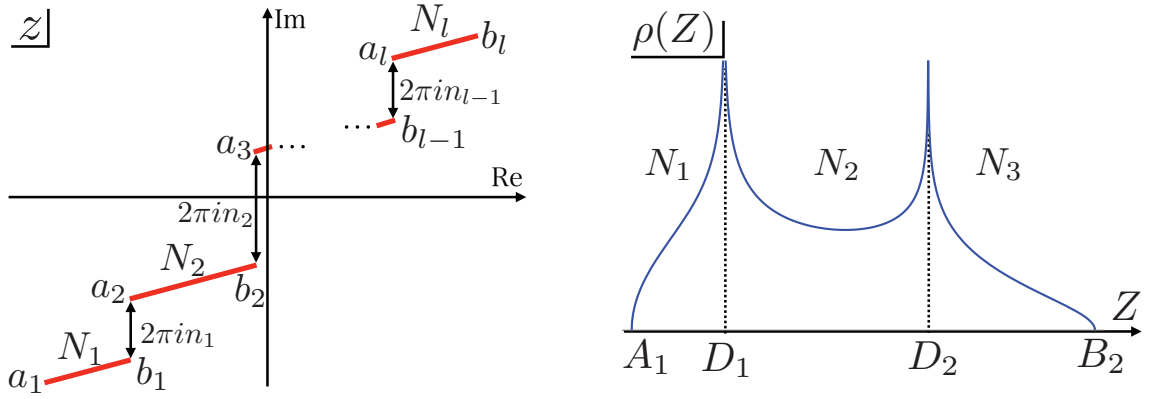


図 4.5: (左図:) z 平面上でのステップ型マルチカット解の固有値配位。(右図:) 固有値密度 (4.34) の弱結合極限での概形。ここでは、2 回のステップを起こすステップ型スリーカット解の固有値密度を記載した。 Z 平面では、全ての分岐が同じ Riemann 面上にいるかのように振る舞うことに注意せよ。

z 平面で、 l 個の分岐 $[a_j, b_j]$, $(j = 1, \dots, l)$ がある l カット解を考えよう。ただし、これらは $\text{Re}(a_j) \leq \text{Re}(b_j)$ 及び $\text{Im}(a_j) \leq \text{Im}(b_j)$ を満たすとする。また j 番目の分岐には N_j 個の固有値が蓄積していることを仮定し、全体の規格化条件 $\sum_{j=1}^l N_j = N$ が満たされているとする。ステップ型ツークット解の場合と同様に、分岐の端点はそれぞれ

$$a_{j+1} = b_j + 2\pi i n_j, \quad (j = 1, \dots, l-1), \quad (4.31)$$

を満たすとする。ここで、 $\{n_j\}$ は正の整数である。 Z 平面では、分岐 $[A_j, B_j]$ にそれぞれ $A_{j+1} = e^{2\pi i n_j} B_j$ を要請することになる。以上を満たす固有値の配位を描いた概略図が図 4.5 である。

さてステップ型ツークット解 (4.22) の一般化から、ステップ型マルチカット解の Migdal 積分形式は

$$v(Z) = \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A_1)(Z - B_l)}{(W - A_1)(W - B_l)}}, \quad V'(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log Z, \quad (4.32)$$

と与えられる。ここで積分路 C_j は、分岐 $[A_j, B_j]$ を反時計回りに囲む閉経路である。これら分岐は、 $\log Z$ の異なる Riemann 面上に定義されていることに注意せよ。また C_1 は、主面から n_0 番目の面上に定義されていると仮定する。

ステップ型ツークット解で行った計算と同様の評価から、ステップ型 l カット解は以下

のように導出される。

$$v(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z}}{2} \right) + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{n_j}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{q^{(j)}(Z) + \sqrt{(q^{(j)}(Z))^2 - 4}}{2} \right) + \frac{n_0}{\lambda},$$

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad f_0 = \frac{2\sqrt{A_1 B_l}}{\sqrt{A_1} + \sqrt{B_l}}, \quad f_1 = \frac{2}{\sqrt{A_1} + \sqrt{B_l}},$$

$$q^{(j)}(Z) = \frac{q_1^{(j)} Z - q_0^{(j)} D_j}{Z - D_j}, \quad q_1^{(j)} = \frac{2(2D_j - A_1 - B_l)}{B_l - A_1}, \quad q_0^{(j)} = \frac{2(D_j B_l + D_j A_1 - 2A_1 B_l)}{D_j(B_l - A_1)}.$$
(4.33)

ここで、 B_l と他の B_j の役割の違いを強調するために、 $D_j := B_j$, ($j = 1, \dots, l-1$) と置いた。関数 $q^{(j)}(Z)$ は、ステップ型ツーカット解の場合と同様に $Z = D_j$ にそれぞれ極を持つ。従ってこの極が起因して、 $v(Z)$ は対数発散を持つ。この $v(Z)$ が持つ分岐構造は、図 4.6 左で示した通りである。この解が鞍点方程式 (4.5) を満たしていることは、図中の対数の分岐を注意深く評価することで確かめることが出来る。

固有値密度 $\rho(Z)$ は

$$\rho(Z) = \frac{1}{4\pi^2 \lambda Z} \log \left(\frac{Z + \sqrt{A_1 B_l} - i\sqrt{(Z - A_1)(B_l - Z)}}{Z + \sqrt{A_1 B_l} + i\sqrt{(Z - A_1)(B_l - Z)}} \right) + \sum_{j=1}^{l-1} \rho_s^{(j)}(Z),$$

$$\rho_s^{(j)}(Z) = \frac{n_j}{\pi^2 \lambda Z} \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{Z - A_1}{B_l - Z}} \sqrt{\frac{B_l - D_j}{D_j - A_1}} \right), & \left(Z \in [A_k, B_k]_{(k=1, \dots, j)} \right), \\ -\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_l - Z}{Z - A_1}} \sqrt{\frac{D_j - A_1}{B_l - D_j}} \right), & \left(Z \in [A_k, B_k]_{(k=j+1, \dots, l-1)} \right), \end{cases}$$
(4.34)

と読み取ることが出来る。この固有値密度は、各 $Z = D_j$ で対数発散を持つ。図 4.5 右では、 $\rho(Z)$ の概形をプロットした。

最後に、 $(l+1)$ 個の未定値 A_1, B_l 及び D_j , ($j = 1, \dots, l-1$) の決定を考える。これはステップ型ツーカット解の場合の一般化から、2つの漸近条件 (4.7) と固有値密度の規格化条件

$$\frac{N_j}{N} = \int_{A_j}^{B_j} \rho(Z) dZ = \frac{1}{4\pi i} \oint_{C_i} \frac{v(Z)}{Z} dZ, \quad (j = 1, \dots, l), \quad (4.35)$$

によって決定される。なおこの規格化条件は、全ての規格化条件を足し上げると漸近条件 (4.7) の1つと等価であるため、独立には $(l-1)$ 個の条件であることに注意せよ。

これら条件は、ツーカット解の場合と同様に解析的に評価することは厳しいが、数値的に評価することが可能である。例えば、 $(\lambda, n_1, n_2, N_1/N, N_2/N) = \{0.3, 1, 1, 1/3, 1/3\}$ を取ったステップ型スリーカット解の数値解析の結果は、図 4.6 で示されるように Newton 法の結果を再現し、固有値密度 (4.34) が矛盾ない解析解になっていることが分かる。

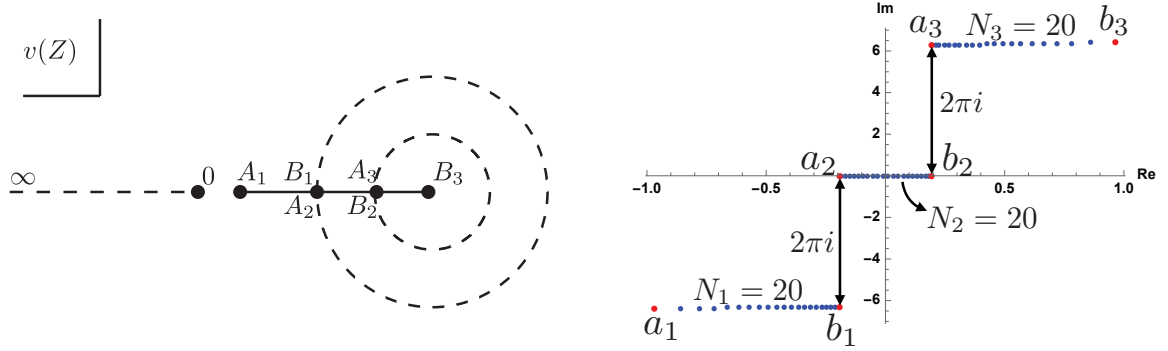


図 4.6: (左図:) ステップ型スリーカット解 (4.33) の Z 平面における分岐の構造。実線がルート型分岐 $[A_1, B_1], [A_2, B_2], [A_3, B_3]$ である。一方で破線は対数型分岐で、この線を越えると $\log Z$ は不連続的に $2\pi i$ の定数変位が起こる。この分岐は、原点及び $B_1 (= D_1)$ 、 $B_2 (= D_2)$ から伸びる。(右図:) 数値解析 (青点) と解析解 (4.33) から導かれる端点 (赤点) の比較。数値解析のパラメータは $(N_1, N_2, N_3, n_1, n_2, \lambda) = (20, 20, 20, 1, 1, 0.3)$ を用いた。

4.6 ステップ型マルチカット解の重ね合わせ

ここまでの小節で、 $2\pi i$ の整数倍で特徴付けられたステップ型マルチカット解の解析解の構成を行ってきた。では、これで pure $U(N)$ CS 行列模型の鞍点方程式 (4.2) の解は尽くされているだろうか。

図 4.1 から分かるように鞍点方程式の解は、ステップ型マルチカット解 (4.33) ではまだ尽くされていない。Newton 法を用いた数値解析の結果を見直してみると、まだ構成されていない解が図 4.1 右下にある。従ってこの小節では、図 4.1 右下に残るスリーカット解の構成を考えてみよう。この解はワンカット解とよく似た原点近傍に集積した固有値と、ステップ型ツーカット解とよく似た $2\pi i$ の整数倍で隔てられた固有値の集まりが重ね合わさったような配位である。故にこのスリーカット解は、ワンカット解とステップ型ツーカット解の重ね合わせであると解釈することが出来る。

このようなワンカット解とステップ型マルチカット解、もしくはステップ型マルチカット解同士の重ね合わせで表される解を、この論文では“重ね合わせ型”マルチカット解と呼ぶことにする。

重ね合わせ型スリーカット解の 3 つの分岐を $[A^{(1)}, B^{(1)}], [A_1^{(2)}, B_1^{(2)}], [A_2^{(2)}, B_2^{(2)}]$ と置くことにしよう。ここで $[A^{(1)}, B^{(1)}]$ は、 $z = 0$ 周りのワンカット解に相当し、一方で $[A_i^{(2)}, B_i^{(2)}]$, ($i = 1, 2$) はステップ型ツーカット解を特徴付けている。ステップ型ツーカット解の部分は、以下の仮定を置く。

$$A_2^{(2)} = e^{2\pi i n} B_1^{(2)}. \quad (4.36)$$

n は正の整数である。また各分岐には固有値が $N^{(1)}$ 及び $N_i^{(2)}$, ($i = 1, 2$) だけ蓄積していると仮定する。

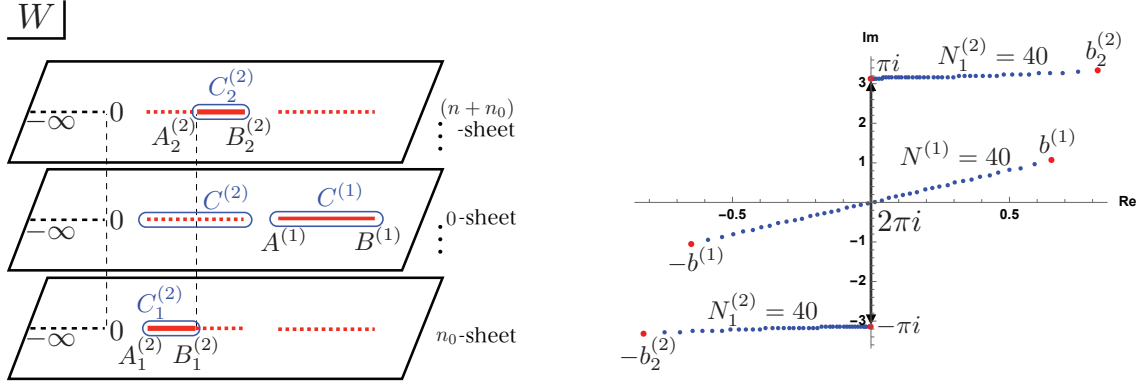


図 4.7: (左図:) ワンカット解とステップ型マルチカット解の重ね合わせ (4.37) の積分経路。(右図:) 数値解析 (青点) と解析解 (赤点) の比較。数値解析のパラメータは $(N^{(1)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, n, \lambda) = (40, 40, 40, 1, 0.2)$ と選んだ。

この解を再現する Migdal 積分形式は

$$v(Z) = \oint_{C^{(1)} \cup C_1^{(2)} \cup C_2^{(2)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A^{(1)})(Z - B^{(1)})(Z - A_1^{(2)})(Z - B_2^{(2)})}{(W - A^{(1)})(W - B^{(1)})(W - A_1^{(2)})(W - B_2^{(2)})}}, \quad (4.37)$$

である。積分路 $C^{(1)}$ は分岐 $[A^{(1)}, B^{(1)}]$ を、積分路 $C_i^{(2)}$ は分岐 $[A_i^{(2)}, B_i^{(2)}]$, $(i = 1, 2)$ を反時計回りに囲む閉経路である。これは図 4.7 右の通りである。

これまでのステップ型の解を再現した積分形式とこの解との違いは、ルート部分である。分岐 $[A_i^{(2)}, B_i^{(2)}]$ は、ステップ型の場合と同様に仮定 (4.36) から 1 本の分岐に繋がる。しかしこの分岐と、ワンカット解を特徴付ける分岐 $[A^{(1)}, B^{(1)}]$ は Z 平面上で繋がらないので、全体としてルート内は 2 つの分岐 $[A^{(1)}, B^{(1)}], [A_1^{(2)}, B_2^{(2)}]$ を持つ構造で描かれる。

これは、5 つの未定値 $A^{(1)}, B^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}$ が存在する。この決定には、漸近条件 (4.7) と固有値密度の規格化条件を課したら良い。積分形式 (4.37) は、 $Z \rightarrow \infty$ での振る舞いがこれまでとは異なり、以下のように与えられる。

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} v(Z) = c_1 Z + c_0 + O(1/Z). \quad (4.38)$$

c_1, c_0 は、式 (4.37) を $Z = \infty$ 周りに展開した時の係数である。この振る舞いから、漸近条件 (4.7) の $Z \rightarrow \infty$ での条件だけで 2 つの独立な条件 $c_1 = 0, c_0 = 1$ が与えられる。 $Z = 0$ での振る舞いからは、これまでと同様に 1 つの独立な条件が与えられる。固有値密度の規格化条件は 3 つ与えられるが、前の議論と同様に独立には 2 つである。以上より 5 つの独立な条件が揃い、これらを連立方程式として解くことで 5 つの未定値を決定することが可能である。従ってこの解は、端点の決定から矛盾無く構成することが出来ると分かる。

対称解

一般に積分 (4.37) を評価するのは難しい。しかし解が z 平面での原点对称性 $z \rightarrow -z$ を持つ場合、これは以下のようにして評価が可能である。解が原点对称である場合、各分岐やパラメータは

$$A^{(1)} = 1/B^{(1)}, \quad A_1^{(2)} = 1/B_2^{(2)}, \quad A_2^{(2)} = 1/B_1^{(2)} = e^{\pi i n}, \quad N_1^{(2)} = N_2^{(2)}, \quad (4.39)$$

を満足する。ワンカット解に相当する分岐 $[1/B^{(1)}, B^{(1)}]$ は $\log Z$ の主面で、 $Z = 1$ を通ることが課される。この時、 n が仮に偶数を取ったとすると、ステップ型ツーカット解の分岐はワンカット解にぶつかってしまうので、これを避けるために n は奇数であることが課される。またステップ型ツーカット解の分岐 $[e^{\pi i n}, B_2^{(2)}]$ 及び $[1/B_2^{(2)}, e^{-\pi i n}]$ は、それぞれ $(n+1)/2$ 、 $-(n+1)/2$ 番目の面上に定義されていることが分かる。

以上の考察から、積分 (4.37) は原点对称な場合

$$\begin{aligned} v(Z) = & \oint_{C^{(1)} \cup C^{(2)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{1}{\pi i \lambda} \frac{\log W}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - 1/B^{(1)})(Z - B^{(1)})(Z - 1/B_2^{(2)})(Z - B_2^{(2)})}{(W - 1/B^{(1)})(W - B^{(1)})(W - 1/B_2^{(2)})(W - B_2^{(2)})}} \\ & + \oint_{C_1^{(2)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{-(n+1)}{\lambda} \frac{1}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - 1/B^{(1)})(Z - B^{(1)})(Z - 1/B_2^{(2)})(Z - B_2^{(2)})}{(W - 1/B^{(1)})(W - B^{(1)})(W - 1/B_2^{(2)})(W - B_2^{(2)})}} \\ & + \oint_{C_2^{(2)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{n+1}{\lambda} \frac{1}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - 1/B^{(1)})(Z - B^{(1)})(Z - 1/B_2^{(2)})(Z - B_2^{(2)})}{(W - 1/B^{(1)})(W - B^{(1)})(W - 1/B_2^{(2)})(W - B_2^{(2)})}}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

と書き換えることが出来る。これらの積分は、研究 [74] で行われた積分を適用すれば

$$\begin{aligned} v(Z) = & \frac{1}{2\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z^2}}{2} \right) - \frac{n}{2\pi i \lambda} \log \left(\frac{q(Z) + \sqrt{q^2(Z) - 4}}{2} \right), \\ f(Z) = & f_0 + f_1 Z + f_0 Z^2, \quad q(Z) = \frac{q_0 + q_1 Z + q_0 Z^2}{(Z + 1)^2}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

と評価することが出来る。ここで、各係数は

$$\begin{aligned} f_0 = & \frac{4}{c^{(1)} - c^{(2)}}, \quad f_1 = -2 \frac{c^{(1)} + c^{(2)}}{c^{(1)} - c^{(2)}}, \quad c^{(1)} = B^{(1)} + 1/B^{(1)}, \quad c^{(2)} = B_2^{(2)} + 1/B_2^{(2)} \\ q_0 = & 2 \frac{c^{(1)} + c^{(2)} + 4}{c^{(1)} - c^{(2)}}, \quad q_1 = -\frac{4(c^{(1)} + c^{(2)}) + 4c^{(1)}c^{(2)}}{c^{(1)} - c^{(2)}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

である。

解 (4.41) の第 1 項目は、レンズ空間 (Lens space) S^3/\mathbb{Z}_2 上の超対称 pure $U(N)$ CS 理論を局所化して現れる行列模型のリゾルヴェント [23, 24] と関係する。また、後に議論する

ABJM 行列模型におけるリゾルヴェント (5.9) も同様な構造をしている。レンズ空間上の CS 理論のリゾルヴェントとよく似た構造の解が導出されることは、マルチカット解 (4.41) の幾何的な解釈を付ける上での手がかりになると考えられる。この関係性から、マルチカット解と幾何の関係を明らかにすることは今後の展望である。

また第 2 項目は、 $Z = e^{\pm \pi i n}$ に対数発散を持ち、ここまで議論してきた解 (4.24) や (4.33) と同様の特徴を持っている。この点から、この対数発散がステップ型の解の普遍的な特徴であることが伺われる。

Newton 法を用いて得られた固有値配位と、解析解の端点の比較は図 4.7 右の通りである。この結果は、これまでと同様に解析解 (4.41) が Newton 法の結果を再現した矛盾無い解であることを示している。

また解析解の無矛盾性を確かめる端点の比較は、積分 (4.37) を手計算で評価しなくても良い。すなわち、積分形式 (4.37) に直接漸近条件 (4.7) 及び固有値密度の規格化条件を課し、これらを例えば Mathematica の NIntegral、FindRoot 等を用いて数値的に評価しても端点の一致を確かめることが可能である。

これを踏まえると、一般解の解析的な構成に向けては、積分の実行が出来るかどうかはあまり重要では無い。むしろ積分形式解 (4.37) の一般化された形式がどのように与えられるのかを明らかにすれば良いと考えられる。次節では、積分形式 (4.37) の自然な拡張から、pure $U(N)$ CS 行列模型における鞍点方程式の一般解を提案しよう。

4.7 一般解の構成

前小節で議論した重ね合わせ型マルチカット解 (4.37) の一般化は、簡単に行うことが出来る。一般的に、図 4.8 で示されるような、 p 個のステップ型マルチカット解が重ね合わさった重ね合わせ型マルチカット解を考える。 q 個目 ($q = 1, \dots, p$) のステップ型マルチカット解は、 l_q 個の分岐 $[A_j^{(q)}, B_j^{(q)}]$, ($j = 1, \dots, l_q$) を持つとしよう。ステップ型の仮定から、各分岐は

$$A_j^{(q)} = e^{2\pi i n_j^{(q)}} B_{j+1}^{(q)}, \quad (4.43)$$

を満たすとする。 $n_j^{(q)}$ は正の整数である。また各分岐 $[A_j^{(q)}, B_j^{(q)}]$ には、固有値が $N_j^{(q)}$ 個蓄積しているとする。

この配位を導出する積分形式の解は、Hermitian 行列模型の場合の Migdal 積分形式 (3.20) の一般化から、以下のように与えることが出来る。

$$v(Z) = \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^{l_r} \oint_{C_j^{(r)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'(W)}{Z - W} \prod_{q=1}^p \sqrt{\frac{(Z - A_1^{(q)})(Z - B_{l_q}^{(q)})}{(W - A_1^{(q)})(W - B_{l_q}^{(q)})}}. \quad (4.44)$$

ここで積分路 $C_j^{(r)}$ は、分岐 $[A_j^{(r)}, B_j^{(r)}]$, ($r = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, l_r$) を反時計回りに囲む閉経路である。この積分は一般に複雑で、解析的に積分後の形式を評価することは難しい。

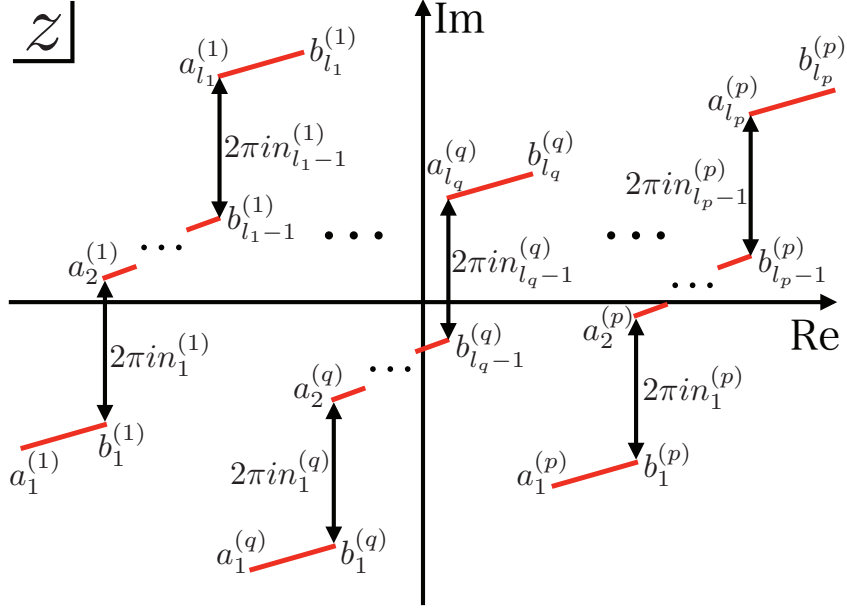


図 4.8: z 平面における pure $U(N)$ CS 行列模型 (4.1) の固有値配位の一般解。拡張された Migdal 積分形式 (4.44) を用いれば、数値解析で見つかる全てのマルチカット解 (図 4.1) を解析的に導出することが出来る。

恐らくジーナス (genus) の数が $(p-1)$ 個に一般化された楕円積分等を用いて評価されると期待される。

この積分形式 (4.44) は、 $(p + \sum_{q=1}^p l_q)$ 個の未定値 $\{A_1^{(q)}, B_1^{(q)}, \dots, B_{l_q}^{(q)}\}$ を持つ。そしてこの未定値は、 $\sum_{q=1}^p l_q$ 個の固有値密度に関する規格化条件と、 p 個の漸近条件 (4.7) から過不足無く決定することが出来る。

以上より、積分形式 (4.44) が鞍点方程式 (4.2) の全ての解を再現する一般的な表式であると考えられる。Newton 法を用いた鞍点方程式 (4.2) の解析では、この形式の解に該当しない解は見つかっておらず、ここまでで示してきたように Newton 法から見つかる解は全て式 (4.44) から再現することが出来る。

ところで、これらマルチカット解の物理的な役割を完全に理解することは出来ていない。素朴には、ゲージ理論の鞍点方程式の解が複数存在する場合、各々に対応する双対な重力解が存在すると期待出来る。しかし本研究では、具体的にマルチカット解に対応する重力解を発見するまでには至らなかった。マルチカット解と双対な重力解の構成は、今後の展望である。

さて、いずれにしてもゲージ/重力対応を用いた議論をより具体的に行うには、重力双対の存在が明確な ABJM 理論の S^3 分配関数 (2.13) を考えるのが適切である。式 (2.13) は ABJM 行列模型と呼ばれ、pure $U(N)$ CS 行列模型 (2.12) と比べるとやや複雑な行列模型である。

次章では、本章で示してきたマルチカット解の解析を ABJM 行列模型の場合に適用した結果を述べる。すぐに示すように、pure $U(N)$ CS 行列模型で行ってきたこの解析は、ABJM 行列模型等の、やや複雑な他の CS 行列模型の解析にも適用可能である。

更に次章の終盤では、マルチカット解の構成法を ABJM 行列模型の場合に拡張した後に、その物理的な役割について考える。特に、D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる IIA 型超弦理論に現れる非摂動効果に着目し、これと ABJM 行列模型におけるマルチカット解のある極限が定量的に関係付くことを示す。また pure $U(N)$ CS 行列模型におけるマルチカット解の役割についても、ここで再び議論する。

第5章 ABJM 行列模型のマルチカット解

前章では、pure $U(N)$ CS 行列模型の 'tHooft 極限に様々なマルチカット解が存在することを示し、その解析解を構成した。このような無限個のマルチカット解は、他の CS 行列模型にもまた存在する。本章では 'tHooft 極限で $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ 上の IIA 型超弦理論の低エネルギー極限との双対性が期待されている ABJM 行列模型に着目する。

節 5.1 及び節 5.2 では、'tHooft 極限におけるこれまでの先行研究を紹介する。次に節 5.3 では、ABJM 行列模型も前章と同様の解析法によって様々なマルチカット解が構成可能であることを示す。

また、このように構成されたマルチカット解の物理的な役割は何だろうか。節 5.4 では、ABJM 行列模型のマルチカット解の一部の配位が、 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ 上の IIA 型超弦理論において知られている D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる非摂動効果と定量的に関係することを示す。

5.1 ABJM 行列模型における鞍点方程式

本章では、ABJM 行列模型 (2.13) を考える。ABJM 行列模型の分配関数は

$$Z_N = \frac{1}{(N!)^2} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\mu_i}{2\pi} e^{-\frac{N}{4\pi i \lambda} \mu_i^2} \prod_{j=1}^N \frac{d\nu_j}{2\pi} e^{\frac{N}{4\pi i \lambda} \nu_j^2} \frac{\prod_{i < j}^N [2 \sinh \frac{\mu_i - \mu_j}{2}]^2 \prod_{i < j}^N [2 \sinh \frac{\nu_i - \nu_j}{2}]^2}{\prod_{i,j=1}^N [2 \cosh \frac{\mu_i - \nu_j}{2}]^2}, \quad (5.1)$$

である。 k は CS 準位で、 $\lambda := N/k$ である。定義及び分配関数の対称性から、 λ は正の実数に制限することが出来る。

本章では、IIA 型超弦理論の低エネルギー極限との対応が期待される 'tHooft 極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda$: 固定) を取り、これまでと同じ方針でこの分配関数を評価してみよう。ABJM 行列模型は、2 種類の固有値 μ_i, ν_j が存在する 2 行列模型である。鞍点方程式は、固有値 μ_i, ν_j

それぞれについて

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{2\pi i\lambda}{N} \left[\sum_{j \neq i}^N \coth \frac{\mu_i - \mu_j}{2} - \sum_{j=1}^N \tanh \frac{\mu_i - \nu_j}{2} \right], \quad (i = 1, \dots, N), \\ -\nu_i &= \frac{2\pi i\lambda}{N} \left[\sum_{j \neq i}^N \coth \frac{\nu_i - \nu_j}{2} - \sum_{j=1}^N \tanh \frac{\nu_i - \mu_j}{2} \right], \quad (i = 1, \dots, N),\end{aligned}\quad (5.2)$$

と与えられる。この解析には、第3章で学んだリゾルヴェントの方法が再び役立つ。pure $U(N)$ CS 行列模型の場合と同様に、新しい変数 $M_i := \exp(\mu_i)$ 及び $N_j := \exp(\nu_j)$ を導入しよう。すると鞍点方程式 (5.2) は、この変数で

$$\begin{aligned}\log M_i &= \frac{2\pi i\lambda}{N} \left[\sum_{j \neq i}^N \frac{M_i + M_j}{M_i - M_j} - \sum_{j=1}^N \frac{M_i - N_j}{M_i + N_j} \right], \quad (i = 1, \dots, N), \\ -\log N_i &= \frac{2\pi i\lambda}{N} \left[\sum_{j \neq i}^N \frac{N_i + N_j}{N_i - N_j} - \sum_{j=1}^N \frac{N_i - M_j}{N_i + M_j} \right], \quad (i = 1, \dots, N),\end{aligned}\quad (5.3)$$

と書き換えられる。

固有値 M_i, N_j に関する固有値密度と、リゾルヴェントを以下のように導入する。

$$\begin{aligned}\rho_M(Z) &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(Z - M_i), \quad \rho_N(Z) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(Z - N_i), \\ w(Z) &:= \int_{\mathcal{C}_M} \rho_M(W) \frac{Z + W}{Z - W} dW - \int_{\mathcal{C}_N} \rho_N(W) \frac{Z - W}{Z + W} dW.\end{aligned}\quad (5.4)$$

ここで \mathcal{C}_M 及び \mathcal{C}_N は、それぞれ $\rho_M(Z)$ 及び $\rho_N(Z)$ の台である。これらを用いると、鞍点方程式 (5.3) は

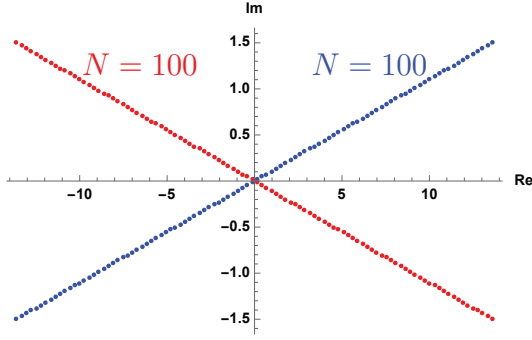
$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi i\lambda} \log Z &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [w(Z + i\epsilon) + w(Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}_M), \\ \frac{1}{\pi i\lambda} \log Z &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [w(-Z + i\epsilon) + w(-Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}_N),\end{aligned}\quad (5.5)$$

と与えられる。また固有値密度は、それぞれ以下の関係式から読み取ることが出来る。

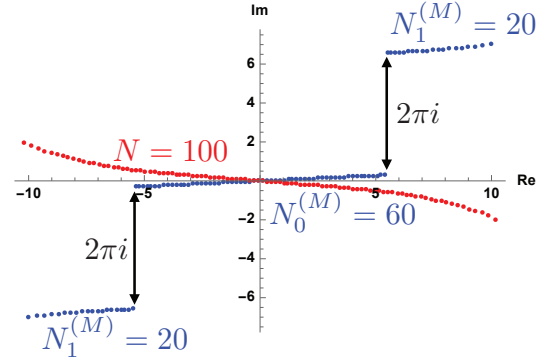
$$\begin{aligned}\rho_M(Z) &= -\frac{1}{4\pi iZ} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [w(Z + i\epsilon) - w(Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}_M), \\ \rho_N(Z) &= +\frac{1}{4\pi iZ} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [w(-Z + i\epsilon) - w(-Z - i\epsilon)], \quad (Z \in \mathcal{C}_N).\end{aligned}\quad (5.6)$$

更に、リゾルヴェント $w(Z)$ は定義から以下の漸近条件を満足する。

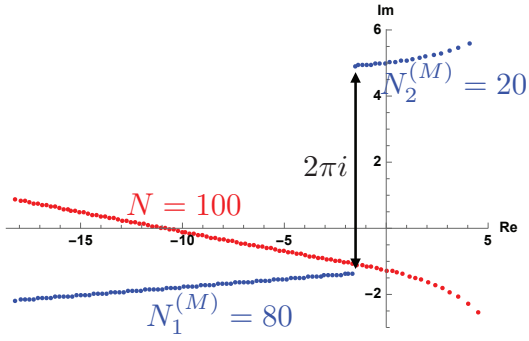
$$\lim_{Z \rightarrow \infty} w(Z) = 0 + \mathcal{O}(1/Z), \quad \lim_{Z \rightarrow 0} w(Z) = 0 + \mathcal{O}(Z).\quad (5.7)$$



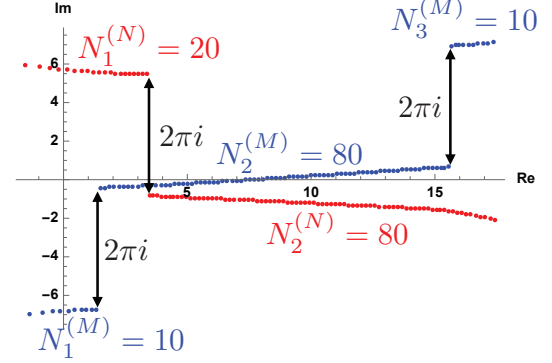
DMP 解 ((1+1) カット解)



(3+1) カット解



(2+1) カット解



(3+2) カット解

図 5.1: 鞍点方程式 (5.2) を Newton 法で数値解析して、様々に現れるマルチカット解。パラメータは $N = 100$, $\lambda = 10$ を取った。青点は固有値 μ_i 、赤点は固有値 ν_j が複素平面上で安定している位置である。左上が研究 [26] によって示された (1+1) カット解、他の解がこれまでに発見されていなかったマルチカット解の一部である。

さて、やるべきことはこれまで通りである。すなわちリゾルヴェント $w(Z)$ を漸近条件 (5.7) の下で解き、固有値密度を式 (5.6) から読み取って、自由エネルギー $F := -\log Z_N$ を評価したら良い。

解析計算を行う前に、pure $U(N)$ CS 行列模型の場合と同様に、数値解析で鞍点方程式 (5.2) を評価した結果を記載しておく。図 5.1 は、Newton 法を用いて方程式 (5.2) を解いた際に現れる様々な固有値配位の一部である。図 5.1 左上は、次節で紹介する Drukker, Marino, Putrov の研究 [26] によって解析的にもよく知られた解である。本論文では、他の配位と区別するために、この配位を “DMP 解” と呼ぶことにしよう。

一方、図 5.1 における DMP 解以外の配位は、これまでの先行研究では見つかっていないマルチカット解である。すぐに分かるように、ABJM 行列模型におけるこれらの解も $2\pi i$ の整数倍の変位によって特徴付けられており、pure $U(N)$ CS 行列模型と同じ機構で各

固有値が留まっていることが見て取れる。¹これらの結果は、ABJM 行列模型にもまた無限個のマルチカット解が存在することを示唆している。

以下では、本章の構成を記載しよう。まず節 5.2 では、よく知られた DMP 解の構成法を紹介する。ABJM 行列模型の鞍点方程式 (5.5) は、これまでと比べて一見非常に複雑であるが、ここでもまた Migdal 積分形式 (3.20) を用いた解析が役立つ。節 5.3 では、pure $U(N)$ CS 行列模型の一般解 (4.44) を導出した方法を ABJM 行列模型の場合に拡張する。そして、ABJM 行列模型のマルチカット解全てを含む積分形式を用いた一般解 (5.17) を提案する。

ここまでの節で、ABJM 行列模型におけるマルチカット解の一般的な構成法を示したことになる。ではこれらマルチカット解は、どのような物理的な役割を持っているだろうか。節 5.4 では、ABJM 行列模型のマルチカット解の一部が、D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる超弦理論の非摂動効果と定量的に関係していることを示し、マルチカット解とその双対な重力理論での描像の関係性について議論する。

5.2 DMP 解

マルチカット解の構成に移る前に、まずはよく知られた DMP 解 (図 5.1 左上) の導出を紹介する。この導出には、次節の一般解の構成に備えて、研究 [74] によって行われた Migdal 積分形式を用いた導出法が便利である。

DMP 解は、図 5.1 左上を見れば分かるように、各固有値 μ, ν が原点周りに集積した原点对称な $(1+1)$ カット解である。対称性から、固有値 $M_i = e^{\mu_i}$ の台は $[1/A, A]$ 、固有値 $N_j = e^{\nu_j}$ の台は $[1/B, B]$ に描かれると仮定することが出来る。ただし、 $|A|, |B| \geq 1$ であるとする。DMP 解の固有値配位の概略図は、図 5.2 左に記載した。

鞍点方程式 (5.5) を満たし、上記の位置に固有値が配位するリゾルヴェント $w(Z)$ はどのように与えられるだろうか。これは、以下の積分形式で与えられる。

$$\begin{aligned}
w(Z) = & \oint_{C(M)} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_M(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A)(Z - 1/A)(Z + 1/B)(Z + B)}{(W - A)(W - 1/A)(W + 1/B)(W + B)}} \\
& + \oint_{C(N)} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_N(W)}{Z - W} \sqrt{\frac{(Z - A)(Z - 1/A)(Z + 1/B)(Z + B)}{(W - A)(W - 1/A)(W + 1/B)(W + B)}}, \\
V'_M(Z) := & \frac{1}{\pi i \lambda} \log Z, \quad V'_N(Z) := \frac{1}{\pi i \lambda} \log(e^{\pi i} Z). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

¹ABJM 行列模型の鞍点方程式 (5.2) には、物質場の存在に伴って異なる種類の固有値 μ_i, ν_j 間の相互作用も存在する。これは周期性から、 μ と ν が $(2n+1)\pi i$ だけ離れた時に強く働く。ここまでのマルチカット解の解析を踏まえると、この周期性に起因した新しい種類のマルチカット解が現れそうである。

しかし、私達の数値解析では、 μ と ν が $(2n+1)\pi i$ で隔てられたステップ型マルチカット解を見つけることは出来なかった。これは \tanh 項の符号が、 μ 同士 (もしくは ν 同士) の \coth 項とは逆になっていて、左辺のポテンシャル項と上手くバランス関係を築けないことが原因であると考えられる。本研究では、さしあたり数値解析から見つからないことを根拠に、このような配位の解析解は考えないことにした。

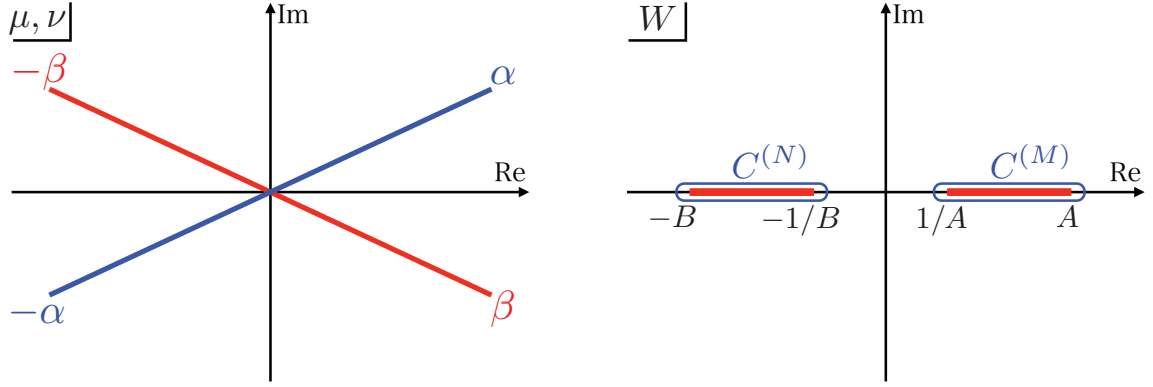


図 5.2: (左図:)DMP 解の固有値の配位。青線が固有値 μ に関する分岐で赤線が固有値 ν に関する分岐である。また $\alpha := \log A$, $\beta := \log B$ である。(右図:) 積分形式 (5.8) の積分経路。 $C^{(N)}$ が、リゾルヴェントの定義 (5.4) から、 $[1/B, B]$ ではなく $[-B, -1/B]$ を囲む閉経路になっていることに注意せよ。

経路 $C^{(M)}$ 及び $C^{(N)}$ は、図 5.2 右に記載したように、分岐 $[1/A, A]$ 及び $[-B, -1/B]$ を反時計回りに一周した閉経路である。

この積分形式は、 $[1/A, A]$ と $[-B, -1/B]$ に分岐を持つことに気付く。2 つ目の分岐が $[1/B, B]$ ではなく、 $[-B, -1/B]$ に引かれると仮定したのは以下の理由から来る。鞍点方程式 (5.3) を見直してみよう。固有値 M_i と N_j の相互作用項に注目してみると、この方程式は分母の構造から $M_i = N_j$ ではなく $M_i = -N_j$ で特異的である。従ってこれに対応して、固有値 N_j に関してリゾルヴェントが持つ分岐は、実際に固有値が配位する位置から符号が変化する。

さて積分 (5.8) は、研究 [74] によって解析的に評価されており、結果は

$$w(Z) = \frac{1}{2\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z^2}}{2} \right), \quad f(Z) = f_0 + f_1 Z + f_0 Z^2, \\ f_0 = \frac{4}{A + 1/A + B + 1/B}, \quad f_1 = \frac{2(-A - 1/A + B + 1/B)}{A + 1/A + B + 1/B}, \quad (5.9)$$

である。未定値 A 及び B は、漸近条件 (5.7) 及び固有値密度に関する規格化条件

$$1 = \int_{1/A}^A \rho_M(Z) dZ = \frac{1}{4\pi i} \oint_{C^{(M)}} \frac{w(Z)}{Z} dZ, \quad (5.10)$$

から決定することが出来る。²これら条件式を課すと、端点 A, B は、以下の関係式を満たす値であることが研究 [26] により示されている。

$$A + \frac{1}{A} = 2 + i\kappa, \quad B + \frac{1}{B} = 2 - i\kappa. \quad (5.11)$$

²対称性 $Z \rightarrow 1/Z$ から、漸近条件 (5.7) からは独立な条件式が 1 つだけ得られる。また固有値密度の規格化条件は、当然もう片方の固有値 $N = e^\nu$ に関しても要請されるが、これもまた原点对称性から独立な条件式ではない。従って独立には 2 つの方程式が課され、ここから未定値 A, B を過不足無く決定出来る。

ここで κ は、'tHooft 結合定数 λ と以下のようにして関係する量である。

$$\lambda(\kappa) = \frac{\kappa}{8\pi^3} {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; -\frac{\kappa^2}{16} \right). \quad (5.12)$$

特に端点 A, B は、IIA 型超弦理論の古典極限に相当する強結合極限 $|\lambda| \gg 1$ を取ると

$$\begin{aligned} A &= e^\alpha, & \alpha &= \pi\sqrt{2\hat{\lambda}} + \frac{\pi}{2}i - 2ie^{-\pi\sqrt{2\hat{\lambda}}} + \dots, \\ B &= e^\beta, & \beta &= \pi\sqrt{2\hat{\lambda}} - \frac{\pi}{2}i + 2ie^{-\pi\sqrt{2\hat{\lambda}}} + \dots, \end{aligned} \quad (5.13)$$

と振る舞う。ここで、 $\hat{\lambda} := \lambda - 1/24$ である。

研究 [26] では、リゾルヴェント (5.9) から読み取られる固有値密度を用いて、'tHooft 極限での自由エネルギー $F := -\log Z_N$ が評価されている。この結果は、 $\lambda \gg 1$ 極限で

$$F_{\text{DMP}} \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{3} N^2 \lambda^{-1/2} + \dots, \quad (5.14)$$

と与えられる。これは、IIA 型超弦理論の古典極限に相当する IIA 型超重力の $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ 解が持つ自由エネルギーと一致する。この一致は、重力を含まないゲージ理論が確かに重力の物理量を再現した一例であり、ゲージ/重力対応の定量的な証拠の 1 つとして数えられている。

また $\lambda = N/k$ を用いて、式 (5.14) を N と k の関数として素朴に書くと

$$F_{\text{DMP}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} N^{3/2} k^{1/2} + \dots, \quad (5.15)$$

である。この結果もまた、M 理論の古典極限に相当する 11 次元超重力解 $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7/\text{Z}_k$ 上の N 枚の M2 ブレーン系が持つべき $N^{3/2}$ 則 (2.4) を満たし、ゲージ/重力対応の期待をきちんと再現していると言える。

また近年、フェルミガス法 [42] と呼ばれる手法を用いると、M 理論極限 ($N \rightarrow \infty$, k : 固定) をより直接的に解析出来ることが判明している。この手法を用いると、11 次元超重力解の物理量との一致 (5.15) をより簡単に得ることが出来る。フェルミガス法に関する進展は、文献 [30, 31] にまとめられている。

5.3 ABJM 行列模型のマルチカット解

5.3.1 一般解の構成

'tHooft 極限における解析に戻ろう。この節では、pure $U(N)$ CS 行列模型で行ったマルチカット解全てを含む一般解の構成を、ABJM 行列模型の場合にも拡張してみる。

Newton 法による数値解析 (図 5.1) は、ABJM 行列模型にもまた $2\pi i$ の整数倍で隔てられたステップ型マルチカット解が存在することを示唆している。また、pure $U(N)$ CS 行

列模型の場合と同様に、ステップ型マルチカット解の重ね合わせもまた考えることが出来る (ただし図 5.1 には、重ね合わせ型の記載が省かれていることに注意せよ)。

ABJM 行列模型の一般的な積分形式の解はどのように与えられるだろうか。この節では一般的に、固有値 $\{M_i\}$ について、 p 個のステップ型マルチカット解が重ね合わさっている状態を考える。 r 個目 ($r = 1, \dots, p$) のステップ型マルチカット解は、 l_r 個の分岐 $[A_j^{(M,r)}, B_j^{(M,r)}]$, ($j = 1, \dots, l_r$) を持つとする。同様に固有値 $\{N_j\}$ については q 個のステップ型マルチカット解が重ね合わさっている状態を考える。 r 個目 ($r = 1, \dots, q$) のステップ型マルチカット解は、 m_r 個の分岐 $[A_j^{(N,r)}, B_j^{(N,r)}]$, ($j = 1, \dots, m_r$) を持つとする。ステップ型マルチカット解の分岐は、それぞれ $2\pi i$ の整数倍変位で繋がっていると仮定し、従って

$$\begin{aligned} A_j^{(M,r)} &= e^{2\pi i n_j^{(M,r)}} B_{j+1}^{(M,r)}, & (j = 1, \dots, l_r, \quad r = 1, \dots, p), \\ A_j^{(N,r)} &= e^{-2\pi i n_j^{(N,r)}} B_{j+1}^{(N,r)}, & (j = 1, \dots, m_r, \quad r = 1, \dots, q), \end{aligned} \quad (5.16)$$

を満たすとする。ここで、 $n_j^{(M,r)}$ 及び $n_j^{(N,r)}$ は正の整数である。また各分岐 $[A_j^{(M,r)}, B_j^{(M,r)}]$ 及び $[A_j^{(N,r)}, B_j^{(N,r)}]$ には、固有値が $N_j^{(M,r)}, N_j^{(N,r)}$ 個だけ集積しているとする。

以上の仮定に基づいた、ABJM 行列模型の一般解は

$$\begin{aligned} w(Z) &= \sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^{l_t} \oint_{C_j^{(M,t)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_M(W)}{Z - W} \prod_{r=1}^p \prod_{s=1}^q \sqrt{\frac{(Z - A_1^{(M,r)})(Z - B_{l_r}^{(M,r)})(Z + A_1^{(N,s)})(Z + B_{m_s}^{(N,s)})}{(W - A_1^{(M,r)})(W - B_{l_r}^{(M,r)})(W + A_1^{(N,s)})(W + B_{m_s}^{(N,s)})}} \\ &\quad + \sum_{t=1}^q \sum_{j=1}^{m_t} \oint_{C_j^{(N,t)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_N(W)}{Z - W} \prod_{r=1}^p \prod_{s=1}^q \sqrt{\frac{(Z - A_1^{(M,r)})(Z - B_{l_r}^{(M,r)})(Z + A_1^{(N,s)})(Z + B_{m_s}^{(N,s)})}{(W - A_1^{(M,r)})(W - B_{l_r}^{(M,r)})(W + A_1^{(N,s)})(W + B_{m_s}^{(N,s)})}}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

と与えることが出来る。ここで経路 $C_i^{(M,r)}$ 及び $C_j^{(N,s)}$ は、分岐 $[A_i^{(M,r)}, B_i^{(M,r)}]$ ($i = 1, \dots, l_r$, $r = 1, \dots, p$) 及び $[-B_j^{(N,s)}, -A_j^{(N,s)}]$ ($j = 1, \dots, m_s$, $s = 1, \dots, q$) を反時計回りに一周した閉経路である。未定値である分岐の端点は、漸近条件 (5.7) 及び固有値密度の規格化条件から過不足無く決定することが出来る。

5.3.2 対称ステップ型マルチカット解

一般解 (5.17) は、一目見れば分かるように非常に複雑な積分形式で与えられ、積分後の形式を導出することは難しい。しかし、解が原点对称性 $Z \rightarrow 1/Z$ を持ち、重ね合わせのない $p = q = 1$ の場合では、この積分を比較的簡単に実行することが可能である。これは、 z 平面では図 5.3 で記載した配位に相当する。図 5.3 で示した通り、固有値 μ_i はステップ型 $(2l+1)$ カット解で、固有値 ν_j はステップ型 $(2m+1)$ カット解で与えられる固有値配位である。

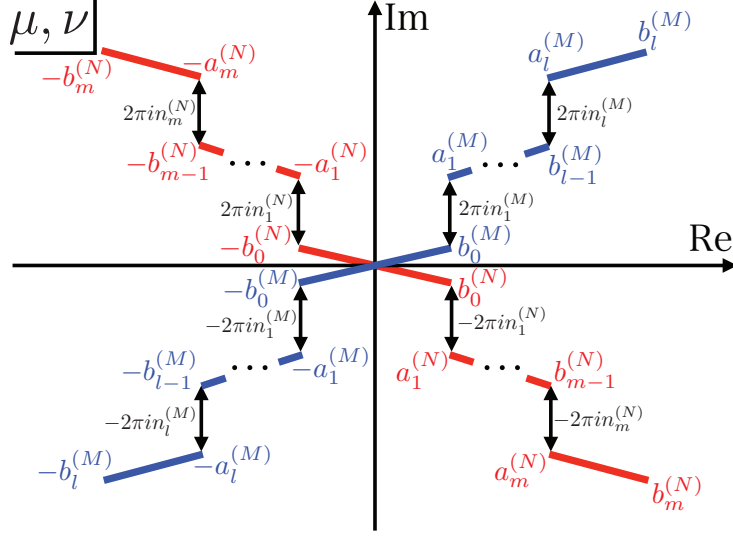


図 5.3: 原点对称なステップ型 $((2l+1) + (2m+1))$ カット解 (5.20)。

後で示すように、解析結果はステップ型マルチカット解の分岐の数が奇数である場合と偶数である場合によって変わる。ここでは、まずは μ_i, ν_j がどちらも奇数個の分岐を持つ場合を考える。

原点对称性から、固有値 $\{\mu_i\}$ は $[-b_0^{(M)}, b_0^{(M)}], [a_j^{(M)}, b_j^{(M)}], [-b_j^{(M)}, -a_j^{(M)}], (j = 1, \dots, l)$ に分岐を作り、各領域には固有値が $N_0^{(M)}, N_j^{(M)}, N_j^{(M)}$ 個だけ集積しているとする。また固有値は、固有値密度全体の規格化条件から $N_0^{(M)} + 2 \sum_{j=1}^l N_j^{(M)} = N$ を満たす。固有値 $\{\nu_j\}$ についても同様である。すなわち $[-b_0^{(N)}, b_0^{(N)}], [a_j^{(N)}, b_j^{(N)}], [-b_j^{(N)}, -a_j^{(N)}], (j = 1, \dots, m)$ に分岐を作り、各領域には固有値が $N_0^{(N)}, N_j^{(N)}, N_j^{(N)}$ だけ集積しているとする。規格化条件は $N_0^{(N)} + 2 \sum_{j=1}^m N_j^{(N)} = N$ である。ステップ型マルチカット解の仮定から、各分岐は

$$\begin{aligned} a_j^{(M)} &= b_{j-1}^{(M)} + 2\pi i n_j^{(M)}, & (j = 1, \dots, l), \\ a_j^{(N)} &= b_{j-1}^{(N)} - 2\pi i n_j^{(N)}, & (j = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (5.18)$$

を満たす。ここで $\{n_j^{(M)}\}$ 及び $\{n_j^{(N)}\}$ は正の整数である。

さて、一般解 (5.17) から読み取られる対称ステップ型マルチカット解の積分形式は

$$\begin{aligned} w(Z) &= \sum_{j=1}^{2l+1} \oint_{C_j^{(M)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_M(W)}{Z-W} \sqrt{\frac{(Z - 1/B_l^{(M)})(Z - B_l^{(M)})(Z + 1/B_m^{(N)})(Z + B_m^{(N)})}{(W - 1/B_l^{(M)})(W - B_l^{(M)})(W + 1/B_m^{(N)})(W + B_m^{(N)})}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2m+1} \oint_{C_j^{(N)}} \frac{dW}{4\pi i} \frac{V'_N(W)}{Z-W} \sqrt{\frac{(Z - 1/B_l^{(M)})(Z - B_l^{(M)})(Z + 1/B_m^{(N)})(Z + B_m^{(N)})}{(W - 1/B_l^{(M)})(W - B_l^{(M)})(W + 1/B_m^{(N)})(W + B_m^{(N)})}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

である。ここで、 $A_j^{(M)} = \exp(a_j^{(M)})$, $B_j^{(M)} = \exp(b_j^{(M)})$, $A_j^{(N)} = \exp(a_j^{(N)})$, $B_j^{(N)} = \exp(b_j^{(N)})$ である。また経路 $C_j^{(M)}$ 及び $C_j^{(N)}$ は、一般解 (5.17) に従って分岐を囲んだ積分経路である。またステップを起こす点を強調するために、 $D_j^{(M)} := A_j^{(M)}$, $D_j^{(N)} := A_j^{(N)}$ と置く。

この積分は、pure $U(N)$ CS 行列模型の重ね合わせ型マルチカット解の解析で行った積分 (4.37) とよく似た形式になっている。従って、研究 [74] による積分の評価を応用すると

$$w(Z) = \frac{1}{2\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z^2}}{2} \right) + \sum_{i=1}^l \frac{n_i^{(M)}}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{p^{(i)}(Z) + \sqrt{(p^{(i)}(Z))^2 - 4}}{2} \right) - \sum_{j=1}^m \frac{n_j^{(N)}}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{q^{(j)}(Z) + \sqrt{(q^{(j)}(Z))^2 - 4}}{2} \right), \quad (5.20)$$

と導出することが出来る。ここで $f(Z)$ と $p^{(i)}(Z)$ 、及び $q^{(j)}(Z)$ はそれぞれ

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z + f_0 Z^2, \quad p^{(i)}(Z) = \frac{p_0 Z^2 + p_1 Z + p_0}{(Z - D_i^{(M)})(Z - 1/D_i^{(M)})}, \quad q^{(j)}(Z) = \frac{q_0 Z^2 + q_1 Z + q_0}{(Z + D_j^{(N)})(Z + 1/D_j^{(N)})}, \quad (5.21)$$

と与えられる。また各係数は

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{4}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \quad f_1 = \frac{2(-c^{(M)} + c^{(N)})}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \\ p_0^{(i)} &= \frac{4(D_i^{(M)} + 1/D_i^{(M)}) + 2c^{(M)} - 2c^{(N)}}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \quad p_1^{(i)} = \frac{2(D_i^{(M)} + 1/D_i^{(M)})(c^{(M)} - c^{(N)}) - 4c^{(M)}c^{(N)}}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \\ q_0^{(j)} &= \frac{-4(D_j^{(N)} + 1/D_j^{(N)}) + 2c^{(M)} - 2c^{(N)}}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \quad q_1^{(j)} = \frac{-2(D_j^{(N)} + 1/D_j^{(N)})(c^{(M)} - c^{(N)}) - 4c^{(M)}c^{(N)}}{c^{(M)} + c^{(N)}}, \\ c^{(M)} &= B_l^{(M)} + 1/B_l^{(M)}, \quad c^{(N)} = B_m^{(N)} + 1/B_m^{(N)}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

である。

解 (5.20) を眺めると、第 1 項目は DMP 解 (5.9) と完全に同じ形式をしていることに気付く。一方で、第 2 項目は pure $U(N)$ CS 行列模型のステップ型マルチカット解で現れた新しい項に似ている。特に $p^{(i)}(Z)$ 、及び $q^{(j)}(Z)$ で書かれる関数の構造は式 (4.41) の第 2 項目とよく似ている。このリゾルヴェント、及び読み取られる固有値密度は、 $Z = D_i^{(M)}, 1/D_i^{(M)}, -D_j^{(N)}, -1/D_j^{(N)}$ ($i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$) に対数発散を持つ。ここからこの対数発散が、一般的な CS 行列模型のステップ型マルチカット解において、ある程度普遍的な特徴であることが分かる。

分岐の数が偶数になった場合の解について議論しておく。これは奇数個の分岐の解 (5.20) で、原点に貯まった固有値の数 $N_0^{(M)}$ や $N_0^{(N)}$ を 0 に持っていく極限で実現する。例え

ば $N_0^{(M)} \rightarrow 0$ とすると、分岐 $[-b_0^{(M)}, b_0^{(M)}]$ が原点に潰れ、次の分岐の端点が $D_1^{(M)} = \exp(\pi i n_1^M)$ に固定される。 $N_0^{(N)} \rightarrow 0$ についても同様である。

以上のようにして、分岐が偶数個の対称ステップ型マルチカット解もまた、関数 (5.20) の構造を変えることなく構成が可能である。

5.4 超弦理論の非摂動効果との関係性

この節では、CS 行列模型のマルチカット解の物理的な役割について記載する。ABJM 行列模型の場合で、DMP 解 (5.9) がラージ N 極限のリーディングに相当する真空解であるとみなすと、その他のマルチカット解は超弦理論の非摂動的な励起状態と関係する可能性がある。

まず小節 5.4.1 では、ABJM 行列模型と関係する IIA 型超弦理論に知られている非摂動効果を紹介する。次に小節 5.4.2 では、ABJM 行列模型のステップ型マルチカット解が D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる超弦理論の非摂動効果と関係することを示す。小節 5.4.3 では、前節の解析を pure $U(N)$ CS 行列模型に応用し、M2 ブレーンインスタントンとステップ型マルチカット解の関係を議論する。最後に小節 5.4.4 では、重ね合わせ型のマルチカット解から想起される新しい形のラージ N インスタントンについて議論する。

5.4.1 ABJM 行列模型の非摂動効果

この小節では、'tHooft 極限における ABJM 行列模型の解析でこれまでに知られている非摂動効果を紹介する。

DMP 解の解析 (5.14) で示したように、ABJM 行列模型の自由エネルギー F は古典極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty$) で IIA 型超重力解 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ の自由エネルギーと一致する。ゲージ/重力対応を信じると、リーディング (5.14) からの $1/N$ 補正は古典重力からの量子補正と考えることが出来る。特にラージ N 極限に対する指数関数的な補正は、超弦理論の非摂動効果と関係することが期待される。

以下では、IIA 型超弦理論の古典解の 1 つに相当する IIA 型超重力解 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ の解析から、この背景時空において知られている超弦理論の非摂動効果を紹介する。これは、次のような 2 種類が知られている。

$$\begin{aligned} \text{F1 インスタントン} &: \exp[-S_{F1}], \quad S_{F1} = 2\pi\sqrt{\lambda}, \\ \text{D2 ブレーンインスタントン} &: \exp[-S_{D2}], \quad S_{D2} = \pi N \sqrt{2/\lambda}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

S_{F1} や S_{D2} は、各励起状態における古典作用の大きさに相当する。式 (5.23) は、超重力理論の解析を、ゲージ/重力対応における関係式 $g_s \sim 1/N$, $l_{pl} \sim 1/\lambda$ を用いて書き直した結果である。³

³M 理論極限 ($N \rightarrow \infty, k$: 固定) を取った場合では、F1 インスタントンは WS (world sheet) インスタントン、D2 ブレーンインスタントンは M2 ブレーンインスタントンと呼ばれる。

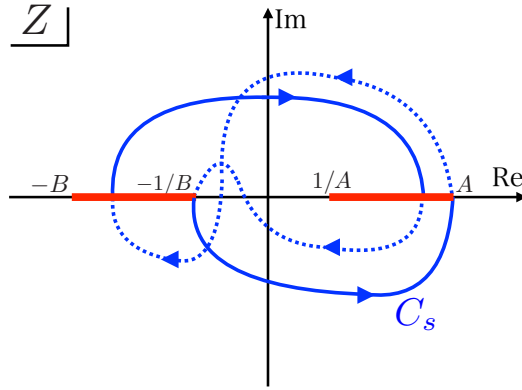


図 5.4: D2 ブレーンインスタントン S_{D2} が導出される非自明な積分経路 C_s 。青い実線はルートの分岐の表側、点線は裏側を通っていることを指す。

F1 インスタントン [75] は、背景時空 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ 中の部分多様体である CP^1 に弦 (F1) が1回巻き付いた励起状態である。古典作用 S_{F1} を見てみると、これは強結合極限 $\lambda \rightarrow \infty$ に対する非摂動的な補正であることが分かる。

一方で D2 ブレーンインスタントン [47, 76] は、 $\text{AdS}_4 \times \text{CP}^3$ 中の部分多様体 RP^3 に、IIA 型理論の非摂動的な物体である D2 ブレーンが1回巻き付いた励起状態である。この励起は、 S_{D2} の N 依存性からラージ N 極限に対する非摂動効果とみなすことが出来る。

これらの非摂動効果は、ABJM 行列模型の解析からも発見されている。まず F1 インスタントンは、強結合展開 $|\lambda| \gg 1$ に関する非摂動的な補正として現れる [26]。例えば、分岐の端点の強結合での振る舞い (5.13) を眺めてみると、この中に指数関数的な補正 $\exp(-\pi\sqrt{2\lambda})$ が現れている。この補正は、まさしく F1 インスタントンと同様の形をしており、これはそのまま自由エネルギー (5.14) の非摂動的な補正として現れる。従って、ここから ABJM 行列模型の強結合展開の中に F1 インスタントン S_{F1} が現れていることが見て取れる。

一方、D2 ブレーンインスタントンの古典作用 S_{D2} は、行列模型のラージ N インスタントンに関する解析から発見されている。行列模型のラージ N インスタントンに関する一般論については、付録 C に基礎的な事項をまとめたので参照せよ。

行列模型の一般論に従うと、ラージ N インスタントンは、真空解から1つの固有値が非自明な鞍点に励起した配位によって特徴付けられる (図 C.1 を参照せよ) [77, 78]。また、これはスペクトル曲線の非自明な周回積分に書き換えることが出来る。ABJM 行列模型の場合、DMP 解 (5.9) がラージ N 極限で支配的な真空解である。DMP 解 (5.9) により描かれるスペクトル曲線 $y(Z)$ は

$$y(Z) = \frac{1}{2\pi i \lambda} \log Z - w(Z), \quad (5.24)$$

である。ここで $w(Z)$ は、DMP 解のリゾルヴェント (5.9) である。

さて、DMP 解は非自明な鞍点こそ持たないが、図 5.4 で描かれる非自明な積分路 C_s を

持つ。⁴そして、一般論 (C.7) からインスタントン古典作用に相当するスペクトル曲線の周回積分は、強結合極限 $|\lambda| \gg 1$ で

$$S_{\text{inst}}^s = \frac{N}{2} \oint_{C_s} \frac{y(Z)}{Z} dZ = \pi N \sqrt{2/\lambda} + \dots, \quad (5.25)$$

と振る舞うことが研究 [47, 76] により調べられている。これらは、確かに IIA 型超弦理論における D2 ブレーンインスタントンの古典作用 (5.23) と一致している。

以上のように、ABJM 行列模型はその非摂動効果も含めて IIA 型超弦理論の低エネルギー極限との一致が確かめられている。

5.4.2 マルチカット解 vs. D2 ブレーンインスタントン

前小節では、DMP 解の視点から、IIA 型超弦理論に存在する 2 種類の非摂動効果 (5.23) が導かれることを紹介した。一方、本研究では ABJM 行列模型に様々なマルチカット解が存在することを示した。この小節では、このマルチカット解のある極限が、非摂動効果の 1 つである D2 ブレーンインスタントンと定量的に関係付くことを示す。

図 5.1 左下のステップ型 (2+1) カット解を考えよう。ここで $N_2^{(M)} \rightarrow 0$ 極限を取ると、固有値 μ に関する分岐の 1 つは縮んで消滅し、解の描像は DMP 解に帰着する。図 5.5 で示したように、 $N_2^{(M)} \rightarrow 1$ 極限を取った場合はどうであろうか。このような配位は、DMP 解から 1 つの固有値が $2\pi i$ 離れた位置に励起したラージ N インスタントンの配位になる。

この配位の古典作用を、やや大雑把な評価であるが、解析的行ってみよう。DMP 解における N 番目の固有値 μ_N の有効ポテンシャルを考える。これは分配関数 (5.1) より、

$$V_{\text{eff}}(\mu_N) = \frac{1}{4\pi i \lambda} \mu_N^2 + V_{\text{int}}(\mu_N),$$

$$V_{\text{int}}(\mu_N) := -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \log \left[2 \sinh \frac{\mu_N - \mu_j}{2} \right]^2 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \log \left[2 \cosh \frac{\mu_N - \nu_j}{2} \right]^2, \quad (5.26)$$

と得られる。ここで、他の固有値 $\{\mu_i\}$ ($i \neq N$) 及び $\{\nu_j\}$ は先に積分されて DMP 解 (5.9) に固定されているとする。また μ_N が複素平面上でどの位置を取るかによって他の固有値は反作用を受けて僅かに位置がずれるはずであるが、このような効果は無視することに

⁴研究 [47] では、DMP 解のスペクトル曲線 $y(Z)$ の非自明な周回経路についての分類が成されている。非自明な経路は、 C_s 以外にも独立にもう 1 種類発見されており、この周回積分から別の寄与が導かれる。しかしこの寄与は、強結合極限 $|\lambda| \gg 1$ で実数のインスタントン古典作用 S_{inst} を持たず、ここで紹介した式 (5.25) のような物理的な励起状態には該当しない。このような非物理的な寄与は、Marino によるレビュー文献 [29] にて、A 周期インスタントン (A-cycle instanton) と呼ばれている。

一方で、非自明な鞍点から導かれる周回経路で特徴付けられたインスタントンは B 周期インスタントン (B-cycle instanton) と呼ばれる。式 (5.25) で示された経路 C_s によって現れるラージ N インスタントンは、経路内のどの点に非自明な鞍点があるのか分からないため、B 周期インスタントンであると断定することは出来ない。少なくとも、経路積分に寄与する物理的な配位を導出しているという観点で、A 周期インスタントンでないことは確かである。

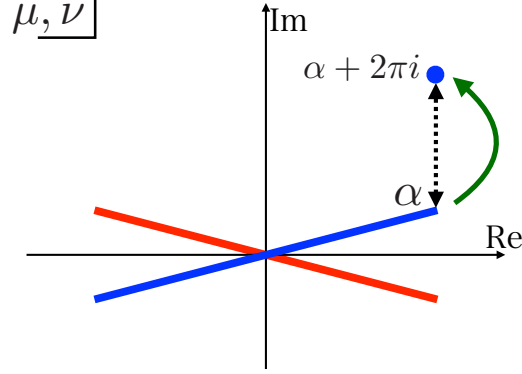


図 5.5: ステップ型 (2+1) カット解 (図 5.1 左下) のインスタントン極限 $N_2^{(M)} \rightarrow 1$ 。この励起状態が持つ古典作用は、D2 ブレーンインスタントンの古典作用 S_{D2} と一致する。

する。まず、最後の固有値が DMP 解の端点 α (5.9) に配位する場合 ($\mu_N = \alpha$) を考えると、この配位は DMP 解 (5.9) そのものである。従ってこれを用いると、固有値 μ_N が真空 $\mu_N = \alpha$ から適当な位置に励起した際の古典作用は

$$S_{\text{inst}}(\mu) = N (V_{\text{eff}}(\mu) - V_{\text{eff}}(\alpha)), \quad (5.27)$$

と与えられる。これは、式 (C.5) の自然な拡張である。

この式 (5.27) を使って、図 5.5 で示された (2+1) カット解のインスタントン極限 $N_2^{(M)} \rightarrow 1$ の古典作用を求めてみよう。最後の固有値 μ_N は、ステップ型の特徴から $\mu_N = \alpha + 2\pi i$ に配位される。従って、この励起の古典作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{inst}}(\alpha + 2\pi i) &= \frac{N}{4\pi i \lambda} (\alpha + 2\pi i)^2 + N V_{\text{int}}(\alpha + 2\pi i) - \left(\frac{N}{4\pi i \lambda} \alpha^2 + N V_{\text{int}}(\alpha) \right) \\ &= \frac{N\alpha}{\lambda} + i \frac{\pi N}{\lambda} \\ &= \pi N \sqrt{2/\lambda} + \dots, \quad (|\lambda| \gg 1), \end{aligned} \quad (5.28)$$

と見積もることが出来る。ここでは相互作用項の周期性 $V_{\text{int}}(\alpha + 2\pi i n) = V_{\text{int}}(\alpha)$ 及び端点 α の強結合極限 $|\lambda| \gg 1$ での値 (5.13) を用いた。

ここで導出した S_{inst} は、最後の固有値 μ_N に関する反作用の効果を無視しているものの、DMP 解の周回積分 (5.25) から導かれる D2 ブレーンインスタントンの古典作用 $S_{\text{inst}}^{\text{D2}}$ [47, 76] と一致する。⁵後で示すように、これは反作用の効果を含めても D2 ブレーンインスタントンとの一致が見られる。従ってこの定量的な一致から、ABJM 行列模型のステップ型

⁵マルチカット解から導かれる古典作用の実部については、式 (5.28) で示したように D2 ブレーンインスタントン [47, 76] との一致が見られる。一方で、虚部は先行研究の結果と比べて余計な項 $iN\pi/\lambda = i\pi k$ が出てしまい一致が見られない。これら虚部は、古典作用の位相因子である。一般に鞍点法を用いて評価された位相因子は、積分経路の変更の仕方に依存する。従って反作用を無視した大雑把な本解析 (5.28) では、位相因子が一致する必要までは無いと判断出来る。

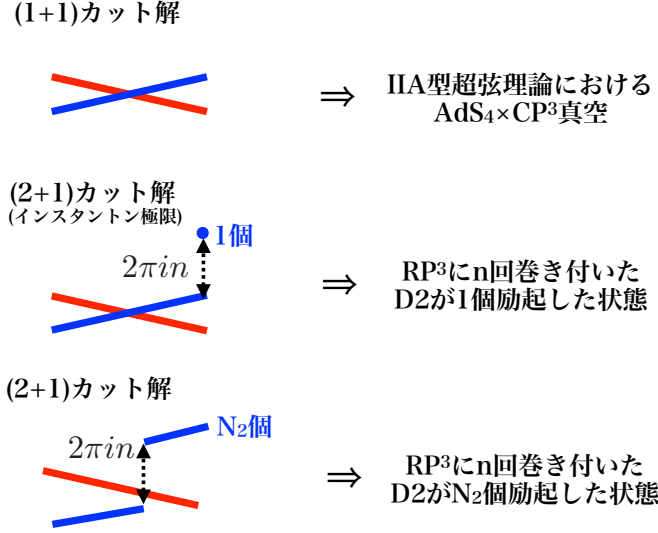


図 5.6: 定量的な証拠に基づくマルチカット解と D2 ブレーンインスタントンの関係性。ステップ型 (2+1) カット解は D2 ブレーンインスタントンの凝縮状態と予想出来る。

マルチカット解は、D2 ブレーンインスタントンが複数個集まった凝縮状態 (condensations) であると予想付く。⁶

図 5.6 は、この主張を概略図でまとめたものである。一般的なステップ型 (2+1) カット解には、2つのパラメータが存在する。それは、ステップを特徴付ける正の整数 n と DMP 解から励起した固有値の数 N_2 である。これら 2つのパラメータは、重力双対側では何に対応するだろうか。インスタントン極限の解析 (5.28) は、以下のように $2\pi i n$ だけ離れたステップ型 (2+1) カット解の場合に拡張することが出来る。

$$S_{\text{inst}}(\alpha + 2\pi i n) = \pi n N \sqrt{2/\lambda} + \cdots, \quad (|\lambda| \gg 1). \quad (5.29)$$

この古典作用は、D2 ブレーンが RP^3 に 1 回巻き付いた古典作用の n 倍である。従って n は、D2 ブレーンが RP^3 に巻き付いた回数を特徴付けるパラメータと考えることが出来る。また N_2 は、先に述べたように RP^3 に n 回巻き付いている D2 ブレーンの数であるとみなせる。以上の素朴な考察から、パラメータ (n, N_2) を持つステップ型 (2+1) カット解は、 n 回 RP^3 に巻き付いた D2 ブレーンが N_2 個存在する励起状態に相当すると考えられる。

⁶(2+1) カット解からの寄与は、 $N_2^{(M)}$ が全体の固有値の数 N と比べてどのくらいの大きさを持つかに依存する。分岐が形成されるほど固有値が多くない $N_2^{(M)}/N \sim \mathcal{O}(1/N)$ の場合、この解からの寄与は $\mathcal{O}(e^{-N})$ である。従ってこの場合には、 $1/N$ に関する trans-series に現れる指数関数的な寄与として効いてくる。従って、この場合には (2+1) カット解を D2 ブレーンインスタントンの凝縮状態とみなしても問題無いと考えられる。一方、分岐が十分に形成された $N_2^{(M)}/N \sim \mathcal{O}(1)$ の場合には、この寄与は $\mathcal{O}(e^{-N^2})$ である。この場合には、形式的な展開である trans-series には含まれない寄与になってしまい、このような寄与が DMP 解からの補正として現れるかどうか分からない。

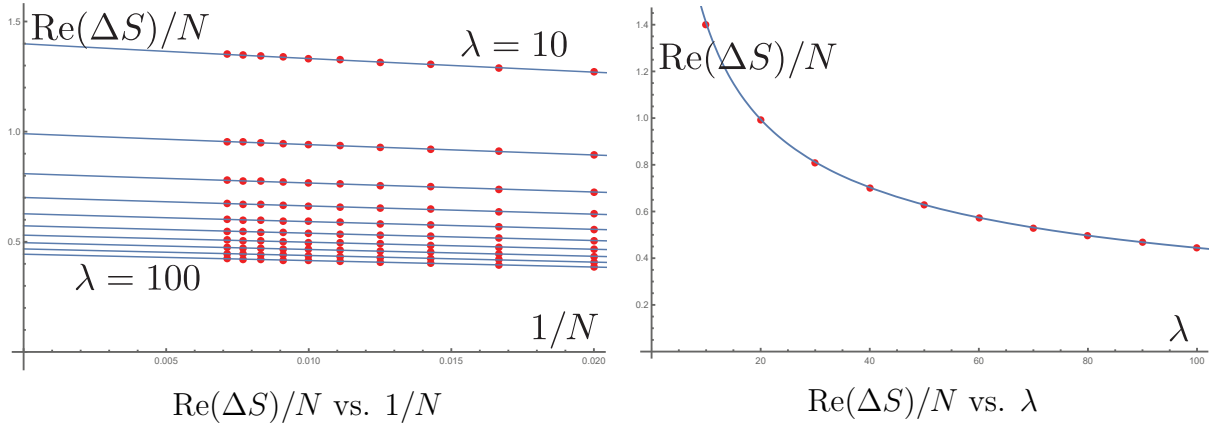


図 5.7: (左図:) Newton 法を用いて導出した古典作用の実部の N 及び λ 依存性。 ΔS は DMP 解とステップ型 (2+1) カット解のインスタントン極限の自由エネルギーの差を評価した値で、インスタントン古典作用 S_{inst} に相当する。赤点が各 (N, λ) で評価した $\Delta S/N$ の実部である。青線は、各 λ でこれらをラージ N 極限に外挿した線である。(右図:) 赤点は外挿された $\Delta S(\lambda)|_{N \rightarrow \infty}/N$ である。青線は、IIA 型超重力解で予言されている D2 ブレーンインスタントン (5.23) の理論値 $\pi\sqrt{2/\lambda}$ である。これらは良く一致している。

数値解析

古典作用 (5.28) の見積もりは、固有値 μ_N に関する反作用を含めていないという意味で大雑把な見積もりである。特に $\mu = \alpha + 2\pi i$ は、反作用を無視した $0 = V'_{\text{eff}}(\mu) = \mu/2\pi i\lambda + V'_{\text{int}}(\mu)$ の解ではない。マルチカット解のインスタントン極限から、大雑把に $\mu = \alpha + 2\pi i$ 辺りに励起した状態で配位が安定することは、これが反作用をきちんと含めた場合の解であることを示唆している。従って、古典作用 S_{inst} と D2 ブレーンインスタントンの一致をきちんと確かめるためには、固有値 μ_N の反作用を含めた評価が必要がある。

原理的には、ステップ型 (2+1) カット解の自由エネルギーを、積分形式 (5.17) を用いて評価して、インスタントン極限 $N_2^{(M)} \rightarrow 1$ を取れば反作用が含まれた古典作用が評価出来る。⁷しかし ABJM 行列模型におけるステップ型 (2+1) カット解の解析は技術的に難しかったため、本研究では Newton 法による数値解析を用いた自由エネルギーの評価を行った。

図 5.7 は、数値解析の結果である。この結果は、反作用を含めた古典作用 S_{inst} が、大雑把な見積もり (5.28) と同様に D2 ブレーンインスタントンと良く一致していることを示している。⁸以上より、大雑把な見積もり (5.28) で示したようにステップ型マルチカット解と ABJM 理論における D2 ブレーンインスタントンは定量的に一致すると言える。

⁷付録 C.3 では、ここで使用するインスタントン古典作用における反作用に関する議論を記載した。

⁸図 5.7 では、 $N_2^{(M)} = 1$ の場合について D2 ブレーンインスタントンとの一致を確かめた。本研究では、Newton 法を用いて $N_2^{(M)} = 2$ の場合も調べた。この解析もまた、D2 ブレーンインスタントンが 2 励起した状態と反作用も含めてマルチカット解の古典作用が一致することが確かめられた。本論文では、 $N_2^{(M)} = 2$ の場合における数値解析の結果の記載は冗長的であるため割愛する。

5.4.3 pure $U(N)$ CS 行列模型におけるラージ N インスタントン

この小節では、ABJM 行列模型におけるステップ型マルチカット解のインスタントン極限の解析を、pure $U(N)$ CS 行列模型 (4.1) の場合に適用してみると何が見えるのかを議論する。

pure $U(N)$ CS 行列模型におけるステップ型ツークット解 (4.24) を考える。図 5.8 左で示したように、 $n = 1$ の場合でインスタントン極限 $N_2 \rightarrow 1$ を取ると、この解はワンカット解 (4.9) からのインスタントン励起状態に見える。この古典作用を、ABJM 行列模型の場合 (5.28) と同様に大雑把に評価してみると

$$\begin{aligned}
 S_{\text{inst}}(b + 2\pi i) &= N (V_{\text{eff}}(b + 2\pi i) - V_{\text{eff}}(b)) \\
 &= \frac{N}{4\pi i \lambda} (b + 2\pi i)^2 + N V_{\text{int}}(b + 2\pi i) - \left(\frac{N}{4\pi i \lambda} b^2 + N V_{\text{int}}(b) \right) \\
 &= \frac{Nb}{\lambda} + i \frac{N\pi}{\lambda} \\
 &= 2\pi i N + \dots, \quad (|\lambda| \gg 1),
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

である。ここで、 b はワンカット解の端点 (4.10) である。また V_{eff} 及び V_{int} は、ABJM 行列模型の場合 (5.26) で定義した量を pure $U(N)$ CS 行列模型の場合でも同様に定義した量である。なお、この評価も反作用を無視した解析であるが、ABJM 行列模型の場合の結果を踏まえると、反作用の効果によって古典作用が大きく変化することはないと考えられる。

さて、pure $U(N)$ CS 行列模型の場合で、図 5.8 左で示したステップ型ツークット解のインスタントン極限から見つかる古典作用 (5.30) に対応する非摂動効果はあるだろうか。この古典作用 (5.30) は、研究 [25, 57] によって知られている M2 ブレーンインスタントン

$$\text{M2 ブレーンインスタントン: } S_{\text{inst}}^{\text{M2}} = \frac{2\pi t}{g_s} = 2\pi i N, \quad (|t| \gg 1), \tag{5.31}$$

と定量的に一致する。ここで $t := i g_s N = 2\pi i \lambda$ である。この一致から、ABJM 行列模型の場合と同様に、pure $U(N)$ CS 行列模型におけるステップ型ツークット解は M2 ブレーンインスタントンの凝縮状態であるとみなすことが出来る。

5.4.4 他のマルチカット解におけるインスタントン極限

ここまでの小節で、ABJM 行列模型、pure $U(N)$ CS 行列模型のステップ型マルチカット解のインスタントン極限の物理的な役割を議論してきた。しかし、pure $U(N)$ CS 行列模型の場合で示してきたように、一般的な CS 行列模型のマルチカット解はステップ型だけでは尽くされない。

例えば、図 5.8 右で示したような pure $U(N)$ CS 行列模型におけるワンカット解と対称なステップ型ツークット解の重ね合わせ (4.41) のインスタントン極限 $N_1^{(2)}, N_2^{(2)} \rightarrow 1$ を考

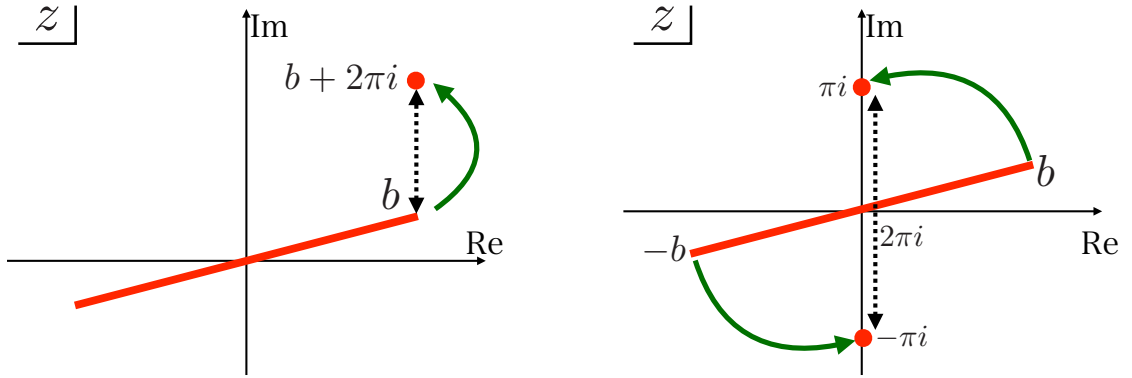


図 5.8: (左図:) ステップ型ツーカット解 (4.24) のインスタントン極限 $N_2 \rightarrow 1$ 。これは S_{M2} と定量的に一致する。(右図:) ワンカット解と対称ステップ型ツーカット解の重ね合わせ (4.41) のインスタントン極限 $N_1^{(2)}, N_2^{(2)} \rightarrow 1$ から見つかる新しい形のラージ N インスタントン。このような形の励起状態は、1つの固有値の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z)$ を考えているだけでは見つからない。

えてみよう。この配位は、2つの固有値が強く相互作用し合ってバランスした解であり、単独では安定することが出来ない配位である。このように重ね合わせ型のマルチカット解は、2つ以上の固有値が同時にトンネル効果として励起する新しい形のラージ N インスタントンを作り出す。

しかし、これら重ね合わせ型マルチカット解由来のラージ N インスタントンの古典作用の評価は、相互作用の複雑さから技術的に難しい。これらの寄与と、これまでに知られている CS 行列模型の非摂動効果 [25, 57, 58, 59, 47, 76] との定量的な関係性について調べることは、今後の展望である。

第6章 結論

本博士論文は、ゲージ/重力対応を通じて、Chern-Simons (CS) 行列模型のラージ N 極限の解析から導かれる超弦理論の非摂動的側面について、私達の研究成果 [21, 22] に基づいてまとめた。以下では、各章の内容を簡単に振り返り、今後の展望を述べる。

各章のまとめ

第1章では、本研究の背景と導入を述べた。まずは量子重力理論の候補として超弦理論が有力であることと、超弦理論は非摂動的側面の理解が十分でないことを紹介して、本研究へ向けての動機付けを行った。またゲージ/重力対応と呼ばれる双対性から、超弦理論の非摂動的側面をゲージ理論の解析から研究する試みが、これまでに提案されていることを紹介した。

第2章では、ゲージ/重力対応を通じて超弦理論との関係が期待されている3次元超対称 Chern-Simons-matter (CSM) 理論を紹介した。特に CSM 理論の1つである ABJM 理論に着目し、この理論の分配関数に関する詳細な評価から超弦理論や M 理論の非摂動効果が解析されつつあることを示した。

本研究では、IIA 型超弦理論の低エネルギー極限との対応が期待されている ABJM 理論の 'tHooft 極限 ($N \rightarrow \infty, \lambda := N/k$: 固定) に着目し、その非摂動的側面を調べることを目標とした。分配関数の $N \rightarrow \infty$ に対する補正は、ゲージ/重力対応を通じて重力の量子効果と関係し、特にその非摂動効果は超弦理論における D ブレーンの寄与と関係することが期待される。

更に本章では、局所化と呼ばれる手法によって ABJM 理論を含む S^3 上の超対称 CSM 理論の分配関数が、CS 行列模型と呼ばれる比較的簡単な理論 (2.12), (2.13) に還元されることを紹介した。

第3章では、第2章で導出された CS 行列模型を解析する準備として、Hermitian 行列模型におけるラージ N 極限の解析法 [19] を学んだ。この手法は、第4, 5章で示したように CS 行列模型 (2.12), (2.13) の解析に簡単に拡張することが出来る。一般に行列模型のラージ N 極限を知るためには、行列固有値に関する鞍点方程式を解く必要がある。本章では、この鞍点方程式を解く一般論を述べ、この解析からどのように物理量が評価されるのかを示した。以上により、CS 行列模型 (2.12), (2.13) を 'tHooft 極限で調べる準備が整ったと言える。

第4章では、私達の研究 [21, 22] の成果に沿って、まずは CS 行列模型の中で最も単純な pure $U(N)$ CS 行列模型 (2.12) の 'tHooft 極限を調べた結果をまとめた。CS 行列模型は Hermitian 行列模型とよく似た構造を持つものの、その鞍点方程式には、Hermitian 行列模型には現れない様々な無限個のマルチカット解 (図 4.1) が存在する。マルチカット解の存在は、第3章で学んだ行列模型の一般論に従うと、理論のラージ N 極限における非摂動効果の存在や、新しい重力解の存在を示唆している。本章では、このマルチカット解が CS 行列模型特有の相互作用項の働きによって現れることを示し、その解析解を構成した。

CS 行列模型の 'tHooft 極限に、超弦理論の非摂動効果と関係する可能性を持った様々なマルチカット解が存在し、その解析解が構成出来ることを示したのは本研究が初めてである。

第5章では、第4章の解析を ABJM 行列模型 (2.13) の場合に拡張した。ABJM 行列模型もまた、'tHooft 極限にこれまでに知られてこなかった無限個のマルチカット解 (図 5.1) が存在する。そして ABJM 行列模型における無数のマルチカット解も、第4章の議論の拡張から解析解が構成可能であることを示した。

第5章の最終節 5.4 では、これら解析的に構成されたマルチカット解の物理的な役割に着目した。AdS₄ × CP³ 上の IIA 型超弦理論には、D2 ブレーンインスタントンと呼ばれる非摂動効果が存在する。本研究では、ABJM 行列模型のステップ型 (2+1) カット解のインスタントン極限が、D2 ブレーンインスタントンの古典作用と一致すること (5.28) を示した。この定量的な証拠に基づく、ステップ型 (2+1) カット解は D2 ブレーンインスタントンが複数個集まった凝縮状態と予想出来る。

IIA 型超弦理論極限 (2.5) において、D2 ブレーンインスタントンの凝縮状態を特徴付ける解はこれまでに発見されていない。従って凝縮状態と予想付く配位の発見は、本研究が示した新しい超弦理論の非摂動的側面である。ABJM 行列模型は、異なる解析手段から M 理論極限における非摂動効果の解析 [30, 31] が進展しているが、本研究で示したマルチカット解の更なる解析から、今後は IIA 型超弦理論極限における非摂動的側面の更なる理解が期待される。

今後の展望

以下では、本研究における今後の展望と、それに向けての具体的な課題を述べる。

本研究では、幾つかの CS 行列模型における様々なマルチカット解を解析的に構成出来ることが分かったが、その物理的な役割に関しては全てを明らかにすることは出来なかった。特にステップ型に相当しない重ね合わせ型のマルチカット解が、重力双対でどのような役割を持つのか明らかにすることが、今後の具体的な方向性として挙げられる。

ABJM 行列模型の場合だと真空解は DMP 解で与えられるため、他のマルチカット解は (経路積分に効いてくる物理的な配位であると仮定すると) $1/N$ 展開における指数関数的な非摂動的な補正項である。特に重ね合わせ型マルチカット解のインスタントン極限を取った配位は、素朴には D2 ブレーンインスタントンと同様で $\mathcal{O}(e^{-N})$ 程の大きさを持った寄

与であるため、 $1/N$ 展開の指数関数補正として効いてくる可能性がある。従って本研究で示したステップ型 (2+1) カット解におけるインスタントン極限の場合のように、他のマルチカット解からの寄与も D ブレーンの非自明な巻き付き等の超弦理論の非摂動効果を予言しているとしたら興味深い。

また本研究の結果と関係しそうな先行研究として、1つのゲージ理論の幾つかの励起状態が幾つかの重力解と対応する“バブリング幾何”(bubbling geometry)[79]と呼ばれる解析が、4次元の $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論において知られている。この解析において知られている重力解は、幾つかのモジュライ的な自由パラメータを持っており、そのパラメータは対応するゲージ理論側の励起状態が持つパラメータと対応している。

本研究で発見した様々なマルチカット解は、分岐内に貯まった固有値の数や、ステップの整数など、幾つかの連続的に変化させられる自由パラメータを持った真空からの励起状態と考えられる。従って、マルチカット解に対応する重力解があるとすれば、これにもまたバブリング幾何の場合と同様に自由パラメータの存在が示唆される。

バブリング幾何では、 $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論側の液胞図 (droplet) と呼ばれる幾何的な情報が、重力解の持つ幾何と対応関係を持つ。CS 行列模型において、ラージ N 極限での解の幾何的な特徴を表す量は固有値密度 $\rho(Z)$ である。従って、各マルチカット解の固有値密度 $\rho(Z)$ から読み取られるスペクトル曲線 $y(Z)$ 等の理解が進展すれば、より CS 行列模型の重力双対に関する理解が進展すると期待出来る。

特に、真空解から大きく変化した AdS 時空以外の重力解と、CSM 理論の励起状態の対応関係が見つかれば、ゲージ/重力対応の適用範囲を広げることに繋がり、超弦理論の非摂動的側面の理解に進展をもたらすことが出来る。

pure $U(N)$ CS 行列模型における重ね合わせ型マルチカット解 (4.41) の場合で、レンズ空間上の CS 行列模型のリゾルヴェントとこれが一致したことは、マルチカット解由来の幾何を調べる上で手がかりになるかもしれない。研究 [23, 24, 80, 81, 82] では、レンズ空間上の CS 行列模型のバブリング幾何的な描像が調べられている。これら先行研究との比較から、CS 行列模型における様々な固有値密度と幾何の関係が明らかになると面白い。

さて、CS 行列模型の重力双対の更なる理解に向けては、本研究では解析や理解が困難だった以下の幾つかの具体的な課題に取り組む必要があると考えられる。

1. CS 行列模型のマルチカット解全てを含む一般解 (4.44),(5.17) の積分後の形式の導出。
2. マルチカット解やそこから予想される新しい形のラージ N インスタントンの自由エネルギーの解析的な評価。
3. ステップ型マルチカット解において現れる固有値密度の特異性 (対数発散) の物理的な意味の理解。

課題 1 は、積分 (4.44),(5.17) の複雑さから直接的には難しいが、付録 D で示した正則性を用いた別の導出法などが、更なる解析の手がかりになると考えられる。

課題2の解決は、知られている超重力解等との一致を確かめる上で必要である。この課題もまた、積分の複雑さ等の技術的な困難があるが、数値解析の併用等で理解を進展させたい。

課題3はやや抽象的であるが、ステップ型マルチカット解に見られる共通した振る舞いに物理的な役割があるとするれば理解したい点である。この課題に関連した私達の研究は、付録B.3で取り上げているカस्प型ポテンシャルの行列模型のラージ N 極限 [27] である。この研究では、CS 行列模型よりも単純な行列模型を用いて、対数発散を持つ固有値密度について考察した。このように、ある程度単純化された模型や、同様の現象がこれまでに見られている行列模型等の調査から、CS 行列模型における重力双対の理解が更に進展することを期待したい。

以上が、今後の展望とそれに向けて解決すべき課題である。

終わりに

重力は、身近に感じることの出来る力でありながら、量子論的な振る舞いを含めたその全てを理解しようとするとは難しい。ゲージ/重力対応は、超弦理論の低エネルギー極限に関する双対関係であるため、その全貌を明らかにするにはやや厳しい方向性であると考えられるが、本研究で用いた $1/N$ 展開法のようなこれまでに発展してきた量子場の場論の解析手段から超弦理論に迫れるという点で魅力あふれる方向性である。今後もこの方向性から、超弦理論の非摂動的側面に関する新たな進展が生まれて、その全貌に近づく示唆を与えることを期待したい。

謝辞

本博士論文作成にあたり、協力して頂いた全ての方々に感謝致します。特に、指導教員で共同研究者の森田健氏には修士課程2年間、博士課程3年間で労を厭わず多くの指導をして頂きました。また共同研究という形で私の興味に沿った研究テーマを下さったことに深く感謝致します。

本博士論文の審査に関わって下さった自然科学系教育部所属の土屋麻人氏、山崎昌一氏、三重野哲氏、森田健氏に感謝致します。特に審査委員長を務めて下さった土屋麻人氏には、審査時に本論文の結論に関わる重要な指摘をして頂きました。

静岡大学で私の指導に尽力して下さった理学部物理学科のスタッフの方々に感謝申し上げます。土屋麻人氏には、本研究の方向性に関する議論や、日々のゼミや勉強を通じて手厚い指導をして頂きました。青山昭五氏には、学部生の頃に素粒子理論の基礎と物理の学習方法についての哲学を指導して頂きました。特にご両名には、この場を借りて深く感謝致します。

私と時間をかけて議論して下さった静岡大学素粒子原子核研究室のメンバーに感謝申し上げます。特に同級生の畠山洸太さん、松浦夏穂さんには、学部生の頃からの長い付き合いの中で様々な議論や相談に乗ってもらいました。

最後に、私を近くで見守って下さった両親に感謝致します。

静岡大学大学院 自然科学系教育部情報科学専攻 杉山健斗

付 録 A 第3章における補足計算

本付録では、第3章の本文中において省略した幾つかの計算手順について補足解説する。節 A.1 では、Hermitian 行列模型の積分測度 dM を対角化する手順 (3.5) を示す。節 A.2 では、Migdal 積分形式 (3.20) の導出法を紹介する。最後に節 A.3 では、自由エネルギーのラージ N 極限における形式 (3.12) を Lagrange 未定乗数法を用いて更に簡単化する方法を紹介する。

A.1 Vandermonde 行列式の導出

この節では、Hermitian 行列模型の積分測度 dM (3.2) を、対角化する手順 (3.5) を補足紹介する。分配関数 (3.1) の場合のように、被積分関数が行列固有値のみに依存した形式で与えられる時、行列模型の測度 dM は行列固有値に関する N 自由度積分に書き換えることが出来る。まず一般に Hermitian 行列 M は、ユニタリ行列 U を用いて

$$M = U \Lambda U^\dagger, \quad \Lambda = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (\text{A.1})$$

と対角化することが出来る。ここで $z_i, (i = 1, \dots, N)$ は行列 M の固有値で、 Λ は対角化された Hermitian 行列である。この書き換えの下で、 dM は

$$dM = dU \prod_{i=1}^N dz_i J(\{z_i\}), \quad (\text{A.2})$$

と与えられる。 dU はユニタリ行列に関する積分測度で、被積分関数が行列の固有値にしか依存しない場合、単純な定数

$$\left[\int dU \right] = \frac{(2\pi)^{N(N+1)/2}}{\prod_{n=0}^{N-1} n!}, \quad (\text{A.3})$$

である。また $J(\{z_i\})$ は、この変換に際して現れる Jacobi 行列式である。

Jacobi 行列式 $J(\{z_i\})$ の具体的な表式を考えよう。Faddeev-Popov の方法に従って、以下の挿入を考える。

$$1 = \frac{1}{c} \Delta^2(\{z_i\}) \int dU \prod_{i < j}^N \delta^2([UMU^\dagger]_{ij}), \quad (\delta^2(M_{ij}) := \delta(\text{Re} M_{ij}) \delta(\text{Im} M_{ij})). \quad (\text{A.4})$$

c は後で決定する任意定数である。またここで $c^{-1}\Delta^2(\{z_i\})$ は、右辺の積分の逆数で定義された量である。これを用いると

$$\begin{aligned}\int dM &= \frac{1}{c} \int dM \int dU \Delta^2(\{z_i\}) \prod_{i<j}^N \delta^2([UMU^\dagger]_{ij}) \\ &= \frac{1}{c} \int d(UMU^\dagger) \int dU \Delta^2(\{z_i\}) \prod_{i<j}^N \delta^2([UMU^\dagger]_{ij}) \\ &= \frac{1}{c} \int dU \int \prod_{i=1}^N dz_i \Delta^2(\{z_i\}),\end{aligned}\tag{A.5}$$

である。ここで2番目の等式では、積分測度 dM が任意のユニタリー変換の下で不変であることを用いた。3番目の等式では、デルタ関数を用いて $d(UMU^\dagger)$ の非対称部分の積分を実行した。この式 (A.5) と、式 (A.2) を比較すれば $J(\{z_i\}) = c^{-1}\Delta^2(\{z_i\})$ であることが分かる。

式 (A.4) より、 $\Delta^2(\{z_i\})$ は

$$\begin{aligned}\Delta^{-2}(\{z_i\}) &= \frac{1}{c} \int dU \prod_{i<j}^N \delta^2([UMU^\dagger]_{ij}) \\ &= \frac{1}{c} \int dU \prod_{i<j}^N \delta^2([U\Lambda U^\dagger]_{ij}),\end{aligned}\tag{A.6}$$

と書き換えることが出来る。2番目の等式では、測度 dU が任意のユニタリー変換の下で不変であることを用いて行列 M を対角化した。被積分関数は、デルタ関数の積であるため、積分で主要で効いてくる部分は行列 $U\Lambda U^\dagger$ の非対角成分が0になる配位へと局在する。従って U は、この極限で

$$U_{ij} \approx U_{ij}^{(0)} = e^{i\alpha_i} \delta_{ij}, \quad (-\pi \leq \alpha \leq \pi),\tag{A.7}$$

を取る。 U の $U^{(0)}$ 周りでの展開を $U = (1 + ih)U^{(0)}$ と書く。ここで h は微小な非対角 Hermitian 行列である。すると、積分 (A.6) は

$$\begin{aligned}\Delta^{-2}(\{z_i\}) &= \frac{1}{c} \int dU^{(0)} \int \prod_{i<j}^N d\text{Re}h_{ij} d\text{Im}h_{ij} \delta^{(2)}(h_{ij}(z_i - z_j)) \\ &= \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{-2},\end{aligned}\tag{A.8}$$

と評価することが出来る。ただしここで定数 c について

$$c = \left[\int dU^{(0)} \right] = (2\pi)^N N!,\tag{A.9}$$

と選んだ。以上より、被積分関数が行列固有値 z_i , ($i = 1, \dots, N$) にしか依らない場合、積分測度 dM は

$$dM \propto \prod_{i=1}^N dz_i \Delta^2(\{z_i\}), \quad \Delta(\{z_i\}) = \prod_{i<j}^N (z_i - z_j), \quad (\text{A.10})$$

と書き換えることが出来る。

A.2 Migdal 積分形式の導出

この節では、Hermitian 行列模型の鞍点方程式をリゾルヴェントを用いて解く際に有用な Migdal 積分形式 (3.20) の導出法を補足紹介しよう。リゾルヴェント $W(z)$ は、ポテンシャルが多項式型 (3.4) で与えられる場合、以下の性質を持つ関数である。

性質 1: $W(z)$ は、分岐 $z \in \mathcal{C}$ の外側では定義 (3.14) より正則関数である。

性質 2: $W(z)$ は、分岐 $z \in \mathcal{C}$ 上では不連続性を持ち、鞍点方程式 (3.17) を満足する。

性質 3: $W(z)$ は、定義 (3.14) から漸近条件 (3.19) を満足する。

一般に、 \mathcal{C} が l 個の分岐 $[a_j, b_j]$, ($j = 1, \dots, l$) の足し上げで与えられるマルチカット解の場合を考えよう。 $W(z)$ における上記の性質 1, 性質 2 から、これらを満たす $W(z)$ の一般形は

$$W(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \prod_{i=1}^N \sqrt{(z - a_i)(z - b_i)} \right), \quad (\text{A.11})$$

と書くことが出来る。ここで $M(z)$ はある正則関数である。式 (A.11) を用いると、 $M(z)$ は

$$M(z) = \frac{V'(z) - 2W(z)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(z - a_i)(z - b_i)}}, \quad (M(z) : \text{正則関数}), \quad (\text{A.12})$$

と書くことが出来る。また $M(z)$ は、自明な式変形から

$$M(z) = - \oint_{w=z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{M(w)}{z - w} = \oint_{w=\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{M(w)}{z - w}, \quad (\text{A.13})$$

である。ここで2番目の等式では、 $M(w)$ が正則関数であることを用いて、積分路を $w = z$ 周りの閉経路から無限遠周りの閉経路に変更した。

ここで式 (A.13) の $M(w)$ に、式 (A.12) を代入すると

$$\begin{aligned} M(z) &= \oint_{w=\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{z - w} \frac{V'(w) - 2W(w)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(w - a_i)(w - b_i)}} \\ &= \oint_{w=\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{z - w} \frac{V'(w)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(w - a_i)(w - b_i)}}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

と書き換えられる。2 番目の等式では、 $W(z)$ に関する漸近的な性質 3 から、無限遠周りでの留数の評価を行うとリゾルヴェント部分を積分した項が 0 になることを用いた。積分 (A.14) は、再び Cauchy の定理を用いて経路の変更を行ってやると

$$\begin{aligned} M(z) &= - \oint_{w=z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{z-w} \frac{V'(w)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(w-a_i)(w-b_i)}} - \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{z-w} \frac{V'(w)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(w-a_i)(w-b_i)}} \\ &= \frac{V'(z)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(z-a_i)(z-b_i)}} - \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{z-w} \frac{V'(w)}{\prod_{i=1}^N \sqrt{(w-a_i)(w-b_i)}}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

である。ここで C_j は、分岐 $[a_j, b_j]$ を反時計回りに一周する閉経路である。

以上より、導出された $M(z)$ に関する式 (A.15) を、式 (A.11) に代入すると

$$W(z) = \sum_{j=1}^l \oint_{C_j} \frac{dw}{4\pi i} \frac{V'(w)}{z-w} \prod_{i=1}^l \sqrt{\frac{(z-a_i)(z-b_i)}{(w-a_i)(w-b_i)}}, \quad (\text{A.16})$$

が得られる。

なお、ポテンシャル $V(z)$ が多項式型ポテンシャル (3.4) のような正則関数ではない場合、性質 1 が満たされない。この時、出発点となる式 (A.11) における関数 $M(z)$ の正則性が保証されず、以下に続く正則性を用いた議論が適用出来ない。

ところが、最終的に導出された Migdal 積分形式 (A.16) は、ポテンシャル $V(z)$ が正則でない場合でも鞍点方程式 (3.17) の解になっていることを簡単に示すことが出来る。従って本論文では、これが鞍点方程式の解になっていることを根拠に、ポテンシャルが正則でない幾つかの問題にも Migdal 積分形式 (A.16) を適用している。

A.3 Lagrange 未定乗数法を用いた自由エネルギーの簡単化

この節では、ラージ N 極限での自由エネルギーの式 (3.12) について Lagrange 未定乗数法を用いた簡単化を紹介する。一般的なポテンシャル $V(z)$ を持つ Hermitian 行列模型の有効作用は、固有値密度 $\rho(z)$ を用いると

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}(\{z_i\}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(z_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \log |z_i - z_j| \\ &= \int_{\mathcal{C}} dz \rho(z) V(z) - \text{P} \int_{\mathcal{C}} dz \rho(z) \int_{\mathcal{C}} dw \rho(w) \log |z - w|, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

と与えられる。ここで \mathcal{C} は固有値密度 $\rho(z)$ の台である。一般的に、 l 個の台 $[a_j, b_j]$ ($j = 1, \dots, l$) を持つマルチカット解の場合を考えよう。各領域 $[a_j, b_j]$ にはそれぞれ N_j 個の固有値が蓄積しているとし、従って導出された固有値密度は規格化条件 (3.22) を満たしているとする。

ここで規格化条件 (3.22) に対する Lagrange 未定乗数 κ_j を導入する。この未定乗数を用いて変形された有効作用は、Lagrange 未定乗数法の一般論に従って

$$S_{\text{eff}}(\{z_i\}) \rightarrow S_{\text{eff}}(\{z_i\}, \{\kappa_j\}) := S_{\text{eff}}(\{z_i\}) + \sum_{j=1}^l \kappa_j \left(1 - \frac{N}{N_j} \int_{a_j}^{b_j} \rho(z) dz \right), \quad (\text{A.18})$$

と与えられる。

$S_{\text{eff}}(\{z_i\})$ を固有値密度 $\rho(z)$ で変分することを考えてみよう。すると最小作用の原理から、これは

$$\kappa_j = \frac{N_j}{N} \left[V(z) - 2P \int_C dw \rho(w) \log |z - w| \right], \quad z \in [a_j, b_j], \quad (j = 1, \dots, l), \quad (\text{A.19})$$

を与える。未定乗数 κ_j は定数なので、これは台 $[a_j, b_j]$ 中で右辺の量が同じ値をとることを示している。またこの右辺は、1つの固有値 z についての古典的なポテンシャル $V(z)$ と相互作用を足し合わせた有効ポテンシャル (C.2) の分岐 $[a_j, b_j]$ 上での値を N_j/N 倍したものに对应している。ここから、有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z)$ は、 $[a_j, b_j]$ 上で平坦な振る舞いを見せることが見て取れる。 $V_{\text{eff}}(z)$ の概形は、図 C.1 左を参照せよ。

さて、式 (A.19) で与えられた κ_j を用いれば自由エネルギーの形式 (3.12) は

$$\begin{aligned} F = -\log Z_N &\approx N^2 \left[\int_C dz \rho(z) V(z) - P \int_C dz \rho(z) \int_C dw \rho(w) \log |z - w| \right] + \dots \\ &= N^2 \left[\sum_{j=1}^l \frac{\kappa_j}{2} + \frac{1}{2} \int_C dz \rho(z) V(z) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

と厳密に書き換えることが出来る。最後の形式は、1行目の形式と比べると多重積分が無くなっており、積分の評価が幾分簡単になる。

付 録 B ラージ N 極限の練習問題

本付録では、Hermitian 行列模型のラージ N 極限に関する練習問題を 3 つ記載する。まず節 B.1 では、Gaussian 型に 4 次の相互作用項が加わったポテンシャルの問題を取り上げ、相互作用が入った場合にもラージ N 極限の解析が可能であることを示す。次に節 B.2 では、ラージ N 極限に現れる臨界現象に着目する。特に Gross-Witten-Wadia (GWW) 型相転移と呼ばれるラージ N 相転移を起こす 2 重井戸型ポテンシャルの問題を考え、この相転移が典型的に 3 次相転移であることを示す。最後に節 B.3 では、私達の研究 [27] に基づいてカスプ型ポテンシャルの問題に着目する。特にこの模型の臨界現象に着目し、通常が多項式型ポテンシャルの場合に見られる GWW 型相転移とは異なる振る舞いが現れることを示そう。

B.1 4 次の相互作用を持つポテンシャル

この節では、Gaussian 型に 4 次の相互作用項が加わった

$$V(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{g}{4}z^4, \quad V'(z) = z - gz^3, \quad (g \geq 0), \quad (\text{B.1})$$

を持つ Hermitian 行列模型 (3.1) を考えてみよう。結合定数 g の変化に伴うポテンシャルの形状の変化の様子は、図 B.1 左に記載した。

$V(z)$ の形状から、全ての固有値が原点 $z = 0$ 近傍に蓄積するワンカット解を構成することが出来る。原点对称性から、分岐の端点 a, b は明らかに $a = -b$ を満足する。ワンカット解の Migdal 積分形式 (3.20) を課せば、リゾルヴェントは

$$\begin{aligned} W(z) &= \oint_C \frac{dw}{4\pi i} \frac{w - gw^3}{z - w} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{w^2 - b^2}} \\ &= \frac{1}{2} (z - gz^3) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{g}{2} (b^2 + 2z^2) \right) \sqrt{z^2 - b^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と得られる。分岐の端点は、漸近条件から

$$b = \sqrt{\frac{2}{3g} \left(1 - \sqrt{1 - 12g} \right)}, \quad (\text{B.3})$$

と決定される。固有値密度は、関係式 (3.18) から

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{g}{2} (b^2 + 2z^2) \right) \sqrt{b^2 - z^2} \quad (z \in [-b, b]), \quad (\text{B.4})$$

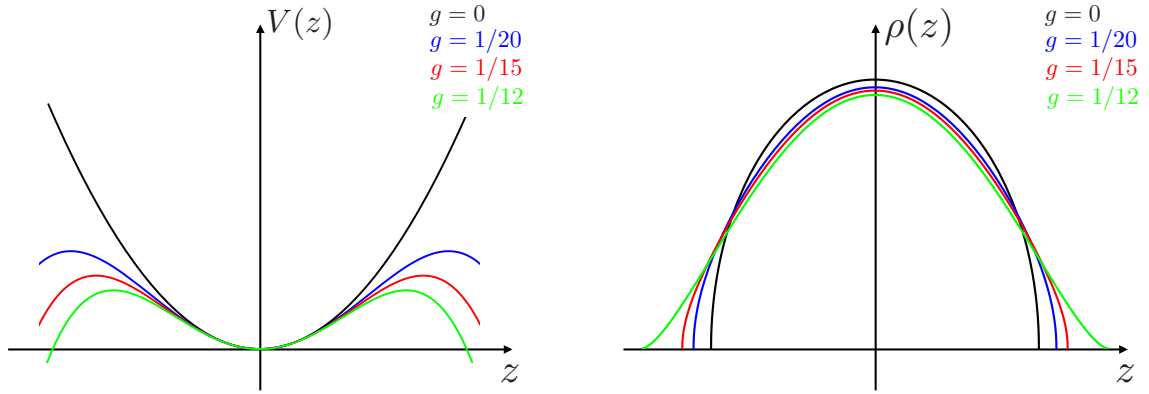


図 B.1: (左図:)4 次の相互作用を持つポテンシャル (B.1)。(右図:) 固有値密度 (B.4)。 $g = 0$ では gaussian 型ポテンシャルに帰着するため、Wigner の半円則 (3.26) を満たすが、強結合になるに連れてずれていく。 $g = g_c = 1/12$ では、端点 b が複素数になってしまうため、 g_c を超えた強結合領域でワンカット解は破綻する。またポテンシャルの視点からは、 $g > g_c$ では原点近傍の窪みが浅くなりすぎてしまい、反発し合う N 個の固有値を留めておけず解が破綻すると考えられる。

と読み取ることが出来る。 $\rho(z)$ の概形は、図 B.1 右にプロットした。この固有値密度を用いると、自由エネルギーはラージ N 極限のリーディングまでで

$$F = -\log Z_N \approx N^2 \left[\frac{b^2}{8} \left(1 - 2 \log \frac{b}{2} \right) + \frac{b^4}{64} \left(1 - 3g + 12g \log \frac{b}{2} \right) - \frac{5gb^6}{256} + \frac{9g^2b^8}{2048} \right] + \dots, \quad (\text{B.5})$$

と得られる。端点 b は式 (B.3) より結合定数 g の関数として与えられている。従って、ラージ N 極限を取った自由エネルギー F のリーディングは、結合定数 g の関数として厳密に与えられる。

この解は、結合定数 g に関する強結合領域 $g \gg 1$ まで接続することは出来ない。ワンカット解で与えられた固有値密度 (B.4) の正值性 $\rho(z) \geq 0$ は、分岐の端点 b を与える式 (B.3) から、端点の実数で無くなってしまう臨界点

$$g_c = \frac{1}{12}, \quad (\text{B.6})$$

を超えた強結合領域で破綻する。すなわち $g > g_c$ では、ワンカット解は破綻し、自由エネルギーのリーディングは式 (B.5) では与えられない。強結合領域 $g > g_c$ で矛盾の無い解は、ここで評価したワンカット解 (B.4) より複雑なマルチカット解である。次節では、このような転移現象が起こる簡単なポテンシャルの問題を紹介する。

B.2 Gross-Witten-Wadia 型相転移

一般に行列模型のラージ N 極限で見られる相転移現象は、ラージ N 相転移と呼ばれる。この節では、ラージ N 相転移の有名な例として、Gross-Witten-Wadia (GWW) 型相転移

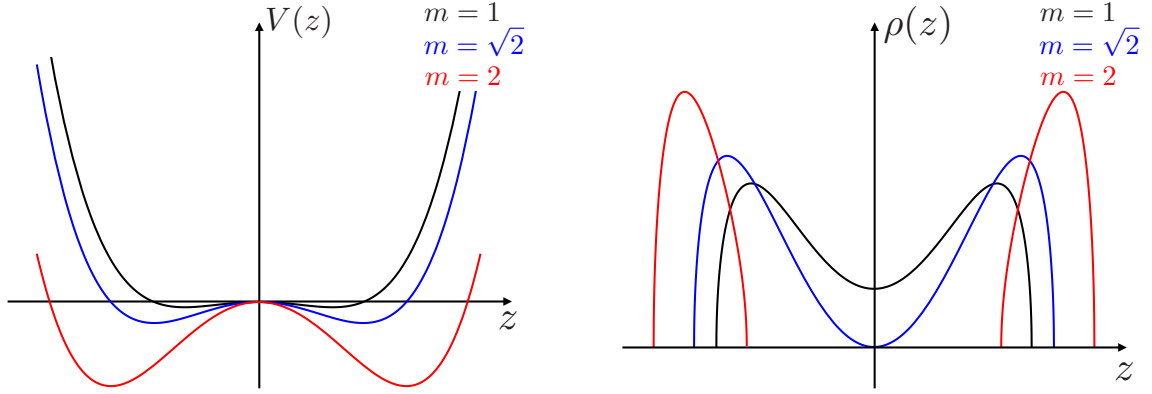


図 B.2: (左図:)2重井戸型ポテンシャル (B.7) の概形。(右図:) 固有値密度 (B.8),(B.11)。 $m = m_c = \sqrt{2}$ では、ポテンシャルの原点近傍の山がせり上がって分岐を切り、ワンカット解とツーカット解の GWW 型相転移が起こる。

[62, 63, 64] を紹介する。¹

以下の2重井戸型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型を考えてみよう。

$$V(z) = -\frac{m^2}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4, \quad V'(z) = -m^2z + z^3, \quad (m \geq 0). \quad (\text{B.7})$$

結合定数 m の変化に伴うポテンシャルの形状は、図 B.2 左に記載した。この模型は、 $m > 0$ の場合では $z = 0, \pm m$ の3点に鞍点を持つポテンシャルである。

m が0に近い時、 $z = 0$ を中心としたワンカット解が鞍点方程式の唯一の解である。ワンカット解の固有値密度は、これまでの解析を繰り返せば

$$\rho_{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \left(-m^2 + \frac{1}{2}(b^2 + 2z^2) \right) \sqrt{b^2 - z^2}, \quad z \in [-b, b], \quad \left(b = \sqrt{\frac{2}{3} \left(m^2 + \sqrt{12 + m^4} \right)} \right), \quad (\text{B.8})$$

と得られる。この解によって特徴付けられる自由エネルギーは、

$$F_{(1)} \approx N^2 \left[\frac{b^2}{8} \left(-m^2 + 2m^2 \log \frac{b}{2} \right) + \frac{b^4}{64} \left(m^4 + 3 - 12 \log \frac{b}{2} \right) - \frac{5m^2b^6}{256} + \frac{9b^8}{2048} \right], \quad (\text{B.9})$$

である。

さて、4次の相互作用を持つポテンシャルの場合と同様に、 $\rho_1(z)$ の分岐内での正値性 $\rho_1(z) \geq 0$ は、式 (B.8) と端点 b の振る舞いから有限の臨界値

$$m_c = \sqrt{2}, \quad (\text{B.10})$$

に達すると破れてしまうことが分かる。従って強結合領域 $m > m_c$ では、ラージ N 極限において最も支配的に効いてくる固有値密度の解はマルチカット解へと転移する。

¹GWW 型相転移の名称の元となった Gross と Witten による研究 [62] と Wadia による研究 [63, 64] は、どちらもあるユニタリー行列模型に関する相転移についての研究である。ここで記載する Hermitian 行列模型の例題は、同じ普遍性クラス (universality class) に属する臨界現象の一例である。

次に、強結合領域 $m > m_c$ での固有値密度の振る舞いを考えてみよう。 $m > m_c$ で支配的となる解は、 $z = \pm m$ 近傍に固有値が $N/2$ 個ずつ蓄積した原点对称なツーカット解である。ツーカット解の Migdal 積分形式を課せば、固有値密度は

$$\rho_{(2)}(z) = \frac{|z|}{2\pi} \sqrt{(z^2 - a^2)(b^2 - z^2)}, \quad z \in [-b, -a], [a, b], \quad \left(a = \sqrt{m^2 - 2}, b = \sqrt{m^2 + 2}\right), \quad (\text{B.11})$$

と得られる。この解は正値性 $\rho_{(2)}(z) \geq 0$ より、確かに $m \geq m_c$ において矛盾無い解であることが端点の振る舞いから確認出来る。また $m = m_c$ では、両分岐 $[-b, -a], [a, b]$ が融合してワンカット解へと転移することも確認出来る。ツーカット解によって特徴付けられる自由エネルギーは、関係式 (3.12) から

$$F_{(2)} \approx N^2 \left[-\frac{m^2}{4} b^2 + \frac{b^4}{8} + \frac{(b^2 - a^2)^2}{2048} \left(5a^4 + 6a^2 b^2 + 5b^4 - 16m^2(a^2 + b^2) - 32 - 64 \log \frac{b^2 - a^2}{4} \right) \right], \quad (\text{B.12})$$

と評価することが出来る。

転移点 $m = m_c$ 近傍の振る舞いに注目してみよう。パラメータ m の関数として与えられた 2 種類の自由エネルギーのラージ N 極限での値 $F_{(1)}, F_{(2)}$ は、 $m = m_c$ で大小関係が入れ替わり、相転移を起こす。 $m = m_c$ 近傍での $F_{(1)}, F_{(2)}$ それぞれの転移点への近付き方をそれぞれ評価してみれば

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow m_c} \frac{F_{(1)}}{N^2} &\approx -\frac{5}{8} - 2\sqrt{2}(m - m_c) - 3(m - m_c)^2 - \frac{5\sqrt{2}}{3}(m - m_c)^3 + \mathcal{O}((m - m_c)^4), \quad (m \leq m_c), \\ \lim_{m \rightarrow m_c} \frac{F_{(2)}}{N^2} &\approx -\frac{5}{8} - 2\sqrt{2}(m - m_c) - 3(m - m_c)^2 - \sqrt{2}(m - m_c)^3 + \mathcal{O}((m - m_c)^4), \quad (m \geq m_c), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

である。従って、自由エネルギーのラージ N 極限は m の 3 階微分について不連続性を持つことが分かる。すなわちこの相転移は 3 次相転移である。

このように分岐がある有限の臨界点で切れて起こるラージ N 相転移は、GWW 型相転移と呼ばれる。GWW 型相転移は、2 次以上の高次相転移であり、模型の詳細に依らずに分岐が切れる様々な場面に共通して現れる。

B.3 カスプ型ポテンシャルの臨界現象

この節では、私達の研究 [27] に基づいて、カスプ型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型のラージ N 極限を調べた結果をまとめる。このポテンシャルは、結合定数の変化に伴って GWW 型相転移を起こす 2 重井戸型ポテンシャル (B.7) とよく似た形状を持ち、同様の相構造が見られると期待される。ところがこの場合では GWW 型相転移は起こらず、通常の滑らかなポテンシャルの場合とは異なる臨界現象が起こることを示そう。

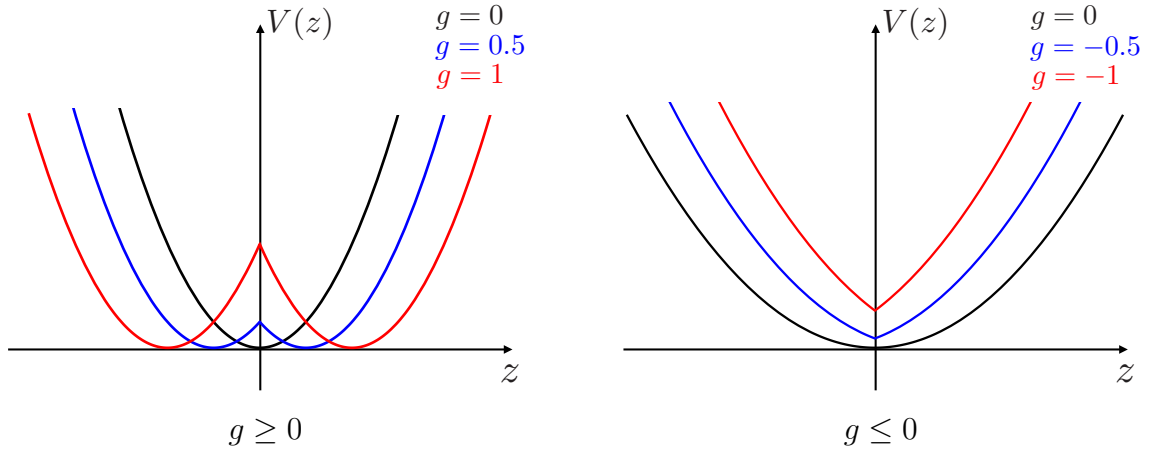


図 B.3: カスプ型ポテンシャル (B.14) の概形。 $g > 0$ の場合を 2 重井戸型ポテンシャルの概形 (図 B.2 左) と比べてみると、 $z = \pm g$ に鞍点を持ち、結合定数の変位に伴うポテンシャルの変化がよく似ていることが分かる。一方 $g < 0$ の場合は $z = 0$ に下に凸の特異性があるポテンシャルが描かれる。このポテンシャルの形状は、むしろ Gaussian 型ポテンシャル (3.23) に近く、原点近傍に固有値が集積しそうであることが見て取れる。

本研究では、以下のポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型を考える。

$$V(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} (z - g)^2, \\ (z + g)^2, \end{cases}, \quad V'(z) = \begin{cases} z - g, & (z \geq 0), \\ z + g, & (z \leq 0), \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

ここで g は、実数の結合定数である。原点に特異性を持つこのポテンシャル (B.14) を持った Hermitian 行列模型が、連続極限で非臨界弦理論と対応関係にあるかどうかは分からない。少なくとも、単純なランダム単体分割による対応関係をつけるのは難しい。²

しかしこのポテンシャルの問題は、ラージ N 相転移が起こりそうな形状をしていることに気付く。このポテンシャル (B.14) の形状を、図 B.3 に記載した。 $g > 0$ の場合についてこの形状を見てみると、ポテンシャルは $z = \pm g$ にそれぞれ古典的な鞍点を持つことが分かる。また結合定数 g が大きくなるに連れて、原点のポテンシャルの壁がせり上がる 2 重井戸型ポテンシャル (B.7) とよく似た形状の変化を持つことが分かる。

節 B.2 で紹介した 2 重井戸型ポテンシャルの問題を思い出してみよう。結合定数 m が小さい弱結合領域では、固有値密度の解は式 (B.8) で表示されたワンカット解であった。

²ポテンシャル (B.14) は絶対値型の項を持つ。この項は、Fourier 展開を用いて

$$\begin{aligned} |z| &= 2z \left(\Theta(z) - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2z \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} e^{ikz} - \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

と記述される。従ってこの右辺の表記を直接 $z \rightarrow M$ とすれば、行列 M のポテンシャルとして式 (B.14) を表記することは可能である。しかし見て分かるように、右辺の形式は複雑な積分形式で与えられるため、単純なランダム単体分割での弦理論との対応関係を議論することは難しい。

そしてこのワンカット解は、ある有限の臨界値 $m = m_c$ で破綻し、強結合領域 $m > m_c$ でツーカット解 (B.11) に転移を起こした。この転移は GWW 型相転移と呼ばれ、自由エネルギーの評価から典型的に 3 次相転移である。

カスプ型ポテンシャル (B.14) の場合でも、同じ相構造が見られるだろうか。ポテンシャルの形状の変化 (図 B.3) を眺めると、2 重井戸型ポテンシャルの問題と同様に、有限の臨界値でのワンカット解からツーカット解への GWW 型相転移が起こりそうである。

本研究 [27] では、Migdal 積分形式 (3.20) を用いたこれまでと同様の手法で、カスプ型ポテンシャル (B.14) を持つ Hermitian 行列模型のラージ N 極限での振る舞いを調べた。興味深いことに、ラージ N 極限で固有値密度を解析してみると、2 重井戸型ポテンシャルの問題で見られたような有限の臨界値での GWW 型相転移は起こらないことが解析的に示せる。後で示すように転移が起こるのは $g = 0$ であり、従って $g > 0$ の領域にはワンカット相が存在しない。

なお、Migdal 積分形式 (3.20) が、特異性を持ったポテンシャルの場合に適用可能かどうか、きちんとした証明は無い (正則ポテンシャルの場合の Migdal 積分形式の証明については、付録 A.2 を参照せよ)。しかし少なくとも積分形式 (3.20) が、鞍点方程式 (3.9) を満足することは、特異性を持つポテンシャルの場合にも確かめることが出来る。従って本研究では、Migdal 積分形式が積分前の状態で既に鞍点方程式の解になっていることを根拠に、ポテンシャルが正則ではないカスプ型ポテンシャル (B.14) の場合にもこの方法を適用する。

更に研究 [27] では、Newton 法を用いた数値解析も行い、解析解から得られる結果が数値計算と一致することを確認した。本論文では、数値解析の結果は割愛する。

以下では、この節の構成を記載しよう。まず小節 B.3.1 では、この行列模型のワンカット解に着目する。そして導出されたワンカット解 (B.18) が、 $g > 0$ の全域で破綻していることを示す。

次に小節 B.3.2 では、2 重井戸型ポテンシャルの例に習って原点对称性を持つツーカット解を導出する。ここでは、ツーカット解 (B.22) が $g > 0$ の全域で矛盾無い解になっており、有限の結合定数でこの解が破綻しないことを示す。以上より、両側の相が持つ特徴から転移点は $g = 0$ であると結論付く。³

小節 B.3.3 では、カスプ型ポテンシャルで見られた相構造の変化が起こるポテンシャルの特異性に着目する。この小節では、特異性をコントロールするパラメータ α を導入し、カスプ型ポテンシャル (B.14) を一般化した非多項式型ポテンシャル (B.26) のラージ N 極限を調べた。そしてどのくらいの特異性を持つポテンシャルを用いた時に GWW 型相転移が起こらなくなるのかを議論する。

³ $g = 0$ でのラージ N 相転移の次数は、ツーカット解 (B.22) の場合の自由エネルギーの評価が技術的に難しいことから、評価することが出来なかった。2 次以上の高次相転移である場合、普遍性が成り立つことから様々な物理との関係性が期待される。相転移次数等の評価から、この転移現象の物理的な役割を見つけることは今後の展望である。

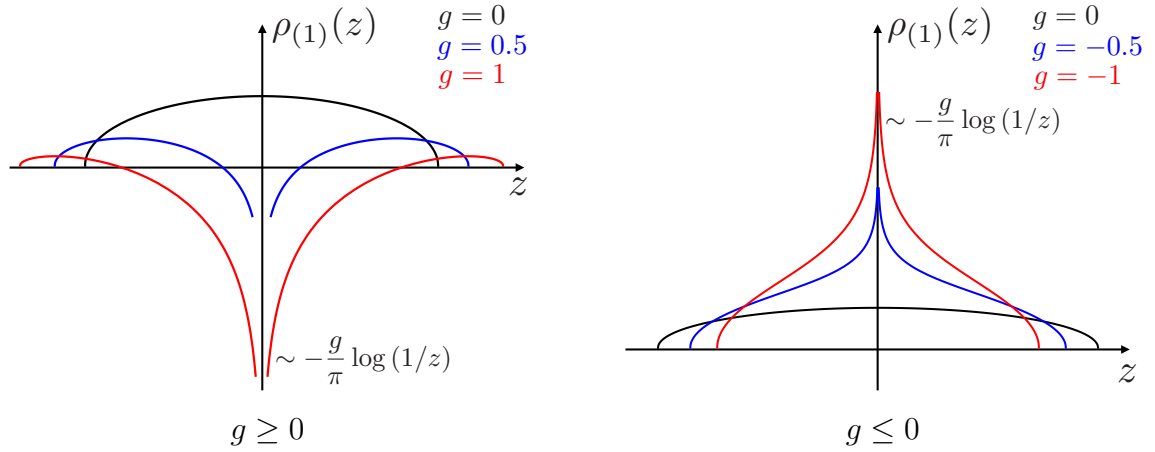


図 B.4: ワンカット解 (B.18) の固有値密度。 $g > 0$ の場合には、原点近傍で固有値密度の正値性 $\rho(z) \geq 0, (z \in [-b, b])$ が破綻している。一方 $g < 0$ では、固有値密度に正の対数発散が存在し、Wigner の半円則とは大きく異なる描像が得られる。

B.3.1 ワンカット解

まずはワンカット解の Migdal 積分形式を課して、ワンカット解を導出してみよう。原点对称性から、分岐は $[-b, b]$ に作られると仮定出来る。Migdal の積分形式を用いれば、ワンカット解は

$$\begin{aligned} W(z) &= \oint_{C_1} \frac{dw}{4\pi i} \frac{V'(w)}{z-w} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{w^2 - b^2}} \\ &= \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{z^2 - b^2} - \frac{g}{\pi i} \log \left(\frac{ib + \sqrt{z^2 - b^2}}{z} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

と得られる。ここで C_1 は分岐 $w \in [-b, b]$ を反時計回りに囲む閉経路である。端点 b は、リゾルヴェントの漸近条件 (3.19) から

$$b = 2 \left(\frac{g}{\pi} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\pi^2}} \right), \quad (\text{B.17})$$

と与えられる。固有値密度 $\rho(z)$ は、関係式 (3.18) を通じて

$$\rho_{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{b^2 - z^2} - \frac{g}{2\pi^2} \log \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - z^2}}{b - \sqrt{b^2 - z^2}} \right), \quad (z \in [-b, b]), \quad (\text{B.18})$$

と読み取ることが出来る。図 B.4 には、 $\rho_{(1)}(z)$ を各結合定数 g でプロットした。この固有値密度の重要な特徴は、 $z = 0$ 近傍で対数発散 $\rho_{(1)}(z) \sim (-g/\pi) \log(1/z)$ を持つことである。これは、例えば式 (4.24) のような CS 行列模型のステップ型マルチカット解に現れる対数発散と同様の振る舞いである。この対数発散があるため、図 B.4 左で示した $g > 0$ の場合では、 $\rho_{(1)}(z)$ の正値性が原点近傍で破れている。すなわち $g > 0$ 領域では、ワンカット解は常に破綻している。

一方で、 $g < 0$ ではワンカット解は矛盾無い唯一の解である。 $\rho_{(1)}(z)$ は、原点近傍で対数発散を持つが、導出された端点 b のもとで規格化条件 $1 = \int_{-b}^b \rho_{(1)}(z) dz$ をきちんと満足する。また自由エネルギーも、ラージ N 極限で

$$F_{(1)} \approx N^2 \left[\frac{b^2}{8} - 2b^2 \log \left(\frac{b}{2} \right) + \frac{b^4}{64} + (-g) \left(\frac{b}{\pi} - b \log \left(\frac{b}{2} \right) + \frac{5}{24\pi} b^3 \right) \right. \\ \left. + (-g)^2 \frac{(8 + \pi^2)b^2}{16\pi^2} + (-g)^3 \frac{b}{4\pi} \right] + \dots, \quad (g \leq 0), \quad (\text{B.19})$$

と評価することが出来る。

以上の振り舞いから、この模型のラージ N 相転移は $g = 0$ で起こると考えられる。2重井戸型ポテンシャル (B.7) の場合で見られた GWW 型相転移との大きな違いは、転移現象が有限の結合定数では起こらずに $g = 0$ で起こることである。

次の小節では、2重井戸型ポテンシャルの問題の類推から $g > 0$ で安定なツーカット解の構成を考える。そしてツーカット解を調べてもまた、結合定数 g が有限の値で転移を起こすことはなく $g = 0$ で解の破綻が見られることを示そう。

B.3.2 原点对称なツーカット解

次に2重井戸型ポテンシャルの問題の類推から、ポテンシャルの鞍点 $z = \pm g$ に $N/2$ 個ずつの固有値が蓄積したツーカット解を考えてみよう。原点对称性から、分岐は $[-b, -a], [a, b]$, ($b > a > 0$) に作られると仮定出来る。Migdal 積分形式 (3.20) を用いれば、ツーカット解は

$$W(z) = \sum_{i=1,2} \oint_{C_i} \frac{dw}{4\pi i} \frac{V'(w)}{z - w} \sqrt{\frac{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}{(w^2 - a^2)(w^2 - b^2)}} \\ = \frac{z}{2} - \frac{ig \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}{\pi b z} \left[\Pi \left(\frac{a^2}{z^2}, \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) - \Pi \left(\frac{a^2}{z^2}, \frac{a^2}{b^2} \right) \right], \quad (\text{B.20})$$

と得られる。ここで積分経路 C_1 と C_2 は、分岐 $[-b, -a]$ 及び $[a, b]$ を反時計回りに一周する閉経路である。また Π は第3種楕円積分である。

未定値 a, b は、リゾルヴェントが満たす漸近条件 (3.19) から

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{ig}{\pi b} \left[F \left(\sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) - K \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \right], \\ 1 = \frac{igb}{\pi} \left[E \left(\sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) - E \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \right] - \frac{b^2 - a^2}{4}, \quad (\text{B.21})$$

を満足する。 F 及び K はそれぞれ第1種楕円積分及び第2種楕円積分である。また K は第1種完全楕円積分である。これらは a, b に関する非常に複雑な方程式であるが、少なくとも数値的にこの方程式から a, b を決定することが可能である。

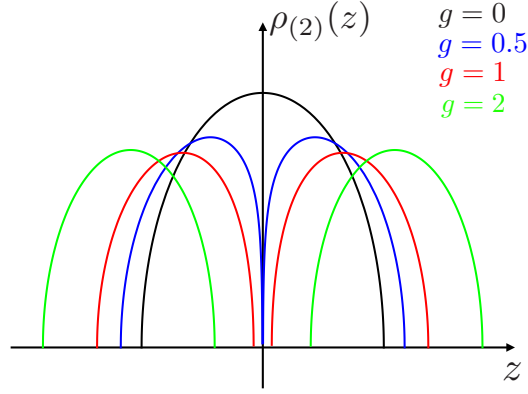


図 B.5: ツーカット解 (B.22) の概形。端点 a, b は漸近条件 (B.21) を Mathematica の FindRoot を用いて解いた結果をプロットした。有限の $g > 0$ では、2つの分岐が融合してワンカット解に転移しないことが見て取れる。転移を起こすのは Wigner の半円則に従う $g = 0$ である。

固有値密度は

$$\rho_{(2)}(z) = \frac{g\sqrt{(z^2 - a^2)(b^2 - z^2)}}{\pi^2 b|z|} \text{Im} \left[\Pi \left(\frac{a^2}{z^2}, \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) - \Pi \left(\frac{a^2}{z^2}, \frac{a^2}{b^2} \right) \right], \quad (z \in [-b, -a], [a, b]), \quad (\text{B.22})$$

と読み取ることが出来る。これは図 (B.5) にプロットした。

この解は、端点の解析を行ってみると、 $g > 0$ で常に有効な解であることが分かる。また分岐が結合して、ワンカット解への転移を起こすのは $g = 0$ の時である。このことからカスプ型ポテンシャルの場合では、通常の GWW 型相転移のような有限の臨界値 g_c でのラージ N 相転移は起こらないことが分かる。

また $g = 0$ では、Wigner の半円則を満たす通常の Gaussian 型ポテンシャルの固有値密度 (3.26) に帰着することが確かめられる。転移点への近付き方を調べるために、 $g \rightarrow 0$ 極限での分岐の端点の振る舞いを調べてみよう。 g が小さくなる時、端点 a は原点に近付くため、小さな値を取る。 $a = 0$ の近傍で、各楕円積分は

$$\begin{aligned} F \left(\sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) &= \frac{\pi}{2} + i \log \left(\frac{a}{2b} \right) + \mathcal{O}(a^2), \quad K \left(\frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(a^2), \\ E \left(\sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \frac{a^2}{b^2} \right) &= \frac{\pi}{2} + i \log \left(\frac{a}{2b} \right) + \mathcal{O}(a^2), \quad E \left(\frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

と振る舞う。これを用いると、漸近条件 (B.21) は

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{g}{\pi b} \log \left(\frac{a}{2b} \right) + \mathcal{O}(a^2), \quad 1 = -\frac{gb}{\pi} \log \left(\frac{a}{2b} \right) - \frac{b^2}{4} + \mathcal{O}(a^2), \quad (\text{B.24})$$

と得られる。従って端点 a, b は $g \rightarrow 0$ 極限で

$$a \approx 4e^{-\pi/g}, \quad b \approx 2 + \mathcal{O}(e^{-2\pi/g}), \quad (\text{B.25})$$

と振る舞うことが分かる。これは $g > 0$ の時には、どんなに g が小さくなっても厳密に $g = 0$ にならない限り 2 つの分岐が融合しないことを示している。また $\rho_{(2)}(z)$ をプロットしてみれば分かるように、 $g > 0$ では常に正值性が保たれており、これが矛盾無い解になっていることが分かる。

この固有値密度の振る舞いは、通常の多項式型ポテンシャルとは明らかに異なる。なぜなら、通常の多項式型ポテンシャルの場合では、ポテンシャルの山が非常に低くなった場合には山の頂上に固有値が蓄積するワンカット解が許されるからである。一方でカスプ型ポテンシャルの場合には、原点の特異性が強すぎて山が非常に低い場合でも頂上に固有値を蓄積させることが出来ないという特徴的な振る舞いが見られる。

B.3.3 非多項式型ポテンシャル

ここまでカスプ型ポテンシャル (B.14) の Hermitian 行列模型を考えると、結合定数 $g = 0$ での自明な転移しか起こらず、GWW 型相転移は起こらないことを示してきた。特に、この振る舞いはワンカット解の解析 (B.18) 及びツーカット解の解析 (B.22) の両面から見られることを各小節で示した。またカスプ型ポテンシャルは原点 $z = 0$ に特異性を持ち、この周りでの固有値密度の特異的な振る舞いが鍵となって臨界現象が通常の場合とは異なる結果が得られることを述べた。

では、ポテンシャル $V(z)$ にどの程度の特異性がある場合に、“GWW 型相転移が起こらない”という現象は起こるのであろうか。この小節では、カスプ型ポテンシャル (B.14) を拡張した以下の非多項式型ポテンシャルの場合のラージ N 極限を考えてみよう。

$$V(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{g}{\alpha}|z|^{1+\alpha}, \quad (0 \leq \alpha < 1). \quad (\text{B.26})$$

$\alpha = 0$ は、ここまで考えてきたカスプ型ポテンシャル (B.14) である。 $0 < \alpha < 1$ の場合は、原点 $z = 0$ に特異性があるものの、 $\alpha = 0$ の場合とは異なりポテンシャルの微分 $V'(z)$ は滑らかである。

ここでは、この非多項式型ポテンシャル (B.26) の場合におけるワンカット解を導出し、ワンカット解がどのような臨界点 $g = g_c$ で破綻するか調べてみよう。カスプ型ポテンシャル (B.14) の場合には、この臨界点 g_c が 0 になってしまい、有限の結合定数でのラージ N 相転移が見つからなかった。

ポテンシャル (B.26) の原点对称性から、 $z \in [-b, b]$ に分岐が作られるワンカット解は、

$$\begin{aligned} W(z) &= \oint_{C_1} \frac{dw}{4\pi i} \frac{V'(w)}{z - w} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{w^2 - b^2}} \\ &= \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - b^2} - g \frac{b^{\alpha+1}\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha+3}{2})} {}_2F_1\left(1, \frac{\alpha+2}{2}; \frac{\alpha+3}{2}; \frac{b^2}{z^2}\right) \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{z^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

と評価することが出来る。分岐の端点 b は、漸近条件 (3.19) から方程式

$$\frac{b^2}{4} - \frac{gb^{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)} = 1, \quad (\text{B.28})$$

の解で与えられる。また固有値密度は

$$\rho_{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{b^2 - z^2} - g\frac{b^{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{2\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)} {}_2F_1\left(1, \frac{\alpha+2}{2}; \frac{\alpha+3}{2}; \frac{b^2}{z^2}\right) \frac{\sqrt{b^2 - z^2}}{z^2}, \quad (\text{B.29})$$

と読み取ることが出来る。

ワンカット解が許されるのは、固有値密度 $\rho_{(1)}(z)$ の正值性が分岐 $z \in [-b, b]$ 内で保たれる結合定数の領域までである。このポテンシャルは、 $g > 0$ の場合では $z = 0$ にピークを持つので、 $z = 0$ での固有値密度の振る舞いが正值になっているかどうかでワンカット解が矛盾無い解であるかどうか判別することが出来る。導出された固有値密度 (B.29) から、原点での固有値密度の振る舞いは

$$\rho_{(1)}(0) = \frac{b}{2\pi} - \frac{gb^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}, \quad (\text{B.30})$$

である。

ここまでの解析との無矛盾性を確かめるために、まずはカスプ型ポテンシャル (B.14) に近づく $\alpha \rightarrow 0$ 極限を考えてみよう。これは第 2 項目の分子のガンマ関数が $\alpha \rightarrow 0$ で $\Gamma(\alpha/2) \rightarrow +\infty$ と振る舞うことから、 $g > 0$ で正值性が明らかに破綻していることが分かる。

一方で $0 < \alpha < 1$ の場合には、 $g > 0$ ですぐさま正值性が破綻しているとは言えないことが分かる。 $\rho_{(1)}(0) = 0$ となる結合定数 $g = g_c$ を導出してみよう。これは、ワンカット解が破綻する臨界点を特徴付けていると考えることが出来る。端点を与える式 (B.28) 及び、 $\rho_{(1)}(0)$ を与える式 (B.30) を用いると、臨界点 g_c は

$$g_c = \frac{b^{1-\alpha}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad b = 2\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, \quad (\text{B.31})$$

と評価することが出来る。 g_c は $0 < \alpha < 1$ の場合には有限値である。従って、 $0 < \alpha < 1$ の場合では、少なくとも有限の結合定数で GWW 型相転移的な現象が起こることが分かる。これは、ポテンシャルの微分 $V'(z)$ が不連続である場合、 $\alpha \rightarrow 0$ で相構造の変更が起こることを示唆している。

B.3.4 議論

この小節では、カスプ型ポテンシャルを持つ Hermitian 行列模型における私達の研究 [27] の議論を記載する。

本節の結果を、簡単に降り返ろう。本研究では、カusp型ポテンシャル (B.14) の場合に起こる臨界現象を調べた。通常の Migdal 積分形式の手法 (3.20) をこの場合にも適用すると、カusp型ポテンシャルの問題では GWW 型相転移は起こらない。ワンカット解とツーカット解の転移点は、自明な $g = 0$ であり、相構造の変化にはポテンシャルの微分 $V'(z)$ の不連続性、及び $\rho(z)$ の対数発散が関わっていることが分かった。

$g = 0$ での転移の次数は、ツーカット解側の自由エネルギーの解析が技術的に難しいことから評価が難しい。この評価から、通常多項式型ポテンシャルの臨界点近傍では現れない新しい普遍性が存在するか否かを調べることは今後の展望である。特に非臨界弦理論との関係性を議論する上では、行列模型の連続極限に相当する転移点近傍でのダブルスケール極限 [5, 6, 8] を取ることが重要であると考えられる。カusp型ポテンシャルの場合で、転移点近傍のダブルスケール極限を取り、非臨界弦理論との対応関係を調べることは、今後の具体的な展望の1つとして挙げられる。

なお、本論文での記載は省くが、本研究 [27] では、カusp型ポテンシャル (B.14) を持つ Hermitian 行列量子力学のラージ N 極限も調べた。⁴興味深いことに、行列量子力学の場合では行列模型の結果とは異なり、有限の $g = g_c$ でワンカット解とツーカット解の間のラージ N 相転移が起こる。また、相転移次数は GWW 型の3次相転移とは異なり、普遍的に2次相転移である。

行列模型の場合の解析について、もう1点議論しておこう。固有値密度 $\rho(z)$ の対数発散は、例えば式 (4.24) などで導出された CS 行列模型のマルチカット解と同じ数理解造から現れる。

近年このような対数発散を持つ固有値密度は、本研究 [21, 22] に限らず幾つかの理論のラージ N 極限 [84, 85, 86, 87] に現れている。またカusp型ポテンシャル (B.14) の行列模型は、行列固有値に関して変数変換 $z_i = y_i^2$ を行うことで、研究 [88, 89, 90] により行われている IIA 型超弦理論と関係した行列模型とよく似た形式に帰着する。これら先行研究における結果との比較から、本研究で発見した固有値密度の対数発散や相構造の変化に関する物理的な役割が見つかる興味深い。

⁴行列量子力学とは、行列模型が局所変数を持たない0次元場の理論であるのに対して、局所変数を1つ持った1次元行列場の理論である。行列量子力学もまた、非臨界弦理論との関係が様々に研究された行列理論である。詳しくは、文献 [83, 98] を参照せよ。

付 録 C ラージ N インスタントン

本付録では、 $1/N$ 展開における非摂動効果として知られているラージ N インスタントン (large- N instanton) [77, 78] を、Hermitian 行列模型 (3.1) の場合で紹介する。pure $U(N)$ CS 行列模型 (4.1) や、ABJM 行列模型 (5.1) の場合への拡張は単純である。本章の議論は、特に Marino によるレビュー文献 [29] の内容に基づく。

C.1 解釈 (1): 非自明な鞍点へのトンネル効果

一般に Hermitian 行列模型における鞍点方程式 (3.9) の解は、ユニークであるとは限らない。仮に自由エネルギーで最も支配的に効いてくる矛盾ない解が 1 つ得られたとして、その他の解は、どのような効果として積分に効いてくるだろうか。本付録では、簡単のためラージ N 極限で最も支配的な配位がワンカット解である場合に限定してこれを議論する。

分配関数 (3.6) について、先に $(N-1)$ 個の固有値が積分されて、ある鞍点周りのワンカット配位に収まった状況を考える。これを形式的に表すと、以下の通りである。

$$Z_N \approx Z_{N-1}^{(1)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dz_N \exp(-NV_{\text{eff}}(z_N)) \right]. \quad (\text{C.1})$$

ここで $Z_{N-1}^{(1)}$ とは、 $(N-1)$ 個の積分についてラージ N 極限を取り、ワンカット配位で鞍点近似した積分の値である。式 (C.1) から分かるように、 $(N-1)$ 個の固有値について先に積分してしまうので、最後の 1 個の固有値 z_N がこの $(N-1)$ 個の固有値に及ぼす影響、すなわち反作用はこの評価では無視することになる。最後の 1 個の固有値 z_N に関する有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z_N)$ は、相互作用項も含めて

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(z_N) &= V(z_N) - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \log |z_N - z_j| \\ &\approx V(z_N) - 2P \int_a^b dw \rho(w) \log |z_N - w|, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

と与えられる。ここで $z \in [a, b]$ は、 $(N-1)$ 個の固有値が集積した分岐である。有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z)$ の分岐近傍の形状は、図 C.1 左の通りである。Lagrange 未定係数法を用いた議論 (A.19) より、 $V_{\text{eff}}(z)$ は分岐上にプラトー (plateau) を持つ。

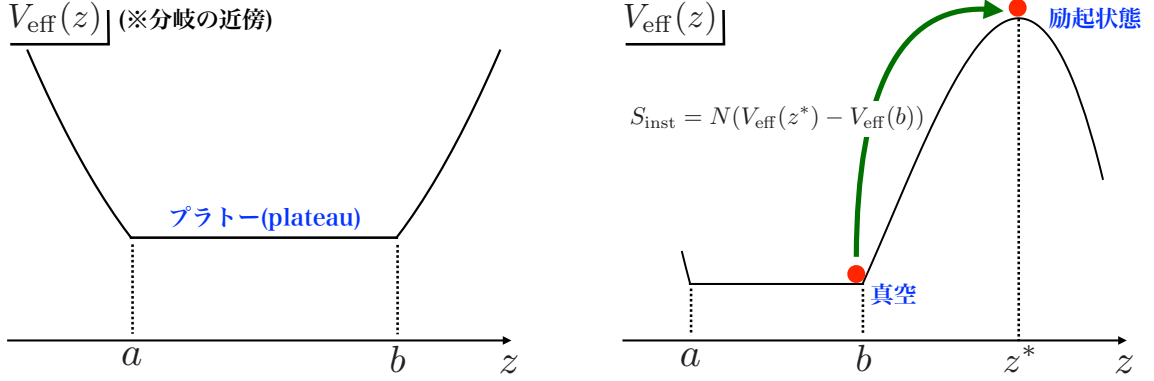


図 C.1: (左図:) 有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z)$ の分岐 $[a, b]$ の近傍での形状。分岐上では他の固有値から来る斥力相互作用と古典ポテンシャルが釣り合ってプラトーが形成される。(右図:) ラージ N インスタントン。固有値 z_N が真空からトンネル効果で励起した状態に相当する。

最後の積分 (C.1) の実行には、鞍点方程式

$$V'_{\text{eff}}(z) = V'(z) - 2P W(z) = 0, \quad (\text{C.3})$$

を解く必要がある。この方程式の1つの自明な解は、最後の固有値がワンカット配位に吸収される $z=b$ である。しかしこの方程式の解は、一般に分岐上の解 $z=b$ 唯一であるとは限らない。特に、古典ポテンシャル $V(z)$ が固有値が集積している点以外に鞍点を持つ場合、方程式 (C.3) は非自明な鞍点を持つ。

図 C.1 右のように、 $V_{\text{eff}}(z)$ が $z=z^*$ に1つの非自明な鞍点 $V'_{\text{eff}}(z^*)=0$ を持つ場合を考えてみよう。この時、積分 (C.1) は自明な鞍点 $z=b$ と非自明な鞍点 $z=z^*$ 両方の寄与を拾って

$$Z_N \approx Z_N^{(1)} \left[1 + c_* e^{-S_{\text{inst}}} + \mathcal{O}(e^{-2S_{\text{inst}}}) \right], \quad (\text{C.4})$$

と与えられる。ここで、 S_{inst} は

$$S_{\text{inst}} = N (V_{\text{eff}}(z^*) - V_{\text{eff}}(b)), \quad (\text{C.5})$$

と与えられた $\mathcal{O}(N)$ のインスタントン古典作用である。また c_* は、鞍点近似の1ループ揺らぎから来る定数因子である。図 C.1 右で表示したように、 S_{inst} の寄与は、真空 $z=b$ から $z=z^*$ へのトンネル効果的な励起状態から来る指数関数的な寄与である。自由エネルギー $F = -\log Z_N$ に対するインスタントン補正は以下のように評価することが出来る。

$$\begin{aligned} F &\approx -\log \left[Z_N^{(1)} (1 + c_* e^{-S_{\text{inst}}} + \dots) \right] \\ &\approx F_{(1)} - c_* e^{-S_{\text{inst}}} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

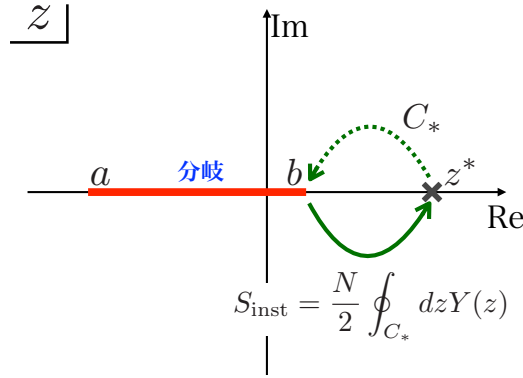


図 C.2: スペクトル曲線 $Y(z)$ の非自明な周回経路 C_* 。図 C.1 の解釈を複素平面上に拡張すると、周回経路によってラージ N インスタントンを特徴付けることが出来る。ここで実線の矢印はルートの方岐の表側、点線は裏側を通っていることを指す。

このように、非自明な鞍点 $z = z^*$ からの寄与は、真空解 $F_{(1)}$ に対する指数関数的な補正として効いてくる。これは、単純な真空解周りの $1/N$ 展開では得られない非摂動的な補正項である。

Hermitian 行列模型は、ランダム単体分割を通じてダブルスケーリング極限 [5, 6, 8] と呼ばれる連続極限で非臨界弦理論と関係する。Hermitian 行列模型におけるラージ N インスタントンは、古典作用の N 依存性から、非臨界弦理論における非摂動効果との関係が期待される。

研究 [77, 78, 91] では、ある Hermitian 行列模型におけるラージ N インスタント数がダブルスケーリング極限で調べられた。そして、この寄与が D インスタントン [92] と呼ばれる非臨界弦理論の非摂動効果と定量的に一致することが確かめられている。これに関する更なる詳細は、文献 [98] を参照せよ。

C.2 解釈 (2): 非自明な周回積分

前節で示したように、非自明な鞍点 $z = z^*$ からの寄与は、真空からのトンネル効果的な励起とみなすことが出来る。またこの寄与は、真空解からの指数関数補正として自由エネルギーに効いてくる。

古典作用 (C.5) は、以下の手順により複素平面上の非自明な周回積分でも記述が可能で

ある。

$$\begin{aligned}
S_{\text{inst}} &= N (V_{\text{eff}}(z^*) - V_{\text{eff}}(b)) \\
&= N \int_b^{z^*} dz V'_{\text{eff}}(z), \\
&= \frac{N}{2} \oint_{C_*} dz Y(z), \quad (Y(z) := V'(z) - 2W(z)). \tag{C.7}
\end{aligned}$$

経路 C_* は、図 C.2 で示したように、複素平面上で $z = b$ から $z = z^*$ を繋ぐ閉経路である。被積分関数 $Y(z)$ は、有効ポテンシャルの微分 $V'_{\text{eff}}(z)$ を複素平面上に拡張したもので、スペクトル曲線 (spectral curve) と呼ばれる。

以上のようにして、古典作用 S_{inst} は、有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(z)$ を複素平面へ拡張して得られるスペクトル曲線 $Y(z)$ の非自明な周回積分を用いて記述することが出来る。本文中で登場する、ABJM 行列模型における D2 ブレーンインスタントン (5.25) の導出は、この節で紹介した非自明な周回積分によってラージ N インスタントンを特徴付ける考え方に基づく。

C.3 マルチカット解との関係性

本文中で紹介したマルチカット解 (3.20) と、ラージ N インスタントンの関係性について記載しておこう。本付録で紹介したラージ N インスタントン (C.5) は、2つの領域に固有値が $(N_1, N_2) = (N - 1, 1)$ 個集積したツーカット解に相当する。これを一般化してみると以下の通りである。すなわち $(N_1, N_2) = (N, 0)$ のワンカット解が真空解である場合、 $(N_1, N_2) = (N - N_2, N_2)$ のツーカット解は N_2 個のトンネル効果的な励起が起きたラージ N インスタントンの凝縮状態である。¹

この対応関係は、マルチカット解に関する解釈を付けるだけではなく、インスタントン古典作用の定量的な見積もりをする際に役立つ。一般にマルチカット解の解析では、 N 個の固有値に関する鞍点方程式 (3.9) を同時に評価している。従って、マルチカット解からインスタントン極限を取って自由エネルギーを評価すると、最後の固有値 z_N に関する反作用が自動的に入ったインスタントン古典作用 S_{inst} の解析が可能である。

例えば一般的なツーカット解 $(N_1, N_2) = (N - N_2, N_2)$ の自由エネルギーを評価した後に、得られた結果についてインスタントン極限 $N_2 \rightarrow 1$ を取れば、この結果は最後の固有値 z_N に関する反作用が含まれた厳密な結果であることが期待される。この方法は、節 5.4.2 にて、最後の固有値に関する反作用の効果を議論する上で役立つ。

¹ ツーカット解からの寄与は、固有値の数 N_2 が全体の固有値の数 N と比べてどのくらいの大きさであるかに依存している。ラージ N インスタントンの場合のように $N_2/N \sim \mathcal{O}(1/N)$ の場合、この解からの寄与は $\mathcal{O}(e^{-N})$ で効いてくる。この場合には、この解からの寄与は $1/N$ 展開の指数関数補正と考えて問題無く、物理的にもラージ N インスタントンの凝縮状態とみなせる。

一方で、分岐が十分に形成された $N_2/N \sim \mathcal{O}(1)$ の場合には、この解からの寄与は $\mathcal{O}(e^{-N^2})$ である。この場合には、通常の $1/N$ 展開に対する指数関数補正よりも更に高次の補正になってしまい、ワンカット解からの補正として含めるべきであるかどうか分からない。

付 録 D 正則性を用いた行列模型の解析解の構成

本付録では、Migdal 積分形式 (3.20) を用いずに行列模型の鞍点方程式を解く手法を紹介する。節 D.1 では、Hermitian 行列模型においてこの手法を導入した研究 [19, 52] を紹介する。節 D.2 では、この手法の pure $U(N)$ CS 行列模型の解析への拡張を記載する。

D.1 Hermitian 行列模型の場合

この節では、Hermitian 行列模型のリゾルヴェント $W(z)$ を導く別の手順 [19] を紹介しよう。ポテンシャル $V(z)$ は、正則な多項式型ポテンシャル (3.4) を仮定する。

$W(z)$ と $V(z)$ から書かれる以下の関数を考える。

$$F(z) := W(z)V'(z) - W^2(z). \quad (\text{D.1})$$

$F(z)$ は以下のように z 空間全域で正則な関数であることを示せる。まずは分岐 $z \in \mathcal{C}$ の外側を考えよう。 $z \in \mathcal{C}$ の外側では、リゾルヴェント $W(z)$ は正則な関数である。 $V'(z)$ は全域で正則であるので、 $F(z)$ は $z \in \mathcal{C}$ の外側で正則である。

$z \in \mathcal{C}$ の場合はどうか。分岐上で正則であることを調べるには、分岐 $z \in \mathcal{C}$ を複素平面上で跨いだ時に不連続性を出さないことを示せば良い。これは

$$\begin{aligned} F(z+i\epsilon) - F(z-i\epsilon) &= [W(z+i\epsilon) - W(z-i\epsilon)] [V'(z) - (W(z+i\epsilon) + W(z-i\epsilon))] \\ &= 0, \quad (z \in \mathcal{C}), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

と示すことが出来る。最後の等式には、分岐 \mathcal{C} 上で鞍点方程式 (3.17) が満たされることを用いた。以上より、 $F(z)$ は z 空間の全域で正則な関数である。

式 (D.1) は、リゾルヴェント $W(z)$ について以下のように解くことが出来る。

$$W(z) = \frac{V'(z)}{2} - \sqrt{\frac{V'^2(z)}{4} - F(z)}. \quad (\text{D.3})$$

ここでルートの前の符号について負の解を選んだのは、漸近条件 (3.19) を矛盾無く満たす解を選ぶ必要があるためである。

形式 (D.3) において、残る未定部分は正則関数 $F(z)$ である。 $F(z)$ は、正則性と漸近条件 (3.19) からある程度決定することが出来る関数である。ここでは一般的に、ポテンシャル $V(z)$ が $(l+1)$ 次式で与えられる場合を考えよう。 $F(z)$ は、定義 (D.1) から $z \rightarrow \infty$ で

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = g_{l+1} z^{l-1} + \cdots, \quad (\text{D.4})$$

と振る舞う関数である。また $F(z)$ は関数の正則性から多項式型で与えられることが分かるので、漸近性 (D.4) を考慮して

$$F(z) = \sum_{j=0}^{l-1} F_j z^j, \quad (F_{l-1} = g_{l+1}), \quad (\text{D.5})$$

と書ける。残る $(l-1)$ 個の F_j , $(j = 0, \dots, l-2)$ は未定係数である。

残る未定係数はどのように決まるだろうか。式 (D.3) のルート内は、一般に $2l$ 次の多項式である。従って $W(z)$ は、 l 個の分岐を持つ l カット解とみなすことが出来る。各分岐に固有値が N_j , $(j = i, \dots, l)$ 個蓄積しているとする、固有値の規格化条件は式 (3.22) で与えられる。従ってこの条件 (3.22) から残る未定値 F_j , $(j = 0, \dots, l-2)$ は決定される。また分岐の数が l 未満の解は、 l カット解において固有値の充填数 N_j の幾つかを 0 にする極限で得られる。

D.2 Chern-Simons 行列模型の場合

この節では、pure $U(N)$ CS 行列模型における解析解を正則性を用いた議論で導出する方法を紹介する。よく知られたワンカット解 (4.9) の導出は、研究 [23, 24] によって成された。一方で、ステップ型マルチカット解 (4.24) の導出は本研究の研究成果に基づく。

CS 行列模型の解析において正則性の手法を用いる利点は、Migdal 積分形式 (4.44) のような複雑な積分を行わなくても解が得られる点である。一方で、この手法は重ね合わせ型のマルチカット解 (4.41) に拡張しようとする解の構成に関する指導原理が分からず、一般化が難しいという欠点を持つ。

D.2.1 ワンカット解

まずはワンカット解 (4.9) の導出 [23, 24] を紹介しよう。リゾルヴェント $v(Z)$ は、分岐上で鞍点方程式 (4.5) を満たす。分岐 \mathcal{C} は、 $Z \in [A, B]$ に描かれると仮定する。

Hermitian 行列模型の場合では $F(z)$ に対応する以下の関数を考えよう。

$$f(Z) := e^{\pi i \lambda v(Z)} + Z e^{-\pi i \lambda v(Z)}. \quad (\text{D.6})$$

関数 $f(z)$ は、Hermitian 行列模型の場合 (D.2) と同様の議論から Z 空間の全域で正則な関数であることが確かめられる。

$v(Z)$ に関する漸近条件 (4.7) より、 $f(Z)$ は $Z \rightarrow \infty$ で $f(Z) \rightarrow e^{-\pi i \lambda} Z$ 、 $Z \rightarrow 0$ で $f(Z) \rightarrow e^{-\pi i \lambda}$ と振る舞う正則関数である。このような漸近性を持った正則関数 $f(Z)$ は、ユニークに

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad f_0 = e^{-\pi i \lambda}, \quad f_1 = e^{-\pi i \lambda}, \quad (\text{D.7})$$

である。一方で、式 (D.6) を $v(Z)$ について解けば、この解は

$$v(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z}}{2} \right), \quad (\text{D.8})$$

と得られる。この結果は、Migdal 積分形式から導出された式 (4.9) と一致する。分岐上で、鞍点方程式 (4.5) を満足していることは以下のように確認出来る。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v(Z + i\epsilon) + v(Z - i\epsilon)] &= \frac{1}{\pi i \lambda} \left[\log \left(\frac{f(Z) - i\sqrt{4Z - f^2(Z)}}{2} \right) + \log \left(\frac{f(Z) + i\sqrt{4Z - f^2(Z)}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi i \lambda} \log Z, \quad (Z \in \mathcal{C}). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

分岐の端点 A, B は、関係式 $\sqrt{f^2(Z) - 4Z} \propto \sqrt{(Z - A)(Z - B)}$ から決定することが出来る。結果は、

$$\frac{2f_0 f_1 - 4}{f_1^2} = (A + B), \quad \frac{f_0^2}{f_1^2} = AB, \quad (\text{D.10})$$

である。

以上のようにして、正則性を用いたリゾルヴェントの導出法は CS 行列模型の場合に拡張が可能である。ABJM 行列模型における DMP 解 (5.9) も、解析的な表式が最初に導出された研究 [24, 26] ではこの正則性を用いた議論から解析解が導出された。

D.2.2 ステップ型ツーカット解

この小節では、pure $U(N)$ CS 行列模型におけるステップ型ツーカット解 (4.24) の導出を正則性を用いた議論から行う。分岐 \mathcal{C} は、2つの分岐 $\mathcal{C}_1: [A_1, B_1]$ 、 $\mathcal{C}_2: [A_2, B_2]$ の和により与えられる。またステップ型の仮定 (4.20) より、 $A_2 = e^{2\pi i n} B_1$ を満たすとする。ここで、 n は正の整数である。図 4.3 左は、ステップ型ツーカット解の概形である。Migdal 積分形式を用いた解析と同様に、 \mathcal{C}_1 は対数関数の n_0 面に位置すると仮定する。

以上の仮定に基づいたリゾルヴェント $v(Z)$ の導出には、ワンカット解のリゾルヴェント (D.8) に関する以下の考察が役立つ。ワンカット解 (D.8) を、 $Z = 0$ 周りに $Z \rightarrow e^{2\pi i n_0} Z$ と複素平面上で反時計回りに回転させることを考えてみよう。ただし、ルートの分岐については触れない経路を取っているとする。式 (D.9) の左辺は、 $v(Z)$ が $Z = 0$ 周りで非特異的であることから不変である。一方で、右辺は $\log Z$ が分岐を持つので、この回転の下

で定数 $2n_0/\lambda$ が現れることに気付く。従って、 \mathcal{C}_1 上では左辺には定数 $2n_0/\lambda$ 項が足りない。同様に \mathcal{C}_2 上では $2(n_0 + n)/\lambda$ 項が足りない。

足りない定数項を出すために、以下を満足する関数 $v_1(Z)$ を考える。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v_1(Z + i\epsilon) + v_1(Z - i\epsilon)] &= \frac{2n_0}{\lambda}, & (Z \in \mathcal{C}_1), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v_1(Z + i\epsilon) + v_1(Z - i\epsilon)] &= \frac{2(n + n_0)}{\lambda}, & (Z \in \mathcal{C}_2). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$v_1(Z)$ を用いると、ステップ型ツーカット解は

$$v(Z) = v_0(Z) + v_1(Z), \quad (\text{D.12})$$

と書くことが出来る。ここで $v_0(Z)$ は、以下を満足するワンカット解 (D.8) である。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v_0(Z + i\epsilon) + v_0(Z - i\epsilon)] = \frac{1}{\pi i \lambda} \log Z, \quad (Z \in \mathcal{C}). \quad (\text{D.13})$$

ここで、分岐 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ は、 $\log Z$ の 0 枚目の面上に定義された分岐である。

$v_0(Z)$ は、関数形こそ式 (D.8) と同じであるが、正則関数 $f(Z)$ の係数が異なる。なぜならば、それは $v_1(Z)$ の存在によって漸近条件 (4.7) からくる各係数に関する束縛条件が変化するためである。 $v_0(Z)$ 及び $v_1(Z)$ は、それぞれ以下を満足する関数である。

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow \infty} v_0(Z) &= s, & \lim_{Z \rightarrow \infty} v_1(Z) &= 1 - s, \\ \lim_{Z \rightarrow 0} v_0(Z) &= -\tilde{s}, & \lim_{Z \rightarrow 0} v_1(Z) &= -(1 - \tilde{s}). \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

ここで、 s 及び \tilde{s} はある定数である。式 (D.14) では、 $v_0(Z)$ 及び $v_1(Z)$ が $Z \rightarrow 0, \infty$ 極限でそれぞれ定数で振る舞うことを仮定した。漸近条件 (D.14) より、 $f(Z)$ は以下のように変形を受ける。

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad f_0 = e^{-\pi i \lambda \tilde{s}}, \quad f_1 = e^{-\pi i \lambda s}. \quad (\text{D.15})$$

以上より、 $v_0(Z)$ はこの $f(Z)$ を持つワンカット解 (D.8) で与えられる。

次に、鞍点方程式 (D.11) を満たす $v_1(Z)$ の具体形を考えよう。 $v_0(Z)$ の場合と同様に、以下の関数を導入する。

$$q(Z) := e^{-\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{\frac{\pi i \lambda}{n} v_1(Z)} + e^{\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i \lambda}{n} v_1(Z)}. \quad (\text{D.16})$$

$q(Z)$ は、鞍点方程式 (D.11) を通じて分岐 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 上で連続な関数であることが示せる。¹ 方程式 (D.16) を解くと、 $v_1(Z)$ は

$$v_1(Z) = \frac{n}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{q(Z) + \sqrt{q^2(Z) - 4}}{2} \right) + \frac{n_0}{\lambda}, \quad (\text{D.17})$$

¹ m を任意の整数とした関数 $q_m(Z) := e^{\frac{\pi i \lambda m}{n} (v_1(Z) - n/\lambda)} + e^{-\frac{\pi i \lambda m}{n} (v_1(Z) - n/\lambda)}$ もまた分岐 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 上で連続的な関数である。しかしステップ型ツーカット解の場合、 $m = \pm 1$ としない限り、 $q_m(Z)$ は漸近条件では決めきれない未定係数が現れてしまう。従って、この解析では連続関数として関数 (D.16) を用いた。

この正則性を用いた議論を、重ね合わせ型マルチカット解に拡張する場合には、恐らく一般の m を取った $q_m(Z)$ が必要である。例えば、Migdal 積分形式から導かれた重ね合わせ型マルチカット解 (4.41) では、 $m = 2$ の $q_m(Z)$ が現れている。

と与えられる。

分岐上で連続な関数 $q(Z)$ を決定しよう。漸近条件 (D.14) から、 $q(Z)$ は

$$\begin{aligned} q_1 &:= \lim_{Z \rightarrow \infty} q(Z) = e^{-\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{\frac{\pi i \lambda}{n}(1-s)} + e^{\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i \lambda}{n}(1-s)}, \\ q_0 &:= \lim_{Z \rightarrow 0} q(Z) = e^{-\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i \lambda}{n}(1-\bar{s})} + e^{\frac{n_0 \pi i}{n}} e^{\frac{\pi i \lambda}{n}(1-\bar{s})}, \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

を満足する。ところで、 $v_1(Z)$ は A_1 から B_2 の間に分岐を持つので

$$\sqrt{q^2(Z) - 4} \propto \sqrt{(Z - A_1)(Z - B_2)}, \quad (\text{D.19})$$

であることが要請される。しかし $q(Z)$ が複素平面上で正則な多項式型であるとする、条件 (D.19) と漸近条件 (D.18) は矛盾してしまうことに気付く。従って、ここでは $q(Z)$ の条件を緩めて、極を持つことを許すことにする。極の位置の自然な選択は、鞍点方程式 (D.11) の左辺の値が切り替わる $Z = D_1 := B_1$ である。 $Z = D_1$ での極を許し、条件 (D.19) と漸近条件 (D.18) を満足する $q(Z)$ は

$$q(Z) = \frac{q_1 Z - q_0 D_1}{Z - D_1}, \quad (\text{D.20})$$

である。ここで、係数 q_0 及び q_1 は、分岐の端点 A_1, D_1, B_2 と以下のように関係する。

$$\frac{2(4 - q_0 q_1) D_1}{q_1^2 - 4} = -(A_1 + B_2), \quad \frac{(q_0^2 - 4) D_1^2}{q_1^2 - 4} = A_1 B_2. \quad (\text{D.21})$$

導出された $v_1(Z)$ が、鞍点方程式 (D.11) を満足することを確認してみよう。 $Z \in \mathcal{C}_1$ 上で、式 (D.11) の左辺は

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v_1(Z + i\epsilon) + v_1(Z - i\epsilon)] \\ &= \frac{2n_0}{\lambda} + \frac{n}{\pi i \lambda} \left[\log \left(\frac{q(Z) - i\sqrt{4 - q^2(Z)}}{2} \right) + \log \left(\frac{q(Z) + i\sqrt{4 - q^2(Z)}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2n_0}{\lambda}, \quad (Z \in \mathcal{C}_1), \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

と評価することが出来る。 $q(Z)$ の構造から、 $Z = D_1$ では $v_1(Z)$ の虚部は対数発散を持ち、実部は n/λ だけ変化する。従って \mathcal{C}_2 上に移ると、式 (D.22) の右辺は $2(n_0 + n)/\lambda$ に変化し、鞍点方程式 (D.11) が確かに満たされていることが分かる。この $v_1(Z)$ の分岐の構造は、図 4.5 を参照せよ。

また分岐 $[A_1, B_2]$ は、 $\log Z$ に関する全ての面上に存在するが、鞍点方程式 (4.5) は、 n_0 面上の \mathcal{C}_1 や $(n_0 + n)$ 面上の \mathcal{C}_2 のみでしか満たさないことに気付く。これは全ての Riemann 面上に固有値が入っているわけではなく、あくまで固有値が集積しているのが n_0 面や $(n_0 + n)$ 面上の分岐内であることを示している。

以上より、ステップ型ツーカット解は正則性を用いた議論から

$$v(Z) = \frac{1}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{f(Z) - \sqrt{f^2(Z) - 4Z}}{2} \right) + \frac{n}{\pi i \lambda} \log \left(\frac{q(Z) + \sqrt{q^2(Z) - 4}}{2} \right) - \frac{n_0}{\lambda},$$

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z, \quad q(Z) = \frac{q_1 Z - q_0 D_1}{Z - D_1}, \quad (\text{D.23})$$

と得られる。この表式は、5つの未定係数 f_0, f_1, q_0, q_1 及び D_1 を持つが、これらは関係式 (D.10), (D.21) を通じて A_1, B_2, D_1 で書ける。従って実際の未定係数は3つである。

A_1, B_2, D_1 を用いて記述した式 (D.23) は、Migdal 積分形式から導出した解析解 (4.24) と一致する。以上より、正則性を用いた議論からもステップ型ツーカット解を導出出来た。

D.2.3 一般化

正則性を用いた解の構成法は、複雑な積分を介する必要が無いという点で、Migdal 積分形式を用いる手法より簡単である。この方法は、pure $U(N)$ CS 行列模型の一般解 (4.44) の積分後の形式を全て与えてくれるだろうか。

ステップ型ツーカット解の解析 (D.23) の単純な拡張から、正則性を用いてステップ型マルチカット解 (4.33) を構成することは可能である。従ってこの更なる拡張から、重ね合わせ型を含む一般解が得られそうだと期待出来る。

しかし、実は重ね合わせ型マルチカット解にこの解析を拡張することは簡単ではない。例えば、ワンカット解とステップ型マルチカット解の重ね合わせの積分後の形式 (4.41) では、 $f(Z)$ がステップとは関係の無い位置 $Z = -1$ に極を持つ。このように重ね合わせ型の解は、複素平面上に非物理的な極を持つ可能性がある。非物理的な極の存在を連続関数に許すと、 $f(Z)$ や $q(Z)$ を決定する正確な規則を見つけることが難しく、これに伴ってこの手法を用いた一般解の構成は難しい。

付 録 E pure $U(N)$ Chern-Simons 行列模型の厳密計算

本付録では、pure $U(N)$ CS 行列模型の分配関数 (4.1) の厳密解 (4.16) の導出 [16] を補足する。まず \sinh 項の積について、因数定理から導かれる恒等式

$$\prod_{i < j}^N 2 \sinh \frac{x_i - x_j}{2} = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{j=1}^N e^{\left(\frac{N+1}{2} - \sigma(j)\right)x_j}, \quad (\text{E.1})$$

を用いる。ここで \sum_{σ} は、 N 個の要素の置換について全通りを足し上げる。この恒等式を用いると、分配関数 (4.1) は

$$Z_N = \frac{(-1)^{N(N-1)/2}}{N!} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_j}{2\pi} e^{\frac{ik}{4\pi} u_j^2 + (N+1 - \sigma_1(j) - \sigma_2(j))u_j}, \quad (\text{E.2})$$

と書き換えることが出来る。更に置換 σ_1, σ_2 について $\sigma_1(j) = j$ に固定すると、式 (E.2) は置換 σ_2 のみの足し上げで書ける。 $\sigma_1(j) = j$ となる配位は全ての足し上げ $\Sigma_{\sigma_1, \sigma_2}$ 中に $N!$ 個存在するので、分配関数は

$$Z_N = (-1)^{N(N-1)/2} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_j}{2\pi} e^{\frac{ik}{4\pi} u_j^2 + (N+1 - j - \sigma(j))u_j}, \quad (\text{E.3})$$

と書き換えることが出来る。

この積分 (E.3) は、CS 準位 k を虚軸方向に微小量だけずらす正則化

$$k \rightarrow k + i\epsilon, \quad (\epsilon \ll 1 : \mathbb{R}_+), \quad (\text{E.4})$$

の下で Gaussian 積分が可能である。従って、被積分関数の指数関数部分を平方完成して積分を行えば

$$Z_N = (-1)^{N(N-1)/2} (-ik)^{-N/2} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} e^{\frac{i\pi}{k} \sum_{j=1}^N (N+1-j-\sigma(j))^2}, \quad (\text{E.5})$$

と評価出来る。平方完成により、現れた指数関数項内の和は更に

$$\sum_{j=1}^N (N+1-j-\sigma(j))^2 = -\frac{1}{3} N(N+1)(N+2) + 2 \sum_{j=1}^N j\sigma(j), \quad (\text{E.6})$$

と書き換えることが出来る。

従って分配関数は

$$\begin{aligned}
Z_N &= (-1)^{N(N-1)/2} (-ik)^{-N/2} e^{\frac{\pi i}{3k} N(N+1)(N+2)} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} e^{\frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^N j\sigma(j)} \\
&= (-1)^{N(N-1)/2} (-ik)^{-N/2} e^{\frac{\pi i}{6k} N(N^2-1)} \prod_{n < m}^N 2 \sinh \left[-\frac{\pi i}{k} (m-n) \right], \quad (\text{E.7})
\end{aligned}$$

と与えられる。最後の等式では、再び恒等式 (E.1) を用いた。また \sinh 部分は、以下のよう書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\prod_{n < m}^N 2 \sinh \left[-\frac{\pi i}{k} (m-n) \right] &= \prod_{m=1}^N \prod_{n=m+1}^N \left(-2i \sin \left[\frac{\pi}{k} (m-n) \right] \right) \\
&= (-i)^{\frac{1}{2}N(N-1)} \prod_{m=1}^{N-1} \left[2 \sin \frac{\pi m}{k} \right]^{N-m}. \quad (\text{E.8})
\end{aligned}$$

以上を用いると、pure $U(N)$ CS 行列模型の分配関数は

$$Z_N = e^{\frac{N^2}{4}\pi i} e^{\frac{\pi i}{6k} N(N^2-1)} k^{-N/2} \prod_{m=1}^{N-1} \left[2 \sin \frac{\pi m}{k} \right]^{N-m}, \quad (\text{E.9})$$

と評価され、厳密解 (4.16) が示される。

参考文献

- [1] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2007).
- [2] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2007).
- [3] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85 [[hep-th/9503124](#)]. [[333\(1995\)](#)].
- [4] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [[hep-th/9510017](#)].
- [5] E. Brezin and V.A. Kazakov, *Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 144.
- [6] M.R. Douglas and S.H. Shenker, *Strings in Less Than One-Dimension*, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 635. [[635\(1989\)](#)].
- [7] D.J. Gross and A.A. Migdal, *Nonperturbative Two-Dimensional Quantum Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 127. [[127\(1989\)](#)].
- [8] D.J. Gross and A.A. Migdal, *A Nonperturbative Treatment of Two-dimensional Quantum Gravity*, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 333. [[333\(1989\)](#)].
- [9] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model: A Conjecture*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112 [[hep-th/9610043](#)]. [[435\(1996\)](#)].
- [10] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *A Large N reduced model as superstring*, *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 467 [[hep-th/9612115](#)].
- [11] R. Dijkgraaf, E.P. Verlinde and H.L. Verlinde, *Matrix string theory*, *Nucl. Phys.* **B500** (1997) 43 [[hep-th/9703030](#)].
- [12] D.E. Berenstein, J.M. Maldacena and H.S. Nastase, *Strings in flat space and pp waves from $N=4$ superYang-Mills*, *JHEP* **04** (2002) 013 [[hep-th/0202021](#)].
- [13] J.M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [[hep-th/9711200](#)]. [[Adv. Theor. Math. Phys.2,231\(1998\)](#)].

- [14] O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, *N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals*, *JHEP* **10** (2008) 091 [[arXiv:0806.1218](#)].
- [15] V. Pestun, *Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops*, *Commun. Math. Phys.* **313** (2012) 71 [[arXiv:0712.2824](#)].
- [16] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter*, *JHEP* **03** (2010) 089 [[arXiv:0909.4559](#)].
- [17] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *Nonperturbative Tests of Three-Dimensional Dualities*, *JHEP* **10** (2010) 013 [[arXiv:1003.5694](#)].
- [18] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461. [[337\(1973\)](#)].
- [19] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J.B. Zuber, *Planar Diagrams*, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978) 35.
- [20] T. Eguchi and H. Kawai, *Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large N Gauge Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1063.
- [21] T. Morita and K. Sugiyama, *Multi-cut solutions in Chern-Simons matrix models*, *Nucl. Phys.* **B929** (2018) 1 [[arXiv:1704.08675](#)].
- [22] T. Morita and K. Sugiyama, *Toward the construction of the general multi-cut solutions in Chern-Simons Matrix Models*, [arXiv:1805.00831](#). [[JHEP08,168\(2018\)](#)].
- [23] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *Matrix model as a mirror of Chern-Simons theory*, *JHEP* **02** (2004) 010 [[hep-th/0211098](#)].
- [24] N. Halmagyi and V. Yasnov, *The Spectral curve of the lens space matrix model*, *JHEP* **11** (2009) 104 [[hep-th/0311117](#)].
- [25] S. Pasquetti and R. Schiappa, *Borel and Stokes Nonperturbative Phenomena in Topological String Theory and c=1 Matrix Models*, *Annales Henri Poincare* **11** (2010) 351 [[arXiv:0907.4082](#)].
- [26] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *From weak to strong coupling in ABJM theory*, *Commun. Math. Phys.* **306** (2011) 511 [[arXiv:1007.3837](#)].
- [27] T. Morita and K. Sugiyama, *work in progress*, .

- [28] M. Marino, *Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern-Simons-matter theories*, *J. Phys.* **A44** (2011) 463001 [[arXiv:1104.0783](#)].
- [29] M. Mariño, *Lectures on non-perturbative effects in large N gauge theories, matrix models and strings*, *Fortsch. Phys.* **62** (2014) 455 [[arXiv:1206.6272](#)].
- [30] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *Exact instanton expansion of the ABJM partition function*, *PTEP* **2015** (2015) 11B104 [[arXiv:1507.01678](#)].
- [31] M. Marino, *Localization at large N in Chern–Simons-matter theories*, *J. Phys.* **A50** (2017) 443007 [[arXiv:1608.02959](#)].
- [32] N. Itzhaki, J.M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, *Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges*, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 046004 [[hep-th/9802042](#)].
- [33] I.R. Klebanov and A.A. Tseytlin, *Entropy of near extremal black p -branes*, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 164 [[hep-th/9604089](#)].
- [34] J.H. Schwarz, *Superconformal Chern-Simons theories*, *JHEP* **11** (2004) 078 [[hep-th/0411077](#)].
- [35] J. Bagger and N. Lambert, *Modeling Multiple $M2$'s*, *Phys. Rev.* **D75** (2007) 045020 [[hep-th/0611108](#)].
- [36] J. Bagger and N. Lambert, *Gauge symmetry and supersymmetry of multiple $M2$ -branes*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 065008 [[arXiv:0711.0955](#)].
- [37] J. Bagger and N. Lambert, *Comments on multiple $M2$ -branes*, *JHEP* **02** (2008) 105 [[arXiv:0712.3738](#)].
- [38] A. Gustavsson, *Algebraic structures on parallel $M2$ -branes*, *Nucl. Phys.* **B811** (2009) 66 [[arXiv:0709.1260](#)].
- [39] O. Aharony, O. Bergman and D.L. Jafferis, *Fractional $M2$ -branes*, *JHEP* **11** (2008) 043 [[arXiv:0807.4924](#)].
- [40] D. Gaiotto and A. Tomasiello, *The gauge dual of Romans mass*, *JHEP* **01** (2010) 015 [[arXiv:0901.0969](#)].
- [41] E. Witten, *Chern-Simons gauge theory as a string theory*, *Prog. Math.* **133** (1995) 637 [[hep-th/9207094](#)].
- [42] M. Marino and P. Putrov, *ABJM theory as a Fermi gas*, *J. Stat. Mech.* **1203** (2012) P03001 [[arXiv:1110.4066](#)].

- [43] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *Instanton Effects in ABJM Theory from Fermi Gas Approach*, *JHEP* **01** (2013) 158 [[arXiv:1211.1251](#)].
- [44] F. Calvo and M. Marino, *Membrane instantons from a semiclassical TBA*, *JHEP* **05** (2013) 006 [[arXiv:1212.5118](#)].
- [45] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *Instanton Bound States in ABJM Theory*, *JHEP* **05** (2013) 054 [[arXiv:1301.5184](#)].
- [46] Y. Hatsuda, M. Marino, S. Moriyama and K. Okuyama, *Non-perturbative effects and the refined topological string*, *JHEP* **09** (2014) 168 [[arXiv:1306.1734](#)].
- [47] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *Nonperturbative aspects of ABJM theory*, *JHEP* **11** (2011) 141 [[arXiv:1103.4844](#)].
- [48] D.L. Jafferis, *The Exact Superconformal R-Symmetry Extremizes Z*, *JHEP* **05** (2012) 159 [[arXiv:1012.3210](#)].
- [49] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, *Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere*, *JHEP* **03** (2011) 127 [[arXiv:1012.3512](#)].
- [50] K. Hosomichi, *A Review on SUSY Gauge Theories on S^3* , in *New Dualities of Supersymmetric Gauge Theories* (J. Teschner, ed.), p. 307. 2016. [arXiv:1412.7128](#).
- [51] M. Marino, *Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three manifold invariants*, *Commun. Math. Phys.* **253** (2004) 25 [[hep-th/0207096](#)].
- [52] Y. Makkennko, *Methods of Contemporary Gauge Theory*, Cambridge (2002).
- [53] B. Eynard, T. Kimura and S. Ribault, *Random matrices*, [arXiv:1510.04430](#).
- [54] B. Eynard and N. Orantin, *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, *Commun. Num. Theor. Phys.* **1** (2007) 347 [[math-ph/0702045](#)].
- [55] A.A. Migdal, *Loop Equations and $1/N$ Expansion*, *Phys. Rept.* **102** (1983) 199.
- [56] M. Tierz, *Soft matrix models and Chern-Simons partition functions*, *Mod. Phys. Lett.* **A19** (2004) 1365 [[hep-th/0212128](#)].
- [57] Y. Hatsuda and K. Okuyama, *Resummations and Non-Perturbative Corrections*, *JHEP* **09** (2015) 051 [[arXiv:1505.07460](#)].
- [58] M. Honda, *How to resum perturbative series in 3d $N=2$ Chern-Simons matter theories*, *Phys. Rev.* **D94** (2016) 025039 [[arXiv:1604.08653](#)].

- [59] M. Honda, *Supersymmetric solutions and Borel singularities for $N=2$ supersymmetric Chern-Simons theories*, *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 021601 [[arXiv:1710.05010](#)].
- [60] A. Chattopadhyay, P. Dutta and S. Dutta, *Emergent Phase Space Description of Unitary Matrix Model*, *JHEP* **11** (2017) 186 [[arXiv:1708.03298](#)].
- [61] A. Chattopadhyay, D. Suvankar and Neetu, *Chern-Simons Theory on Seifert Manifold and Matrix Model*, *Phys. Rev.* **D100** (2019) 126009 [[arXiv:1902.07538](#)].
- [62] D.J. Gross and E. Witten, *Possible Third Order Phase Transition in the Large N Lattice Gauge Theory*, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 446.
- [63] S.R. Wadia, *$N = \infty$ Phase Transition in a Class of Exactly Soluble Model Lattice Gauge Theories*, *Phys. Lett.* **93B** (1980) 403.
- [64] S.R. Wadia, *A Study of $U(N)$ Lattice Gauge Theory in 2-dimensions*, [arXiv:1212.2906](#).
- [65] P.V. Buividovich, G.V. Dunne and S.N. Valgushev, *Complex Path Integrals and Saddles in Two-Dimensional Gauge Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 132001 [[arXiv:1512.09021](#)].
- [66] G. Álvarez, L. Martínez Alonso and E. Medina, *Complex saddles in the Gross-Witten-Wadia matrix model*, *Phys. Rev.* **D94** (2016) 105010 [[arXiv:1610.09948](#)].
- [67] K. Okuyama, *Wilson loops in unitary matrix models at finite N* , *JHEP* **07** (2017) 030 [[arXiv:1705.06542](#)].
- [68] T. Morita and V. Niarchos, *F-theorem, duality and SUSY breaking in one-adjoint Chern-Simons-Matter theories*, *Nucl. Phys.* **B858** (2012) 84 [[arXiv:1108.4963](#)].
- [69] C.P. Herzog, I.R. Klebanov, S.S. Pufu and T. Tesileanu, *Multi-Matrix Models and Tri-Sasaki Einstein Spaces*, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 046001 [[arXiv:1011.5487](#)].
- [70] V. Niarchos, *Comments on F-maximization and R-symmetry in 3D SCFTs*, *J. Phys.* **A44** (2011) 305404 [[arXiv:1103.5909](#)].
- [71] S. Minwalla, P. Narayan, T. Sharma, V. Umesh and X. Yin, *Supersymmetric States in Large N Chern-Simons-Matter Theories*, *JHEP* **02** (2012) 022 [[arXiv:1104.0680](#)].
- [72] T. Suyama, *Notes on Planar Resolvents of Chern-Simons-matter Matrix Models*, *JHEP* **11** (2016) 049 [[arXiv:1605.09110](#)].

- [73] V.A. Kazakov, M. Staudacher and T. Wynter, *Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs*, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996) 451 [[hep-th/9502132](#)].
- [74] T. Suyama, *On Large N Solution of Gaiotto-Tomasiello Theory*, *JHEP* **10** (2010) 101 [[arXiv:1008.3950](#)].
- [75] A. Cagnazzo, D. Sorokin and L. Wulff, *String instanton in $AdS(4) \times CP^{*3}$* , *JHEP* **05** (2010) 009 [[arXiv:0911.5228](#)].
- [76] A. Grassi, M. Marino and S. Zakany, *Resumming the string perturbation series*, *JHEP* **05** (2015) 038 [[arXiv:1405.4214](#)].
- [77] F. David, *Phases of the large N matrix model and nonperturbative effects in 2-d gravity*, *Nucl. Phys.* **B348** (1991) 507.
- [78] F. David, *Nonperturbative effects in matrix models and vacua of two-dimensional gravity*, *Phys. Lett.* **B302** (1993) 403 [[hep-th/9212106](#)].
- [79] H. Lin, O. Lunin and J.M. Maldacena, *Bubbling AdS space and $1/2$ BPS geometries*, *JHEP* **10** (2004) 025 [[hep-th/0409174](#)].
- [80] N. Halmagyi, T. Okuda and V. Yasnov, *Large N duality, lens spaces and the Chern-Simons matrix model*, *JHEP* **04** (2004) 014 [[hep-th/0312145](#)].
- [81] T. Okuda, *Derivation of Calabi-Yau crystals from Chern-Simons gauge theory*, *JHEP* **03** (2005) 047 [[hep-th/0409270](#)].
- [82] N. Halmagyi and T. Okuda, *Bubbling Calabi-Yau geometry from matrix models*, *JHEP* **03** (2008) 028 [[arXiv:0711.1870](#)].
- [83] J. Polchinski, *What is string theory?*, in *NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory Les Houches, France, August 2-September 9, 1994*, 1994. [hep-th/9411028](#).
- [84] K. Okuyama, *Phase Transition of Anti-Symmetric Wilson Loops in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **12** (2017) 125 [[arXiv:1709.04166](#)].
- [85] A. Barranco and J.G. Russo, *Large N phase transitions in supersymmetric Chern-Simons theory with massive matter*, *JHEP* **03** (2014) 012 [[arXiv:1401.3672](#)].

- [86] L. Santilli and M. Tierz, *Phase transitions and Wilson loops in antisymmetric representations in Chern–Simons-matter theory*, *J. Phys.* **A52** (2019) 385401 [arXiv:1808.02855].
- [87] A. Nedelin, *Phase transitions in 5D super Yang-Mills theory*, *JHEP* **07** (2015) 004 [arXiv:1502.07275].
- [88] T. Kuroki and F. Sugino, *New critical behavior in a supersymmetric double-well matrix model*, *Nucl. Phys.* **B867** (2013) 448 [arXiv:1208.3263].
- [89] M.G. Endres, T. Kuroki, F. Sugino and H. Suzuki, *SUSY breaking by nonperturbative dynamics in a matrix model for 2D type IIA superstrings*, *Nucl. Phys.* **B876** (2013) 758 [arXiv:1308.3306].
- [90] T. Kuroki and F. Sugino, *One-point functions of non-SUSY operators at arbitrary genus in a matrix model for type IIA superstrings*, *Nucl. Phys.* **B919** (2017) 325 [arXiv:1609.01628].
- [91] M. Hanada, M. Hayakawa, N. Ishibashi, H. Kawai, T. Kuroki, Y. Matsuo and T. Tada, *Loops versus matrices: The Nonperturbative aspects of noncritical string*, *Prog. Theor. Phys.* **112** (2004) 131 [hep-th/0405076].
- [92] A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, *Liouville field theory on a pseudosphere*, hep-th/0101152.
- [93] 太田信義 “超弦理論・ブレイン・M 理論” シュプリンガー現代理論物理学シリーズ (2002 年)
- [94] 今村洋介 “重力でゲージ理論を調べる” 日本物理学会誌 Vol.55, No3, (2000 年)
- [95] 夏梅誠 “超弦理論の応用 物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方” サイエンス社 (2012 年)
- [96] 奥山和美 “ABJM 理論の非摂動効果とその周辺” 東京工業大学集中講義資料 (非公開), (2017 年 11 月)
- [97] 今村洋介 “M2 ブレーンと ABJM 模型” 日本物理学会誌 Vol.68, No7, (2013 年)
- [98] 土屋麻人 “弦理論と行列模型 弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方” サイエンス社 (2014 年)