

✓

Correções Radiativas em Teoria Quântica de Campos sob Condições de Contorno

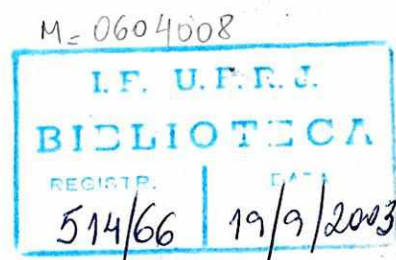
Fabricio Augusto Barone Rangel

Orientador: Carlos Farina de Souza

Co-orientador: Ricardo Moritz Cavalcanti

IF
Tese
R 196 fe

i



Correções Radiativas em Teoria Quântica de Campos sob Condições de Contorno

Fabricio Augusto Barone Rangel

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade do Brasil, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Carlos Farina de Souza

Co-orientador: Ricardo Moritz Cavalcanti

Rio de Janeiro
25 de Março de 2003

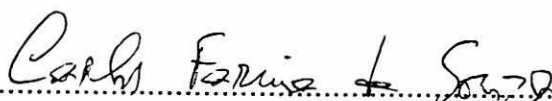
**Correções Radiativas em Teoria Quântica de Campos sob
Condições de Contorno**

FABRICIO AUGUSTO BARONE RANGEL

**Carlos Farina de Souza
Ricardo Moritz Cavalcanti**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

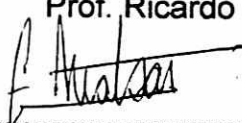
Aprovada por:



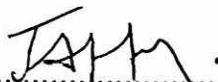
Presidente, Prof. Carlos Farina de Souza



Prof. Ricardo Moritz Cavalcanti



Prof. George Emanuel Avraam Matsas



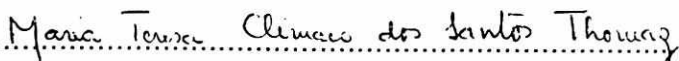
Prof. José Abdalla Helaïel Neto



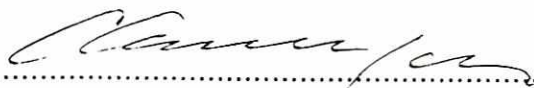
Prof. Paulo Américo Maia Neto



Prof. Marcus Venícius Cougo Pinto



Profa. Maria Teresa Climaco dos Santos Thomaz



Prof. Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho

Rangel, Fabricio Augusto Barone

R196 Correções Radiativas em Teoria Quântica de Campos sob Condições de Contorno/ Fabricio Augusto Barone Rangel. -Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2003.

ix,101f.: il.; 29,7cm.

Orientador: Carlos Farina de Souza

Co-orientador: Ricardo Moritz Cavalcanti

Tese (doutorado) - UFRJ/ Instituto de Física/ Programa de Pós-graduação em Física, 2003.

Referências Bibliográficas: f. 122-129.

1. Teoria de Campos. 2. Condições de Contorno. 3. Efeito Casimir. 4. Deslocamento Lamb. 4. Variações na velocidade da luz. I. Souza, Carlos Farina de; Cavalcanti, Ricardo Moritz. II. Universidade do Brasil, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Título.

Resumo

Correções Radiativas em Teoria Quântica de Campos sob Condições de Contorno

Fabricio Augusto Barone Rangel

Orientador: Carlos Farina de Souza

Co-orientador: Ricardo Moritz Cavalcanti

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Nesta tese estudamos a influência de condições de contorno em alguns fenômenos descritos pela teoria quântica de campos. Analisamos como as contribuições de correções radiativas em alguns processos físicos são afetadas quando condições de contorno são impostas em operadores de campo envolvidos nos processos em consideração.

Esta tese pode ser dividida, em linhas gerais, em duas partes: na primeira, analisamos alguns efeitos de condições de contorno sobre o campo eletromagnético, na segunda, calculamos as correções radiativas à energia de Casimir de um campo escalar com massa com auto-interação $\lambda\phi^4$.

Na primeira parte desta tese, estudamos como a alteração sofrida pelo campo de radiação, devido à presença de placas paralelas, modifica os níveis de energia do átomo de Hidrogênio.

Rio de Janeiro
25 de Março de 2003

Estudamos ainda como a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética é afetada pela presença de placas paralelas quando essa onda se propaga entre as mesmas, fenômeno conhecido como efeito Scharnhorst. Discutimos também como seria o efeito Scharnhorst para a Eletrodinâmica de Born-Infeld.

A segunda parte da tese está dedicada ao estudo das correções radiativas ao efeito Casimir de um campo escalar com massa e auto-interação $\lambda\phi^4$, sob diversas condições de contorno. Trata-se de um cálculo em primeira ordem na constante de acoplamento λ . Calculamos pela primeira vez tal correção para um campo escalar com massa e verificamos explicitamente que o limite de massa nula coincide com os resultados existentes na literatura. Apresentamos ainda um cálculo alternativo para tais correções radiativas, no caso de um campo escalar sem massa.

Rio de Janeiro
25 de Março de 2003

Abstract

Radiative Corrections in Quantum Field Theory under Boundary Conditions

Fabricio Augusto Barone Rangel

Orientador: Carlos Farina de Souza

Co-orientador: Ricardo Moritz Cavalcanti

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

In this thesis we study the influence of boundary conditions on some phenomena which are described properly by the quantum field theory. More specifically, we analyse how the contributions coming from radiative corrections in a few physical processes are affected when boundary conditions are imposed on the field operators involved in such processes.

This thesis can be divided into two parts: in the first one, we analyse some effects caused by the consideration of boundary conditions on the electromagnetic field, while in the second part, we calculate the radiative corrections to the Casimir energy of a massive scalar field with a polynomial self-interaction of the type $\lambda\phi^4$.

In the first part, we study how the change in the radiation field due to the presence of parallel plates modifies the energy levels of a Hydrogen atom. Besides, we study how the

Rio de Janeiro
25 de Março de 2003

propagation velocity of an electromagnetic wave is affected by the presence of parallel plates when this wave propagates between them, a phenomenon known as Scharnhorst effect. We also discuss the Scharnhorst effect in the context of the Born-Infeld Electrodynamics.

The second part of this thesis is devoted to the study of radiative corrections to the Casimir effect of a massive scalar field with self-interaction of the type $\lambda\phi^4$ under several boundary conditions. Such a study turns to be a two-loop effect, but in first order in the coupling constant λ . We computed for the first time such a correction for a massive scalar field and checked explicitly that the zero mass limit coincides with the known results present in literature. For the particular case of a massless scalar field, we also present an alternative calculation for such radiative corrections.

Rio de Janeiro
25 de Março de 2003

Frederico, Celina, Rejane Nair e Ludmila

Agradecimentos

Para a elaboração desse trabalho gostaria de agradecer ao meu orientador Carlos Farina, com quem tive o prazer de conviver e trabalhar durante os quatro anos de meu doutoramento, agradeço também ao meu co-orientador Ricardo Cavalcanti pessoa com a qual tive a oportunidade e alegria de trabalhar.

Agradeço aos professores Marcus Venícius, Alexandre Tort, Filadelfo Santos, Danilo Teixeira, Arvind Vaidya, Henrique Boschi, Paulo Américo, José Helayél, Sebastião Dias, Carlos Aragão e Mauricio Calvão por sempre terem se demonstrado prestativos e atenciosos.

Agradeço a Jayme Mendes, Milton Ribeiro, Franz Peter Farias e Antonio Aguiar Pinto pelas discussões e pelo companherismo, a George Matsas, Luiz Davidovich e Cláudio Lenz pelas discussões interessantes e por auxílio bibliográfico, e aos professores Carlos Aguiar e Felipe Coelho pela atenção que sempre me ofereceram.

Agradeço aos funcionários da secretaria Carlos José Delgado e Rosângela Leonardo, e da gráfica Julio Costa, Denis Oliveira e Ledivando Seabra.

Quero agradecer sinceramente a Rejane Silva e Celina Barone, por sempre me darem todo o tipo de apoio e incentivo ao longo de toda a minha vida. Agradeço sinceramente a Frederico Barone, pessoa que me deu todo o tipo de apoio e incentivo e a quem realmente devo minha carreira, sendo meu maior incentivador a todo instante. Dentre outras coisas, Frederico alimentou meu interesse por ciências desde minha infância sendo, de certa forma, meu primeiro professor de física.

Sumário

Introdução	1
1 Influência de Placas Paralelas no Espectro do Hidrogênio	7
1.1 Introdução	8
1.2 A teoria de Perturbação	12
1.2.1 Átomo Próximo de uma das Placas	17
1.2.2 Átomo Distante de Ambas as Placas	18
1.3 Campo de Radiação entre uma Placa Condutora e uma Permeável	19
1.4 Correções nos Níveis de Energia	26
1.5 Comentários Finais	32
2 O Efeito Scharnhorst e a Eletrodinâmica de Born-Infeld	33
2.1 Introdução	34
2.2 A Lagrangiana de Born-Infeld	38
2.3 A Lagrangiana de Euler-Heisenberg	40
2.3.1 Campos Lentamente Variáveis e Aproximadamente Uniformes	44
2.4 O Efeito Scharnhorst e a Técnica de Barton	55
2.5 Comentários Finais	62
3 Correções Radiativas ao Efeito Casimir	65
3.1 Introdução ao Efeito Casimir	66
3.2 O Efeito Casimir Eletromagnético	70
3.3 Método Funcional para o Campo Escalar Livre	73

3.4	Correções Radiativas ao Efeito Casimir	79
3.4.1	Campo Escalar sem Massa	80
3.4.2	Campo Escalar com Massa	86
3.5	Comentários Finais	97
	Conclusao	98
A	Demonstrando (1.23) e (1.48)	102
B	Soma de Resíduos	104
C	Resultados para Manipular a Equação (2.55)	109
D	Cálculo do Traço e do Determinante Presentes na Equação (2.83)	110
D.1	Cálculo do Traço da Equação (2.83)	110
D.2	Cálculo do Determinante da Equação (2.83)	111
E	Cálculo do Funcional (3.28)	113
F	Extensão Analítica de $F(s, a)$	116
G	Expansão de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} K_1(nz)$ em Série de Potências de z	118
	Referências Bibliográficas	122

Introdução

Esta tese trata exclusivamente de fenômenos e processos físicos, todos eles descritos e explicados dentro do contexto da Teoria Quântica de Campos, que podem ser alterados quando se considera a interação do sistema em questão com a sua vizinhança. Obviamente, há uma enormidade de tais fenômenos e não temos aqui a pretensão de estudar todos eles, o que seria uma tarefa impossível. Temos, sim, a intenção de abordar alguns deles, escolhidos de modo que, ao estudá-los, saibamos como proceder em fenômenos análogos.

A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) usual trata de processos que ocorrem no espaço livre (ou de sistemas atômicos no espaço livre). No entanto, isso corresponde apenas a uma aproximação para a situação real, onde o sistema está, em geral, circundado por superfícies metálicas, dielétricas, etc.. Por exemplo, é um fato conhecido na literatura que a presença de placas, ou cavidades de um modo geral, provoca modificações nos modos do campo de radiação subjacente. Tais modificações, por sua vez, alteram a energia do estado de vácuo do campo de radiação, dando origem a forças macroscópicas entre as fronteiras, fenômeno conhecido com o nome de efeito Casimir [1]. Além disso, qualquer modificação nos modos do campo de radiação, não importa a sua origem, pode causar também alterações nas propriedades radiativas de sistemas atômicos que interajam com o campo de radiação.

Atualmente, tem sido muito importante estudar a influência da vizinhança de um sistema atômico em suas propriedades radiativas, pois as medidas experimentais de quantidades atômicas (por exemplo, o fator $g - 2$ do elétron ou a constante de Rydberg) estão cada vez mais precisas e, por conseguinte, a comparação de tais medidas com as previsões teóricas já exige cálculos que levem em consideração a interação dos sistemas com a sua vizinhança. Esse tipo de estudo serve também para controlar ou modificar as propriedades radiativas do sistema atômico em questão (por exemplo, taxas de decaimento por emissão espontânea

podem ser aumentadas ou até mesmo suprimidas devido à presença de espelhos a distâncias finitas). Além da largura das raia espectrais sofrerem alterações devido à proximidade do sistema atômico com paredes metálicas ou fronteiras em geral (fato diretamente relacionado com a alteração na taxa de emissão espontânea), os próprios níveis de energia de um átomo se alteram quando este se encontra, por exemplo, dentro de uma cavidade. No caso do Hidrogênio, diríamos que trata-se da influência de cavidades no deslocamento Lamb. Esse ramo da EDQ é conhecido com o nome de EDQ de cavidades e tem atraído a atenção de muitos físicos nos últimos anos (tanto teóricos quanto experimentais), principalmente devido ao enorme avanço tecnológico permitindo que experimentos com alto grau de precisão possam ser realizados (para uma revisão sobre esses assuntos indicamos as referências [2, 3, 4, 5]).

A interação do campo de radiação com cavidades é extremamente difícil de ser tratada exatamente e, por esse motivo, é comum simularmos tal interação por meio de condições de contorno impostas sobre o campo. Embora as condições de contorno usualmente utilizadas sejam um tanto idealizadas, a imposição das mesmas sobre o campo já nos fornece, na maioria dos casos, bons resultados. E como é usual em física, a partir de uma situação muito idealizada, podemos começar a considerar situações mais realistas. Por exemplo, no caso de uma parede metálica, em lugar de tratá-la como fronteira perfeitamente condutora, podemos passar a tratá-la como tendo uma condutividade finita, usando para isso algum modelo conveniente.

Muitas vezes, em lugar de tornar mais realista a condição de contorno, podemos tentar melhorar o cálculo perturbativo determinando as primeiras correções radiativas relevantes ao problema em estudo, mas mantendo válida a condição de contorno idealizada (este será o nosso procedimento, por exemplo, no capítulo 3). Essa conduta pode ser interessante para testar se certas condições de contorno geram problemas incuráveis no que diz respeito à renormalizabilidade da teoria quando considerada em ordens mais altas na constante de acoplamento. Se esse for o caso, tais condições certamente são idealizadas demais, a tal ponto que a teoria completa com elas não faz sentido.

A imposição de condições de contorno em campos quantizados não se restringe ao caso do campo de radiação, embora nesse caso seja mais intuitivo compreendê-las, uma vez que o campo eletromagnético existe classicamente e estamos inclusive familiarizados com as condições de contorno impostas por superfícies metálicas, dielétricas, permeáveis, etc..

No entanto, é extremamente relevante estudar de que modo outros campos, como por exemplo, o campo escalar, ou o campo fermiônico, se comportam sob condições de contorno. A relevância de tal estudo é mais sutil e muitas vezes esse tipo de estudo serve como um primeiro passo para o entendimento de problemas mais realistas. Por exemplo, em algumas situações, em lugar de considerar o campo eletromagnético, é conveniente considerar um campo escalar sem massa, evitando assim a complicação trazida pelas polarizações do campo eletromagnético (a energia de Casimir para o campo eletromagnético entre duas placas paralelas perfeitamente condutoras pode ser obtida calculando-se a energia de Casimir para um campo escalar sem massa, submetido à condição de Dirichlet em planos paralelos e multiplicada por 2, para levar em conta as duas polarizações do campo eletromagnético [5]). Vale mencionar também que no chamado modelo de sacola para os hádrons [6], tanto o campo bosônico dos glúons, quanto o campo fermiônico dos quarks estão confinados dentro da sacola, de modo que, dentro desse modelo, condições de contorno sobre tais campos surgem de forma bastante natural. A consideração de tais condições é importante na determinação da massa do hádron, pois a energia de Casimir gerada pelo confinamento desses campos pode chegar a aproximadamente 9% da massa do hádron.

Nesta tese, trataremos especificamente de três problemas, dois deles envolvendo o campo de radiação, apresentados, respectivamente nos capítulos 1 e 2, e o terceiro envolvendo um campo escalar, discutido no capítulo 3. No entanto, antes de entrar em mais detalhes a respeito de cada um dos problemas a serem abordados, gostaria de chamar a atenção para o fato de que em todos eles estaremos calculando a influência de condições de contorno em contribuições provenientes de correções radiativas.

No capítulo 1, analisamos a influência de duas placas paralelas entre si, uma delas infinitamente permeável e a outra perfeitamente condutora, nos níveis de energia de um átomo de Hidrogênio localizado entre as mesmas. O caso em que as duas placas são perfeitamente condutoras já foi tratado na literatura [7, 8, 9, 10]. Desse modo, a obtenção de novos resultados, associados a condições de contorno envolvendo placas de naturezas diferentes, proporcionou a comparação entre resultados calculados com diferentes condições de contorno, ajudando assim no entendimento de sistemas do tipo átomo-cavidade. Calculamos nosso resultado usando teoria de perturbação de segunda ordem, e as funções de correlação relevantes ao problema são regularizadas com o método de separação de pontos introduzido por Schwinger.

No capítulo 2, estudamos um efeito muito interessante da EDQ de cavidades, mas que ainda não foi verificado experimentalmente, por ser muito pequeno: trata-se do chamado efeito Scharnhorst [11], que consiste na variação da velocidade da luz quando esta se propaga entre duas placas paralelas e perfeitamente condutoras, cuja presença impõe condições de contorno sobre o campo de radiação. A explicação desse efeito reside no fato de que o campo dos férmions interage tanto com o campo eletromagnético clássico, como também com o campo quantizado. Desse modo, um campo eletromagnético clássico, como o de uma onda eletromagnética, pode interagir de forma indireta com o campo de radiação, por meio do laço fermiônico (par elétron pósitron). A presença de placas materiais altera o propagador do fóton, o que é percebido diretamente pelo campo fermiônico (que está em interação com o campo de radiação), e indiretamente pela onda (pois o campo eletromagnético interage com o campo fermiônico), o que acaba influenciando sua propagação. Note, portanto, que o efeito Scharnhorst é um efeito a dois laços. A metodologia a ser empregada no estudo desse efeito baseia-se numa técnica introduzida por Barton [12], que usa como ponto de partida a lagrangiana efetiva da EDQ a um laço, a saber, a lagrangiana de Euler-Heisenberg. No entanto, nesse capítulo, iremos aplicar a técnica de Barton para lagrangianas ligeiramente mais genéricas, mas que contêm, como casos particulares, a lagrangiana de Euler-Heisenberg e lagrangianas do tipo Born-Infeld. Nossos cálculos são feitos com três arranjos de placas, o que significa três condições de contorno diferentes. Mostramos explicitamente que para uma certa lagrangiana do tipo Born-Infeld não haveria efeito Scharnhorst, pelo menos na ordem considerada.

Finalmente, no capítulo 3, discutimos o efeito Casimir. É nesse capítulo que se encontram os resultados mais relevantes desta tese. Esse efeito, proposto por H.B.G. Casimir em 1948 [1], consiste na atração entre duas placas neutras, paralelas e perfeitamente condutoras. É um efeito intrinsecamente quântico e que pode ser explicado em termos da variação da energia de ponto zero associada ao campo eletromagnético quantizado quando duas placas são colocadas muito próximas uma da outra. O efeito Casimir foi verificado experimentalmente pela primeira vez por Sparnaay [13] em 1958 com uma precisão experimental muito baixa e somente quatro décadas mais tarde é que experimentos feitos diretamente com metais foram realizados novamente [14]. Para discussões detalhadas sobre o efeito Casimir sugerimos as referências [15, 16, 17], enquanto introduções breves a esse efeito podem ser encontradas nas

referências [18, 19].

O efeito Casimir, em sua forma geral, é um ramo de pesquisa bastante ativo nos dias atuais. Isso é devido em parte à sua característica interdisciplinar, uma vez que ele tem relevância não só na EDQ, como também em física de matéria condensada, teorias com dimensões extras compactificadas, gravitação e cosmologia, física matemática e em nanotecnologia, na construção de pequenos dispositivos elétricos.

A interação de um campo quantizado, mesmo em seu estado de vácuo, com placas materiais já é extremamente complicada, motivo pelo qual simulamos tal interação impondo condições de contorno bastante idealizadas sobre os campos. Como consequência, mesmo quando tratamos um campo não interagente, mas sujeito a condições de contorno, já encontramos um deslocamento da energia do vácuo de tal campo. Note que nessa aproximação (campos não interagentes) nenhuma constante de acoplamento aparece na expressão da energia de Casimir, apenas constantes universais como \hbar , c e, obviamente, parâmetros geométricos característicos do sistema em estudo.

No entanto, os campos da natureza são interagentes e o efeito Casimir deve ser calculado, em princípio, para tais campos. Como isso é extremamente difícil, apela-se para a teoria de perturbação e calcula-se, por exemplo, a correção em primeira ordem na constante de acoplamento para o efeito Casimir. No caso da EDQ, a primeira correção radiativa ao efeito Casimir já foi calculada [17, 20] e se revelou muito pequena. Os experimentos atuais ainda não possuem precisão suficiente para poder detectá-la. Não obstante, esse é um cálculo de grande importância do ponto vista teórico, pois permite, num contexto mais simples, examinar as dificuldades (e eventualmente tentar saná-las) que se interpõem à renormalização de modelos de teoria de campos definidos em espaços-tempos curvos ou com fronteiras, e que por esse motivo não exibem invariância de Poincaré. Resultados a respeito de correções radiativas ao efeito Casimir para o campo escalar sem massa, com auto-interação $\lambda\phi^4$, também podem ser encontrados na literatura [21, 22, 23, 24, 25].

Outro fato interessante a respeito do efeito Casimir é que a um laço (ordem zero na constante de acoplamento) ele depende somente das frequências dos modos normais do campo, e não dos seus modos. Em outras palavras, nessa ordem, a energia de Casimir pode ser escrita simplesmente como a soma da energia de ponto zero dos modos do campo, devidamente regularizada e renormalizada. Uma consequência imediata desse fato é que, a energia de

Casimir em ordem zero de um campo escalar sujeito à condição de Dirichlet em dois planos paralelos entre si, é exatamente igual àquela calculada com o campo satisfazendo à condição de Neumann nos planos. No entanto, em ordens mais altas na constante de acoplamento, era de se esperar que essa igualdade deixasse de existir. Surpreendentemente, isso não acontece, ou seja, as correções radiativas em ordem λ para a energia de Casimir de um campo escalar sem massa, mas com auto-interação $\lambda\phi^4$, calculada com ambas as condições, continuam sendo iguais. No capítulo 3, fazemos o cálculo da primeira correção radiativa à energia de Casimir de um campo escalar com essa auto-interação, mas considerando pela primeira vez na literatura um campo com massa. Mostramos explicitamente que a igualdade mencionada acima, válida para o caso sem massa, deixa de existir. Ainda para um campo escalar com massa, fazemos o cálculo com condições mistas (Dirichlet-Neumann). Apresentamos também nesse capítulo uma técnica alternativa para o cálculo da correção radiativa à energia de Casimir de campos escalares sem massa com auto-interação $\lambda\phi^4$.

Capítulo 1

Influência de Placas Paralelas no Espectro do Hidrogênio

Neste capítulo investigamos a influência da presença de placas materiais sobre os níveis de energia de um átomo de Hidrogênio não relativístico, ou seja, estudamos a influência de placas materiais no deslocamento Lamb. Em particular, consideramos a situação em que o átomo se encontra entre duas placas paralelas, sendo uma delas perfeitamente condutora, e a outra, perfeitamente permeável. Calculamos explicitamente as correções nos níveis de energia decorrentes das condições de contorno impostas sobre o campo de radiação pela presença das placas. Obtemos ainda os deslocamentos Lamb para um átomo localizado próximo a uma única placa, quer seja ela permeável ou condutora. Embora já existissem na literatura cálculos de deslocamento Lamb para átomos na presença de placas materiais, havia poucos resultados envolvendo placas permeáveis.

Esse capítulo está estruturado da seguinte forma. Na seção 1.1 fazemos uma breve introdução sobre o deslocamento Lamb. Na seção 1.2 discutimos brevemente a teoria de perturbação relevante para os cálculos a serem feitos em seguida. A seção 1.3 é destinada ao cálculo das funções de correlação do campo eletromagnético pertinentes ao problema em consideração. Finalmente, na seção 1.4 obtemos os deslocamentos Lamb para um átomo não relativístico situado na região entre duas placas paralelas e de naturezas diferentes, como descrito acima. Comentários finais a respeito dos resultados encontrados são apresentados na seção 1.5.

1.1 Introdução

Ao fazermos um tratamento não relativístico do átomo de Hidrogênio, e desconsiderando efeitos de spin, somos levados à resolução da equação de Schrödinger com um potencial coulombiano, que nos fornece os níveis de energia [26, 27].

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \right). \quad (1.1)$$

Na expressão anterior, m_e e m_p são as massas do elétron e do próton, respectivamente, e $n = 1, 2, 3, \dots$ é o chamado número quântico principal. Como o potencial considerado tem simetria esférica, esperava-se encontrar $2\ell + 1$ estados com um mesmo nível de energia, com ℓ denotando o número quântico de momento angular orbital. Porém, a degenerescência encontrada é dada por

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2, \quad (1.2)$$

maior do que a esperada. Esse resultado é usualmente chamado de degenerescência acidental.

O tratamento do átomo de Hidrogênio por meio da equação de Dirac é mais realista, por levar em conta tanto a relatividade, como o spin do elétron. Os níveis de energia encontrados por meio desta abordagem são dados por [28, 29, 30]

$$E_{n,j} = m_e c^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.3)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c$ é a constante de estrutura fina, $n = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico principal, e j o número quântico de momento angular total, que satisfaz a restrição $j + (1/2) \leq n$ e pode ter valores inteiros ou semi-inteiros.

Embora a degenerescência tenha sido quebrada, pois agora os níveis dependem não só de n , mas também de $j = \ell \pm 1/2$, ainda existe uma degenerescência para os níveis com o mesmo valor de n e j . Isso ocorre, por exemplo, para os estados com $n = 2$ e $j = 0 + (1/2)$, e $n = 2$ e $j = 1 - (1/2)$, designados, respectivamente, por $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Apesar disso, experimentos realizados a partir dos anos 30 [31, 32] indicavam que as energias desses níveis deveriam ser diferentes. Em 1947, Lamb e Retherford [33] se basearam no fato de que o estado $2S_{1/2}$ é

meta-estável, com tempo de vida muito grande ¹, para realizar um experimento mostrando que o nível $2S_{1/2}$ está cerca de 1000MHz acima do nível $2P_{1/2}$. Essa diferença é conhecida desde então pelo nome de deslocamento Lamb. Em 1952, com experimentos mais refinados, Lamb e Retherford [34] apresentaram o valor $1058,27 \pm 1\text{MHz}$ para o deslocamento Lamb, sendo que atualmente o valor aceito é de $1057,845\text{MHz} \pm (0,13)\%$ [35].

A explicação para o deslocamento Lamb é dada pela Eletrodinâmica Quântica, e decorre do fato de que os elétrons atômicos estão não só submetidos ao potencial coulombiano, como também em interação com o campo de radiação, mesmo quando este se encontra no seu estado de vácuo, ou seja, sem fótons presentes. Fato este desconsiderado tanto no resultado não relativístico (1.1), como no resultado (1.3) obtido pela equação de Dirac.

O deslocamento Lamb é um efeito predominantemente não relativístico, cuja explicação foi dada pela primeira vez por Bethe em 1947 [36], que considerou, na teoria não-relativística de Schrödinger, o acoplamento do elétron atômico com o campo de radiação. Fazendo um cálculo perturbativo, após subtrair a auto-energia do elétron, Bethe obteve o valor 1040MHz para o deslocamento Lamb, em excelente acordo com os dados experimentais. Atualmente, entende-se por deslocamento Lamb qualquer alteração nos níveis de energia de átomos decorrentes da interação de seus elétrons com o campo de radiação em estado de vácuo.

Podemos encontrar em textos comumente utilizados em cursos de pós-graduação [37, 38], cálculos mais refinados do deslocamento Lamb, considerando outros efeitos da EDQ, como a correção de vértice, o momento anômalo do elétron e a polarização do vácuo (veja figura 1.1). Cálculos recentes em mais altas ordens na constante de acoplamento fornecem o valor de $1057,862 \pm 0,014\text{MHz}$ para o deslocamento Lamb, em esplêndido acordo com os dados experimentais [30].

Ultimamente, as medições efetuadas em sistemas físicos, não só do deslocamento Lamb, mas também de outras grandezas relacionadas à EDQ, como o momento anômalo do elétron e taxas de decaimento atômico, têm atingido tamanha precisão que já é relevante considerar, no cálculo de tais grandezas, a interação desses sistemas com a sua vizinhança (por exemplo, alguns desses experimentos são realizados dentro de cavidades). Estudos a respeito da influência causada pela vizinhança de sistemas atômicos em suas propriedades radiativas

¹O estado $2S_{1/2}$ é meta-estável, porque a sua emissão espontânea para o estado fundamental $1S_{1/2}$ pela emissão de um único fóton é proibida, já que para esta transição $\Delta\ell = 0$.

também podem se revelar úteis no controle dessas propriedades (por exemplo, a presença de cavidades pode aumentar, diminuir ou até mesmo suprimir taxas de decaimento espontâneo).

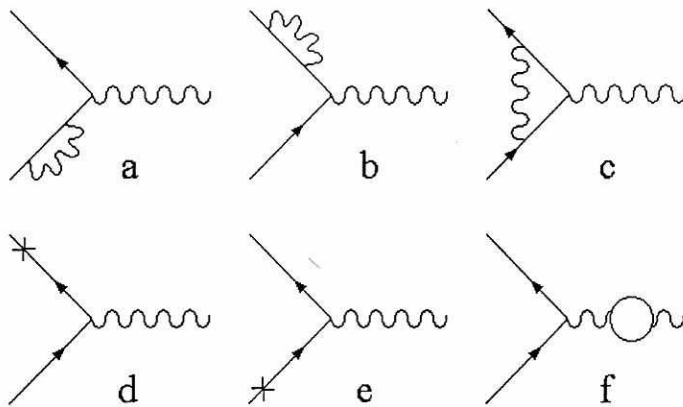


Figura 1.1: Gráficos que contribuem para o deslocamento Lamb: (a,b) auto-energia do elétron; (c) correção de vértice; (d,e) contratermo de massa do elétron; (f) auto-energia do fóton.

Nesse capítulo investigamos como os níveis de energia de um átomo de Hidrogênio, não-relativístico, são alterados quando este se encontra em uma região entre um par de placas infinitas e paralelas entre si, cuja presença impõe condições de contorno sobre o campo de radiação. Estas alterações nos níveis de energia, como apontadas por Power [39] em 1966, são decorrentes do fato de que os elétrons do átomo estão em interação com o campo de radiação, e este, por sua vez, tem seus modos distorcidos pelas condições de contorno impostas pelas placas. Nesse sentido, podemos dizer que os elétrons sentem indiretamente a presença das placas. Conseqüentemente, a presença de placas materiais influencia o deslocamento Lamb.

O caso no qual temos duas placas perfeitamente condutoras foi inicialmente discutido por Barton [7] e, posteriormente, por Lütken e Ravndal [10]. Casos em que se tem somente uma única placa presente também já foram discutidos na literatura [40, 41]. Mais recentemente, ainda para situações envolvendo duas placas paralelas, algumas generalizações foram feitas por Barton [8, 9], e Jhe e Nha [42, 43]. Há também estudos envolvendo superfícies dielétricas [44].

Apesar da influência de placas permeáveis na taxa de decaimento espontâneo já ter sido investigada [45, 46], sua influência em níveis de energia atômicos ainda não havia sido muito explorada [46, 47]. Tendo isto em mente, vamos considerar neste capítulo o caso específico de

um átomo de Hidrogênio situado entre duas placas paralelas, sendo uma delas perfeitamente condutora, e a outra infinitamente permeável. Daqui por diante, iremos nos referir a estas condições de contorno como condições CP.

Tal configuração de placas foi considerada pela primeira vez por Boyer, no cálculo do efeito Casimir dentro do contexto da Eletrodinâmica Estocástica [48]. As condições de contorno CP têm despertado um interesse especial, pois apresentam algumas propriedades peculiares, como por exemplo, o fato de que fornecem uma pressão de Casimir repulsiva entre as placas [48, 49, 50] (veja a referência [51] para correções térmicas a este efeito). Mais recentemente, essa configuração de placas foi usada no contexto do efeito Scharnhorst [52, 53, 54].

Para o cálculo dos deslocamentos dos níveis atômicos devido à presença de placas, vamos utilizar teoria de perturbação de níveis degenerados em segunda ordem. As funções de correlação do campo de radiação, que daqui por diante serão chamadas simplesmente de correlatores dos campos, necessárias para nossos cálculos futuros, serão calculadas com a técnica de regularização de separação do tempo imaginário introduzida por Schwinger ². Os resultados obtidos para os deslocamentos dos níveis de energia serão então comparados com aqueles já existentes na literatura para os casos onde as duas placas são perfeitamente condutoras [10] e também quando elas são infinitamente permeáveis [46, 47]. De agora em diante, as condições de contorno impostas por essas últimas configurações serão designadas por condições CC e PP respectivamente. Apesar das condições CC e PP fornecerem a mesma pressão de Casimir, é interessante destacar que elas influem de formas diferentes nos níveis de energia atômicos. Como casos limites dos resultados obtidos, vamos determinar os deslocamentos nos níveis de energia de um átomo situado próximo a uma única placa infinitamente permeável, e de um átomo situado próximo a uma única placa infinitamente condutora, estando este último resultado presente na literatura [40].

²Outras técnicas de regularização poderiam ter sido empregadas, podemos citar como exemplo o método da função zeta. Para uma introdução ao método da função zeta, e sua conexão com o método de tempo próprio de Schwinger, sugerimos a referência [55].

1.2 A teoria de Perturbação

Nesta seção, expomos as linhas gerais do problema abordado ao longo do capítulo e da teoria de perturbação de segunda ordem de nível degenerado, que nos possibilitará calcular os deslocamentos Lamb em seções posteriores.

O sistema que estamos considerando é composto por um átomo descrito pela equação de Schrödinger, e pelo campo eletromagnético no estado de vácuo, mas submetido a determinadas condições de contorno, a serem especificadas mais adiante. Vamos efetuar os cálculos considerando sempre a aproximação de dipolo, ou seja, supondo que as dimensões do átomo sejam desprezíveis frente ao comprimento de onda do campo de radiação.

Nos cálculos a seguir, \vec{x} designa a posição do núcleo do átomo no espaço, enquanto \vec{r} o operador de posição do elétron atômico, tendo como origem o núcleo atômico, como indicado na figura 1.2. Na aproximação de dipolo, os operadores de campo eletromagnético são aproximadamente constantes e uniformes ao longo de todo o átomo.

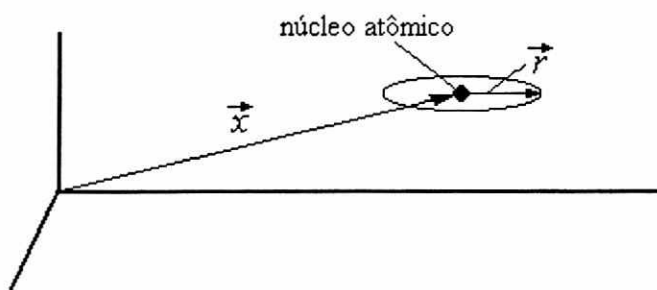


Figura 1.2: Sistema de coordenadas utilizado

A hamiltoniana do problema que vamos abordar pode ser escrita na forma ³:

$$H = H_A + (H_C - \epsilon_{VAC}) + H_I , \quad (1.4)$$

sendo H_A a hamiltoniana da parte atômica, H_C a hamiltoniana do campo eletromagnético, ϵ_{VAC} a energia do campo eletromagnético em estado de vácuo, porém na presença de placas paralelas, e H_I a hamiltoniana de interação do campo de radiação com o elétron atômico, dada por [26, 27, 56]

$$H_I = e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{x}) . \quad (1.5)$$

³Estamos usando unidades onde $\hbar = 1$ e $c = 1$

Na expressão anterior, e é a carga do elétron, e \vec{E} o operador de campo elétrico. Note que este último está calculado no ponto \vec{x} , onde se localiza o núcleo atômico.

Sendo o campo de radiação tomado como constante e uniforme ao longo de todo o átomo (aproximação de dipolo), as correções nos autovalores de energia atômicos impostas pelas flutuações do campo elétrico \vec{E} podem ser consideradas como um certo tipo de efeito Stark, sendo dessa forma proporcionais a E/em_e (o que pode ser verificado usando-se a equação (1.5), $\alpha = e^2/4\pi$ e o fato de que o raio atômico é da ordem de $|\vec{r}| \sim (\alpha m_e)^{-1}$). Já as correções oriundas das flutuações do campo magnético \vec{B} podem ser consideradas como um certo tipo de efeito Zeeman, sendo portanto proporcionais a eB/m_e . Em nossas unidades, E e B têm a mesma ordem de grandeza, sendo assim, temos que $E/em_e \gg eB/m_e$, já que a carga e é uma quantidade muito pequena ($e \ll 1$). Portanto podemos ignorar a perturbação causada pelo campo magnético frente àquela causada pelo campo elétrico.

Ao longo do texto vamos usar $|\varepsilon_n\rangle$ para designar um auto-estado atômico, de autovalor ε_n , ou seja,

$$H_A|\varepsilon_n\rangle = \varepsilon_n|\varepsilon_n\rangle, \quad (1.6)$$

e $|\vec{k}, \lambda\rangle$ para designar um estado do campo de radiação com um único fóton presente, com vetor de onda \vec{k} e polarização λ . Sendo $\omega_{\vec{k}}$ a energia desse fóton, temos

$$(H_C - \varepsilon_{VAC})|\vec{k}, \lambda\rangle = \omega_{\vec{k}}|\vec{k}, \lambda\rangle. \quad (1.7)$$

Além disso, por questão de conveniência, vamos escrever a hamiltoniana de interação (1.5) como

$$H_I = eW, \quad W = \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{x}). \quad (1.8)$$

A interação dada pela hamiltoniana H_I em (1.8) será considerada como uma perturbação no sistema átomo mais campo, cuja hamiltoniana não-perturbada é dada por

$$H_A + H_C - \varepsilon_{VAC}. \quad (1.9)$$

Estando o campo em estado de vácuo, designado por $|0\rangle$, o estado do sistema não-perturbado átomo mais campo é dado pelo produto direto:

$$|\varepsilon_n, 0\rangle = |\varepsilon_n\rangle \otimes |0\rangle, \quad (1.10)$$

com autovalores de energia dados por

$$\begin{aligned} (H_A + (H_C - \varepsilon_{VAC}))|\varepsilon_n, 0\rangle &= (H_A|\varepsilon_n\rangle) \otimes |0\rangle + \varepsilon_n \otimes (H_C - \varepsilon_{VAC})|0\rangle \\ &= \varepsilon_n|\varepsilon_n, 0\rangle, \end{aligned} \quad (1.11)$$

ou seja, a energia do sistema não-perturbado é a própria energia do átomo. Portanto, para encontrar as correções nos níveis de energia atômicos devemos encontrar as correções nos níveis de energia do sistema átomo-campo.

De um modo geral, sistemas quânticos sujeitos a potenciais centrais possuem níveis de energia ε_n degenerados, sendo assim, um estado $|\varepsilon_n\rangle$ de energia ε_n deve ser considerado como uma combinação linear de estados:

$$|\varepsilon_n\rangle = \sum_{j=1}^{g_n} c_j^{(n)} |\varepsilon_{n,j}\rangle, \quad (1.12)$$

onde g_n designa o grau de degenerescência do nível n , e j designa quaisquer outros números quânticos que determinem os auto-estados $|\varepsilon_{n,j}\rangle$ da hamiltoniana H_A . Temos ainda:

$$H_A|\varepsilon_{n,j}\rangle = \varepsilon_n|\varepsilon_{n,j}\rangle. \quad (1.13)$$

Como feito usualmente em teoria de perturbação, vamos escrever os autovalores de energia do sistema como uma série no parâmetro perturbativo e da hamiltoniana de interação (1.8):

$$\varepsilon_{n,j}(e) = e^0\varepsilon_n + e^1\beta_{n,j}^{(1)} + e^2\beta_{n,j}^{(2)} + \dots \quad (1.14)$$

Com o objetivo de encontrar o parâmetro $\beta_{n,j}^{(1)}$ em (1.14), que fornece a primeira correção ao nível de energia ε_n , utilizamos teoria de perturbação para níveis degenerados, o que nos leva à equação matricial

$$\sum_{\ell=1}^{g_n} c_\ell^{(n)} \langle 0, \varepsilon_{n,j} | \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{x}) | \varepsilon_{n,\ell}, 0 \rangle = \beta_{n,j}^{(1)} \sum_{k=1}^{g_n} c_k^{(n)} \langle 0, \varepsilon_{n,j} | \varepsilon_{n,k}, 0 \rangle. \quad (1.15)$$

Observando que \vec{r} é um operador atômico, enquanto \vec{E} é um operador de campo, reescrevemos a equação anterior na forma

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\ell=1}^{g_n} c_\ell^{(n)} \langle \varepsilon_{n,j} | r_i | \varepsilon_{n,\ell} \rangle \langle 0 | E_i(\vec{x}) | 0 \rangle = \beta_{n,j}^{(1)} c_j^{(n)}, \quad (1.16)$$

onde usamos a ortonormalidade dos estados atômicos. Utilizando ainda o fato de que o valor esperado no vácuo do campo é nulo, ou seja, $\langle 0|E_i|0\rangle = 0$, obtemos o seguinte resultado:

$$\beta_{n,j}^{(1)} = 0 . \quad (1.17)$$

Não há, portanto, correções em primeira ordem em e nos níveis de energia atômicos.

Segue das equações (1.14) e (1.17) que a primeira correção perturbativa para a energia do estado ε_n é, no mínimo, quadrática em e

$$\Delta\varepsilon_{n,j} := \varepsilon_{n,j}(e) - \varepsilon_n \approx e^2 \beta_{n,j}^{(2)} . \quad (1.18)$$

A quantidade $\beta_{n,j}^{(2)}$, que fornece a correção em segunda ordem para a energia, satizfaz a equação

$$\sum_{\ell=1}^{g_n} \mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)} c_\ell^{(n)} = \beta_{n,j}^{(2)} c_j^{(n)} , \quad (1.19)$$

onde definimos

$$\mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)} = \langle 0, \varepsilon_{n,j} | \mathcal{M} | \varepsilon_{n,\ell}, 0 \rangle , \quad (1.20)$$

sendo \mathcal{M} o operador

$$\mathcal{M} = \sum_{\lambda} \not\sum_{\vec{k}} \sum_m \sum_{i=1}^{g_m} \frac{W|\varepsilon_{m,i}, \vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda, \varepsilon_{m,i}| W}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} . \quad (1.21)$$

Utilizando as definições (1.8) e (1.21), podemos reescrever a equação (1.20) como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)} &= \langle 0, \varepsilon_{n,j} | \left[\sum_{p,v} \sum_{\lambda} \not\sum_{\vec{k}} \sum_m \sum_{i=1}^{g_m} \frac{r_v E_v |\varepsilon_{m,i}, \vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda, \varepsilon_{m,i}| r_p E_p}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \right] | \varepsilon_{n,\ell}, 0 \rangle \\ &= \sum_{p,v} \sum_{\lambda} \not\sum_{\vec{k}} \sum_m \sum_{i=1}^{g_m} \frac{\langle \varepsilon_{n,j} | r_v | \varepsilon_{m,i} \rangle \langle \varepsilon_{m,i} | r_p | \varepsilon_{n,\ell} \rangle \langle 0 | E_v | \vec{k}, \lambda \rangle \langle \vec{k}, \lambda | E_p | 0 \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} , \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde os índices v, p designam x, y, z .

Com a expansão do campo elétrico em termos dos operadores de criação e aniquilação, pode-se mostrar que os termos cruzados nos índices p e v são nulos (veja Apêndice A). Sendo assim, reescrevemos a equação (1.22) considerando somente os termos onde $v = p$

$$\mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)} = \langle \varepsilon_{n,j} | \sum_p \sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \sum_m \sum_{i=1}^{g_m} r_p |\varepsilon_{m,i}\rangle \langle \varepsilon_{m,i} | r_p \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} | \varepsilon_{n,\ell} \rangle . \quad (1.23)$$

Será mais conveniente, na soma (1.23), separar as contribuições oriundas dos estados com $m = n$ daquelas provenientes dos estados com $m \neq n$, ou seja, escrever o elemento de matriz (1.23) na forma

$$\mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)} = \mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)}|_{DEG} + \mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)}|_{NDEG} , \quad (1.24)$$

onde definimos a contribuição dos estados com $m = n$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)}|_{DEG} &= \langle \varepsilon_{n,j} | \sum_p \sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^{g_n} r_p |\varepsilon_{n,i}\rangle \langle \varepsilon_{n,i} | r_p \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{-\omega_{\vec{k}}} | \varepsilon_{n,\ell} \rangle \\ &= - \sum_p \left[\sum_{i=1}^{g_n} \langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{n,i} \rangle \langle \varepsilon_{n,i} | r_p | \varepsilon_{n,\ell} \rangle \right] \left[\sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right] , \end{aligned} \quad (1.25)$$

e a contribuição dos estados com $m \neq n$ por

$$\mathcal{M}_{j,\ell}^{(n)}|_{NDEG} = \langle \varepsilon_{n,j} | \sum_p \sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \sum_{m \neq n} \sum_{i=1}^{g_m} r_p |\varepsilon_{m,i}\rangle \langle \varepsilon_{m,i} | r_p \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} | \varepsilon_{n,\ell} \rangle . \quad (1.26)$$

Escolhendo uma base de auto-estados atômicos $|\varepsilon_{n,j}\rangle$ que diagonalize o operador (1.21), somente os elementos diagonais em (1.23) serão não nulos, sendo assim, suas contribuições (1.25) e (1.26) serão dadas respectivamente por

$$\mathcal{M}_{j,j}^{(n)}|_{(DEG)} = - \sum_p \left[\sum_{i=1}^{g_n} |\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right] \left[\sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right] , \quad (1.27)$$

$$\mathcal{M}_{j,j}^{(n)}|_{(NDEG)} = \sum_p \sum_{m \neq n} \left[\sum_{i=1}^{g_m} |\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{m,i} \rangle|^2 \right] \left[\sum_\lambda \not\sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \right] . \quad (1.28)$$

Vamos agora nos restringir a dois casos distintos, a saber: (i) quando o átomo se localiza em uma região próxima de uma das placas, e (ii) quando ele se encontra em uma região distante das mesmas.

1.2.1 Átomo Próximo de uma das Placas

Para um átomo localizado próximo a uma das placas, pode-se mostrar [10, 47] que os termos dominantes na soma em (1.28) são aqueles com $\omega_{\vec{k}} \gg \varepsilon_n - \varepsilon_m$. Sendo assim, vamos escrever o denominador em (1.28) como sendo aproximadamente $\omega_{\vec{k}}$, fazendo com que ambas as contribuições (1.27) e (1.28) da matriz \mathcal{M} adquiram a mesma forma. Neste caso, em uma base que diagonalize \mathcal{M} , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{j,j}^{(n)} &= \mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{(DEG)} + \mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{(NDEG)} \\ &\approx - \sum_p \left[\left(\sum_m \sum_{i=1}^{g_m} |\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{m,i} \rangle|^2 \right) \left(\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Utilizando a relação de completeza dos estados atômicos,

$$\sum_m \sum_{i=1}^{g_m} |\varepsilon_{m,i}\rangle \langle \varepsilon_{m,i}| = 1, \quad (1.30)$$

podemos reescrever a expressão (1.29) como

$$\mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{\text{perto}} \approx - \sum_p \langle \varepsilon_{n,j} | r_p^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right]. \quad (1.31)$$

Com o auxílio das equações (1.18) e (1.19), obtemos finalmente os deslocamentos de energia para um átomo próximo das placas:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{n,j} \Big|_{\text{perto}} &\approx e^2 \beta_{n,j}^{(2)} = e^2 \mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{\text{perto}} \\ &\approx -e^2 \sum_p \langle \varepsilon_{n,j} | r_p^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.2.2 Átomo Distante de Ambas as Placas

Vamos agora considerar a expressão (1.28) para o caso em que o átomo se encontra distante das placas. Nesta situação pode-se mostrar [10, 47] que os termos dominantes na soma em (1.28) são aqueles onde $\omega_{\vec{k}} \ll \varepsilon_n - \varepsilon_m$. Sendo assim, podemos escrever a equação (1.28) de forma aproximada como:

$$\mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{(NDEG)} = \sum_p \sum_{m \neq n} \left[\sum_{i=1}^{g_m} \frac{|\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{m,i} \rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \right] \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} |\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2 \right]. \quad (1.33)$$

Com o auxílio das polarizabilidades elétricas de frequência zero, que em ordem mais baixa são dadas por

$$\alpha_i = 2e^2 \sum_{m \neq n} \sum_{i=1}^{g_m} \frac{|\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{m,i} \rangle|^2}{\varepsilon_m - \varepsilon_n}, \quad (1.34)$$

reescrevemos a equação (1.33) como:

$$\mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{(NDEG)} = \frac{-1}{2e^2} \sum_p \alpha_p \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} |\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2 \right]. \quad (1.35)$$

Somando as contribuições (1.27) e (1.35) para a matriz \mathcal{M} , e utilizando as equações (1.18) e (1.19), obtemos finalmente os deslocamentos de energia para a situação de um átomo longe das placas:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{n,j} \Big|_{longe} &\approx e^2 \beta_{n,j}^{(2)} = e^2 \left(\mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{DEG} + \mathcal{M}_{j,j}^{(n)} \Big|_{NDEG} \right) \\ &\approx -e^2 \sum_p \left[\sum_{i=1}^{g_n} |\langle \varepsilon_{n,j} | r_p | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right] \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \right] + \\ &\quad - \sum_p \frac{\alpha_p}{2} \left[\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} |\langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.3 Campo de Radiação entre uma Placa Condutora e uma Permeável

Nesta seção, vamos considerar o campo de radiação numa região do espaço entre duas placas paralelas, uma perfeitamente condutora, situada no plano $z = 0$ e a outra, perfeitamente permeável, situada no plano $z = L$. Vamos obter explicitamente os correladores dos campos pertinentes para a obtenção dos deslocamentos dos níveis atômicos causados pela presença dessas placas.

Essa configuração de placas impõe as seguintes condições de contorno sobre o campo eletromagnético:

$$\begin{cases} \hat{z} \times \vec{E}(t, x, y, 0) = 0 \\ \hat{z} \cdot \vec{B}(t, x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z} \times \vec{B}(t, x, y, L) = 0 \\ \hat{z} \cdot \vec{E}(t, x, y, L) = 0 \end{cases} . \quad (1.37)$$

Trabalhando no calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) e escolhendo $A^0 = 0$, uma vez que não há fontes, temos

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.38)$$

Por questão de conveniência, vamos escrever, separadamente, expressões para os modos transversais elétrico (TE) e magnético (TM) do potencial vetor \vec{A} , como segue:

$$\begin{aligned} \vec{A}_k^{TE}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{U}_k^{TE}(\vec{x}) \\ \vec{A}_k^{TM}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{U}_k^{TM}(\vec{x})], \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \vec{U}_k^{TE}(\vec{x}) &= N \hat{z} \sin(k_z z) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{x}} \\ \vec{U}_k^{TM}(\vec{x}) &= \frac{N}{i\omega_{\vec{k}}} \hat{z} \cos(k_z z) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{x}}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

usamos a notação na qual $\vec{x} = (\vec{x}_{\parallel}, z)$ e o vetor de onda, para as condições (1.37), é dado por

$$\vec{k} = (\vec{k}_{\parallel}, k_z) = (k_x, k_y, k_z), \quad k_z = \frac{(n + 1/2)\pi}{L}, \quad \begin{cases} k_x, k_y \in \mathbb{R} \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}, \quad (1.41)$$

e as correspondentes frequências são dadas por

$$\omega_{\vec{k}} = \left[\vec{k}_{\parallel}^2 + \left((n + 1/2)\pi/L \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.42)$$

Ao impormos a condição de normalização

$$\int d^3x \vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda*}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_{\vec{k}'}^{\lambda'}(\vec{x}) = 4\pi^2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}'_{\parallel}), \quad (1.43)$$

nos potenciais (1.39), onde $\lambda = E, M$, obtemos a constante $N = \sqrt{2/\vec{k}_{\parallel}^2} L$. Com isto, podemos escrever o potencial vetor entre as placas na forma

$$\vec{A}(x) = \sum_{\lambda=TE,TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}^{\lambda} \vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + c.c. \right], \quad (1.44)$$

Para quantizarmos o campo clássico (1.44), substituímos os coeficientes de Fourier $a_{\vec{k}}^{\lambda}$ e $a_{\vec{k}}^{\lambda*}$, respectivamente, pelos operadores de aniquilação e de construção $a_{\vec{k}}^{\lambda}$ e $a_{\vec{k}}^{\lambda\dagger}$, que satisfazem as relações de comutação

$$\left[a_{\vec{k}'}^{\lambda'}, a_{\vec{k}}^{\lambda\dagger} \right] = 4\pi^2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}'_{\parallel}), \quad (1.45)$$

com os outros comutadores sendo nulos. Com isso obtemos o operador potencial vetor

$$\vec{A}(x) = \sum_{\lambda=TE,TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}^{\lambda} \vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + a_{\vec{k}}^{\lambda\dagger} \vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda*}(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right]. \quad (1.46)$$

De posse da expressão (1.46) e com o auxílio de (1.38), encontramos o operador campo elétrico

$$\vec{E}(x) = \sum_{\lambda=TE,TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{i\omega_{\vec{k}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}^{\lambda} \vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} - c.h. \right], \quad (1.47)$$

o que nos permite escrever (ver Apêndice A) ⁴,

⁴A equação (1.48) pode parecer uma consequência trivial de uma relação de completeza entre estados de Fock, mas não é. Repare que $|\vec{k}, \lambda\rangle$ designa um estado com um único fóton presente, portanto $\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} |\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda| \neq \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \left| \langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle \right|^2 &= \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \langle 0 | E_p | \vec{k}, \lambda \rangle \langle \vec{k}, \lambda | E_p | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | E_p E_p | 0 \rangle .
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Estes correlatores são divergentes e devem ser devidamente regularizados e renormalizados. Com este intuito, vamos usar o procedimento de regularização de separação do tempo imaginário de Schwinger. Para isso, escrevemos inicialmente os correlatores (1.48) como

$$\langle 0 | E_p(x) E_p(x) | 0 \rangle = \lim_{t' \rightarrow t} \langle 0 | E_p(t, x) E_p(t', x) | 0 \rangle . \tag{1.49}$$

Com o auxílio da expressão (1.47) para o campo elétrico, após algumas manipulações, a equação (1.48) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
\langle 0 | E_x^2(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | E_y^2(x) | 0 \rangle = \\
&= \frac{1}{2L} \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left(\omega_{\vec{k}} + \frac{k_z^2}{\omega_{\vec{k}}} \right) \sin^2(k_z z) e^{i\omega_{\vec{k}}(t'-t)} \\
\langle 0 | E_z^2(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{L} \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left(\omega_{\vec{k}} - \frac{k_z^2}{\omega_{\vec{k}}} \right) \cos^2(k_z z) e^{i\omega_{\vec{k}}(t'-t)} .
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Efetuada a rotação de Wick $t' - t = i\tau$, utilizando as definições das variáveis

$$\lambda = \frac{\pi}{L} , \quad \epsilon = \lambda \tau \quad \text{e} \quad \theta = \lambda z , \tag{1.51}$$

e das funções:

$$\begin{aligned}
\Xi_{\pm}(\epsilon, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 \pm \cos(2k_z z) \right] e^{-(n+1/2)\epsilon} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 \pm \cos\left(2\pi(n+1/2)z/L\right) \right] e^{-(n+1/2)\epsilon} \\
&= \frac{1}{2 \sinh(\epsilon/2)} \pm \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sinh(\epsilon/2 - i\theta)} + c.c \right] ,
\end{aligned} \tag{1.52}$$

reescrevemos as equações (1.50) como

$$\begin{aligned}\langle 0|E_x^2(x)|0\rangle &= \langle 0|E_x^2(x)|0\rangle = \frac{1}{2} \frac{\lambda^3}{4\pi L} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\partial_\epsilon^2 \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \partial_\epsilon^2 \right) \Xi_-(\epsilon, \theta) \Big|_{\epsilon=\lambda\tau} \\ \langle 0|E_z^2(x)|0\rangle &= \frac{\lambda^3}{4\pi L} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\partial_\epsilon^2 \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \partial_\epsilon^2 \right) \Xi_+(\epsilon, \theta) \Big|_{\epsilon=\lambda\tau} .\end{aligned}\quad (1.53)$$

Expandindo as funções Ξ_\pm , dadas pela expressão (1.52), em potências de ϵ , temos

$$\Xi_\pm(\epsilon, \theta) = \frac{1}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{4} T_\pm(\theta) + \frac{\epsilon^3}{96} \left(\frac{7}{60} \mp G(\theta) \right) + O(\epsilon^4) , \quad (1.54)$$

onde definimos as funções:

$$T_\pm(\theta) = \frac{1}{6} \mp \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} , \quad G(\theta) = 6 \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} . \quad (1.55)$$

Substituindo a expansão (1.54) nas equações (1.53), obtemos:

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathbf{E}_x^2(x)|0\rangle &= \langle 0|\mathbf{E}_y^2(x)|0\rangle = \frac{\pi^2}{4L^4} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{4}{\epsilon^4} + \frac{1}{24} \left(G(\theta) + \frac{7}{360} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^4} + \frac{\pi^2}{96L^4} \left(G(\theta) + \frac{7}{360} \right) \\ \langle 0|E_z^2(x)|0\rangle &= \frac{\pi^2}{4L^4} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{4}{\epsilon^4} + \frac{1}{24} \left(G(\theta) - \frac{7}{360} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^4} + \frac{\pi^2}{96L^4} \left(G(\theta) - \frac{7}{360} \right) .\end{aligned}\quad (1.56)$$

onde usamos as definições de λ e ϵ dadas em (1.51).

Como vimos, foi necessário regularizar os correlatores. Nossa tarefa no momento é, portanto, renormalizá-los subtraindo, se possível, os termos espúrios infinitos. Uma inspeção rápida nas equações (1.56) nos mostra que cada um dos correlatores acima foi separado numa parte finita, dependente dos parâmetros característicos do problema, no caso L e z , e uma parte divergente, que depende somente do parâmetro regularizador τ , mas independe de L e z . Esses termos espúrios são contribuições presentes mesmo quando consideramos o campo livre, ou seja, sem condições de contorno. Como estamos interessados somente na

influência das condições de contorno nos deslocamentos dos níveis atômicos, vamos descartar tais termos.

Para calcular as quantidades $\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} |\langle 0|E_p|\vec{k}, \lambda\rangle|^2/\omega_{\vec{k}}$ em (1.36), usamos inicialmente a expansão do campo elétrico (1.47), que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_x|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} &= \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_y|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} = \\
&= \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle 0|E_x(t, z)|\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda|E_x(t', z)|0\rangle}{\omega_{\vec{k}}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} + \frac{k_z^2}{\omega_{\vec{k}}} \right] \sin^2(k_z z) e^{i\omega_{\vec{k}}(t'-t)} \\
\sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_z|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} &= \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{\vec{k}} \frac{\langle 0|E_z(t, z)|\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda|E_z(t', z)|0\rangle}{\omega_{\vec{k}}} \\
&= \frac{1}{L} \lim_{t' \rightarrow t} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} - \frac{k_z^2}{\omega_{\vec{k}}} \right] \cos^2(k_z z) e^{i\omega_{\vec{k}}(t'-t)}.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Com o uso das definições (1.51) e (1.52), reescrevemos as equações (1.57) como

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_x|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} &= \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_y|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2L^3} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} dx g_{-}(x, \theta) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Xi_{-}(\epsilon, \theta) \right], \\
\sum_{\vec{k}} \frac{|\langle 0|E_z|\vec{k}, \lambda\rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} &= \frac{\pi}{2L^3} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \Xi_{+}(\epsilon, \theta) - \int_{\epsilon}^{\infty} dx g_{+}(x, \theta) \right],
\end{aligned} \tag{1.58}$$

onde definimos $g_{\pm}(x, \theta) = (1/x^3) \Xi_{\pm}(x, \theta)$. Para efetuar as integrais acima, consideramos a continuação analítica das funções

$$g_{\pm}(Z, \theta; p) = \frac{1}{Z^p} \Xi_{\pm}(Z, \theta) \tag{1.59}$$

no plano complexo, e integramos $g_{\pm}(Z, \theta; p)$ ao longo do contorno fechado indicado na figura

1.3. Usando o teorema do resíduo, temos

$$\left(\int_{C_p} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{C_\epsilon} \right) dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) = 2\pi i \sum \text{Res} g_{\pm} . \quad (1.60)$$

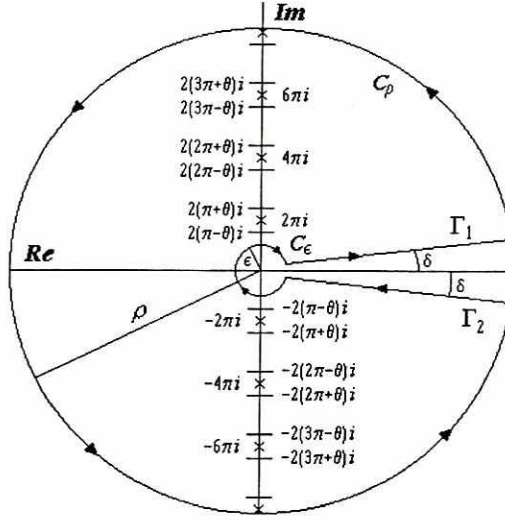


Figura 1.3: Contorno de Integração

Para os caminhos Γ_1 e Γ_2 podemos escrever, considerando o ângulo δ pequeno,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) + \int_{\Gamma_2} dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) &= \int_{\epsilon}^{\infty} dr \frac{e^{i\delta(1-p)}}{r^p} \Xi_{\pm}(r(1+i\delta), \theta) \\ &+ \int_{\infty}^{\epsilon} dr \frac{e^{i(2\pi-\delta)(1-p)}}{r^p} \Xi_{\pm}(r(1-i\delta), \theta) . \end{aligned} \quad (1.61)$$

Tomando o limite $\delta \rightarrow 0$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_1} dZ g_{\pm}(z, \theta) + \int_{\Gamma_2} dZ g_{\pm}(z, \theta) \right] &= (1 - e^{-2\pi ip}) \int_{\epsilon}^{\infty} dr \frac{1}{r^p} \Xi_{\pm}(r, \theta) \\ &= (1 - e^{-2\pi ip}) \int_{\epsilon}^{\infty} dx g_{\pm}(x, \theta; p) . \end{aligned} \quad (1.62)$$

No limite $\rho \rightarrow \infty$, a integral ao longo do caminho C_p se anula, uma vez que o integrando g_{\pm} tende a zero suficientemente rápido. Sendo assim, e também substituindo o resultado (1.62) em (1.60), podemos escrever

$$(1 - e^{-2\pi ip}) \int_{\epsilon}^{\infty} dx g_{\pm}(x, \theta; p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int_{C_{\epsilon}} dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) + 2\pi i \sum \text{Res} g_{\pm} \right]. \quad (1.63)$$

Ao longo do contorno C_{ϵ} , a variável Z tem módulo pequeno, portanto, a função $\Xi_{\pm}(Z, \theta; p)$ pode ser expandida como

$$\Xi_{\pm}(Z, \theta, p) = \Xi_{\pm}(\epsilon e^{i\phi}, \theta; p) \simeq \frac{e^{-i\phi}}{\epsilon} - \frac{\epsilon e^{i\phi}}{4} T_{\pm}(\theta). \quad (1.64)$$

Esse resultado nos possibilita efetuar a integral ao longo de C_{ϵ} :

$$\int_{C_{\epsilon}} dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) \simeq - \left[\frac{e^{-ip\delta} - e^{-2\pi ip} e^{ip\delta}}{p\epsilon^p} + \frac{T_{\pm}(\theta)\epsilon^{2-p}}{4(2-p)} \left(e^{i\delta(2-p)} - e^{-2\pi ip} e^{i\delta(2-p)} \right) \right], \quad (1.65)$$

cujo limite $\delta \rightarrow 0$ é dado por

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{C_{\epsilon}} dZ g_{\pm}(Z, \theta; p) \right) = - \left(\frac{1}{p\epsilon^p} + \frac{T_{\pm}(\theta)\epsilon^{2-p}}{4(2-p)} + O(\epsilon^{4-p}) \right) (1 - e^{-2\pi ip}). \quad (1.66)$$

Utilizando os resultados (1.66) e (B.13) na expressão (1.63), e tomando o limite $p \rightarrow 3$ obtemos

$$\lim_{p \rightarrow 3} \int_{\epsilon}^{\infty} dx g_{\pm}(x, \theta; p) = \frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{T_{\pm}(\theta)}{4\epsilon} \mp \frac{1}{128\pi^2} G_{\mp}(z) + O(\epsilon), \quad (1.67)$$

onde definimos as funções

$$\begin{aligned} G_{\pm}(z) = & \zeta_H\left(3, \frac{z}{2L}\right) + \zeta_H\left(3, -\frac{z}{2L}\right) - \zeta_H\left(3, \frac{1}{2} + \frac{1}{2L}\right) + \\ & - \zeta_H\left(3, \frac{1}{2} - \frac{1}{2L}\right) + \left(\frac{2L}{z}\right)^3 \mp 2\left(\zeta_R(3) - \zeta_H(3, 1/2)\right), \end{aligned} \quad (1.68)$$

sendo ζ_R e ζ_H respectivamente as funções zeta de Reinman e de Hurwitz dadas pelas equações (B.6). Substituindo as equações (1.54) e (1.67) em (1.58), usando a definição de ϵ dada em (1.51), e tomando o limite $\tau \rightarrow 0$, obtemos finalmente,

$$\sum_{\lambda, \vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_x | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} = \sum_{\lambda, \vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_y | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{3\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{512L^3\pi} G_+(z) \quad (1.69)$$

$$\sum_{\lambda, \vec{k}} \frac{|\langle 0 | E_z | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{3\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{256L^3\pi} G_-(z).$$

Analogamente ao que aconteceu para os correlatores (1.56), cada uma das quantidades acima foi separada numa parte finita, dependente dos parâmetros característicos do problema, somada a uma parte divergente, que depende somente do parâmetro regularizador τ . Esses termos espúrios serão descartados por razões análogas as que nos levaram a descartar termos também divergentes em (1.56).

1.4 Correções nos Níveis de Energia

Nesta seção, vamos nos referir a três configurações de placas diferentes, a saber: (i) uma placa condutora e uma placa permeável, (ii) duas placas condutoras e (iii) duas placas permeáveis. Vamos denominar cada uma delas, respectivamente, como configurações CP, CC e PP.

De posse dos resultados (1.32), (1.36), (1.56) e (1.69), temos as expressões que fornecem as correções nos níveis de energia atômicos para a configuração CP, tanto no caso em que o átomo está próximo a uma das placas, quanto no caso em que está distante de ambas:

$$\Delta \varepsilon_{n,j}^{CP}|_{\text{perto}} = -\frac{e^2}{512\pi L^3} \left[\left(\langle \varepsilon_{n,j} | r_x^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle + \langle \varepsilon_{n,j} | r_y^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle \right) G_+(z) + 2 \langle \varepsilon_{n,j} | r_z^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle G_-(z) \right], \quad (1.70)$$

$$\Delta \varepsilon_{n,j}^{CP}|_{\text{longe}} = \frac{-e^2}{512\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) G_+(z) + 2 |\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,j} \rangle|^2 G_-(z) \right] - \frac{\pi^2}{96L^4} \left[(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) \left(\frac{G(\theta)}{2} + \frac{7}{720} \right) - \alpha_z \frac{7}{360} \right], \quad (1.71)$$

onde descartamos um termo divergente, porém independente de L , interpretado portanto como um termo sem significado físico. Os resultados para as placas CC [10] e PP [47, 46]

podem ser obtidos na literatura e são dados por

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{n,j}^{CC}|_{\text{perto}} &= -\frac{e^2}{64\pi L^3} \left[\left(\langle \varepsilon_{n,j} | r_x^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle + \langle \varepsilon_{n,j} | r_y^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle \right) F_-(z) \right. \\ &\quad \left. + 2 \langle \varepsilon_{n,j} | r_z^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle F_+(z) \right],\end{aligned}\quad (1.72)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{n,j}^{CC}|_{\text{longe}} &= \frac{-e^2}{64\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) F_-(z) \right. \\ &\quad \left. + 2 |\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 F_+(z) \right] \\ &\quad - \frac{\pi^2}{96L^4} \left[(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) \left(F(\theta) - \frac{1}{15} \right) + \alpha_z \frac{2}{15} \right],\end{aligned}\quad (1.73)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{n,j}^{PP}|_{\text{perto}} &= \frac{e^2}{64\pi L^3} \left[\left(\langle \varepsilon_{n,j} | r_x^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle + \langle \varepsilon_{n,j} | r_y^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle \right) F_+(z) \right. \\ &\quad \left. + 2 \langle \varepsilon_{n,j} | r_z^2 | \varepsilon_{n,j} \rangle F_-(z) \right],\end{aligned}\quad (1.74)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{n,j}^{PP}|_{\text{longe}} &= \frac{e^2}{64\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) F_+(z) \right. \\ &\quad \left. + 2 |\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 F_-(z) \right] \\ &\quad + \frac{\pi^2}{96L^4} \left[(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) \left(F(\theta) + \frac{1}{15} \right) - \alpha_z \frac{2}{15} \right],\end{aligned}\quad (1.75)$$

onde as funções $F(\theta)$ e F_{\pm} são definidas como

$$F(\theta) = \frac{3}{\sin^4(\theta)} - \frac{2}{\sin^2(\theta)} \quad (1.76)$$

e

$$F_{\pm}(z) = \zeta_H(3, z/L) + \zeta_H(3, -z/L) \pm 2\zeta_R(3) + \left(\frac{L}{z}\right)^3. \quad (1.77)$$

Note que a função $F(\theta)$ é estritamente positiva em todo o seu domínio, enquanto a função $G(\theta)$ adquire tanto valores positivos como negativos, como indicado na figura 1.4. Isso pode diferenciar bastante o comportamento das correções nos níveis de energia do átomo causadas pelas placas CP em comparação com aquelas causadas pelas placas CC e PP.

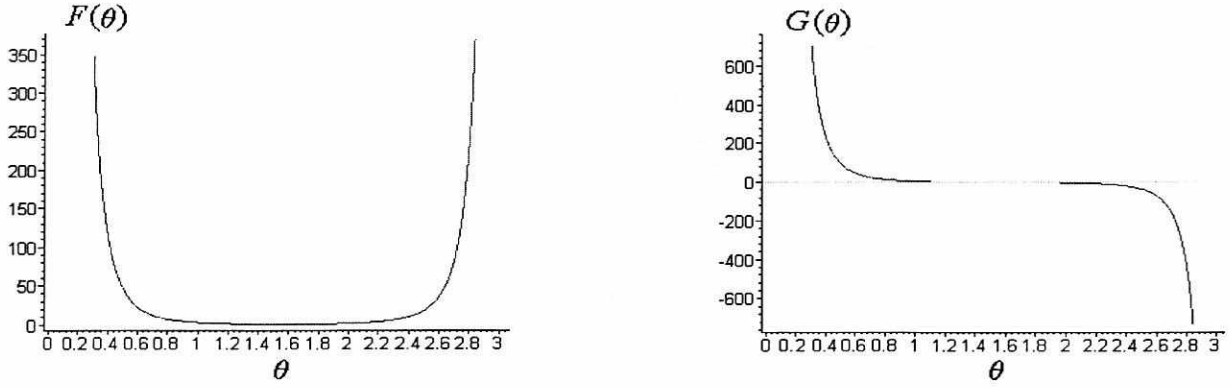


Figura 1.4: Gráficos para $F(\theta)$ e $G(\theta)$: F é estritamente positiva, enquanto G troca de sinal. Ambas as funções divergem nas placas, ou seja, divergem em $\theta = 0, \pi$

Para fazer uma breve análise numérica dos resultados obtidos, vamos nos restringir, de agora em diante, ao caso de um átomo não muito excitado. Nessa situação, pode-se mostrar que as contribuições relevantes para as correções nos níveis atômicos são dadas pelos estados degenerados [10], ou seja, em uma base que diagonaliza o operador (1.21) os deslocamentos nos níveis de energia são dados, aproximadamente, pelos elementos de matriz (1.27) multiplicados por e^2 . Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_{n,j}^{CP} &= -\frac{e^2}{512\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) G_+(z) \right. \\
 &\quad \left. + 2|\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,j} \rangle|^2 G_-(z) \right], \\
 \Delta \varepsilon_{n,j}^{CC} &= -\frac{e^2}{64\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) F_-(z) \right. \\
 &\quad \left. + 2|\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,j} \rangle|^2 F_+(z) \right], \\
 \Delta \varepsilon_{n,j}^{PP} &= \frac{e^2}{64\pi L^3} \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(|\langle \varepsilon_{n,j} | r_x | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 + |\langle \varepsilon_{n,j} | r_y | \varepsilon_{n,i} \rangle|^2 \right) F_+(z) \right. \\
 &\quad \left. + 2|\langle \varepsilon_{n,j} | r_z | \varepsilon_{n,j} \rangle|^2 F_-(z) \right], \tag{1.78}
 \end{aligned}$$

para um átomo localizado próximo ou distante das placas.

Note que os sinais para estas correções são determinados pelos sinais das funções $F_{\pm}(z)$ e $G_{\pm}(z)$. Tanto F_+ como F_- têm sinal positivo, fornecendo correções negativas para a configuração CC e positivas para a configuração PP. É interessante comentar ainda que os papéis das flutuações do campo longitudinal e transversal são trocados para as configurações CC e PP. As funções G_{\pm} trocam de sinal ao longo de seus domínios, e isto faz com que as correções aos níveis atômicos para as condições CP possam trocar de sinal, em contraste com o que ocorre nos casos com condições CC e PP.

Podemos comentar a respeito de algumas diferenças entre as correções nos níveis de energia e o efeito Casimir, outra importante manifestação das flutuações do vácuo. No efeito Casimir, as configurações PP e CC fornecem a mesma força atrativa. Já no caso da configuração CP, a força é repulsiva, porém, com a mesma dependência em L encontrada nos outros dois casos e de mesma ordem de grandeza. Por outro lado, as correções nos níveis de energia têm comportamentos diferentes para as três condições consideradas, mesmo para os casos onde as energias de Casimir são iguais (PP e CC) ⁵. Isto é devido, em parte, ao fato de que a pressão de Casimir é um efeito global, ao passo que as correções nos níveis de energia dependem da posição em que o átomo se encontra relativamente às placas. É como se o átomo fosse uma sonda de prova local dos modos do campo.

Ainda nos restringindo a um átomo não muito excitado, mas em uma base de auto-estados que não diagonalize a matriz M , as correções aos níveis de energia para a configuração CP são dadas, com o auxílio de (1.18), (1.19) e (1.25), pelos autovalores do operador

$$\mathcal{W} := \sum_{i=1}^{g_n} \left[\left(r_x |\varepsilon_{n,i}\rangle \langle \varepsilon_{n,i}| r_x + r_y |\varepsilon_{n,i}\rangle \langle \varepsilon_{n,i}| r_y \right) G_+(z) + 2r_z |\varepsilon_{n,i}\rangle \langle \varepsilon_{n,i}| r_z G_-(z) \right], \quad (1.79)$$

multiplicados por $-e^2/512\pi L^3$.

Em coordenadas esféricas, os elementos diagonais de W são dados por [10]

$$\begin{aligned} \langle n, l, m | \mathcal{W} | n, l, m \rangle = & \frac{9}{4} (\alpha m)^{-2} n^2 \left\{ \frac{n^2 - l^2}{(2l-1)(2l+1)} \left[(l^2 - l + m^2) G_+(z) + 2(l^2 - m^2) G_-(z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{n^2 - (l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} \left[(l^2 + 3l + m^2 + 2) G_+(z) + 2(l^2 + 2l - m^2 + 1) G_-(z) \right] \right\}, \quad (1.80) \end{aligned}$$

⁵Esta peculiaridade pode deixar de valer para campos em interação, como discutido no capítulo 3.

e os elementos não diagonais por

$$\begin{aligned} \langle n, l-2, m | \mathcal{W} | n, l, m \rangle &= \frac{9}{4} (\alpha m)^{-2} n^2 \left\{ \frac{n^2 - l^2}{(2l-1)(2l+1)} \frac{n^2 - (l^2 - 1)^2}{(2l-3)(2l-1)} \right. \\ &\quad \times \left. (l^2 - m^2) \left[(l-1)^2 - m^2 \right] \right\}^{1/2} \left(2G_-(z) - G_+(z) \right), \end{aligned} \quad (1.81)$$

onde l e m são, respectivamente, os números quânticos angular e azimutal.

No multiplete $n = 3$ os estados $|300\rangle$ e $|320\rangle$ se misturam, fornecendo as correções

$$\Delta \varepsilon_{3\pm} = \frac{-81}{4} (\alpha m)^{-2} \frac{e^2}{512\pi L^3} \left[4G_-(z) + 3G_+(z) \pm \left(16G_-^2(z) - 8G_-(z)G_+(z) + 9G_+^2(z) \right)^{1/2} \right]. \quad (1.82)$$

Não há mais estados que se misturam com $n = 1, 2, 3$. Sendo assim, apresentamos uma tabela com resultados numéricos, mostrando as correções nos níveis de energia mais baixos do átomo de Hidrogênio quando este está interagindo com o campo de radiação no estado de vácuo, submetido a cada uma das três condições citadas acima. Por uma questão de simplicidade, tomamos a posição do átomo como sendo o ponto médio entre as placas, isto é, $z = L/2$. Os resultados estão em unidades de $\zeta_R(3)(\alpha m)^{-2}\alpha/32L^3$. Os valores apresentados para as condições CC podem ser encontrados em [10]; os resultados para as placas PP estão na referência [46] e para a configuração CP, em [47].

correções nos níveis de energia	CC	PP	CP
$\Delta \varepsilon_{200}$	-1008	1008	0
$\Delta \varepsilon_{210}$	-576	432	-54
$\Delta \varepsilon_{211}$	-216	288	27
$\Delta \varepsilon_+$	$-162(25+\sqrt{241})$	$1296(3+\sqrt{3})$	$-60,75(1+\sqrt{33})$
$\Delta \varepsilon_-$	$-162(25-\sqrt{241})$	$1296(3-\sqrt{3})$	$-60,75(1-\sqrt{33})$
$\Delta \varepsilon_{310}$	-6156	5184	-364,5
$\Delta \varepsilon_{311}$	-3726	4212	182,2
$\Delta \varepsilon_{321}$	-1782	1620	-60,75
$\Delta \varepsilon_{322}$	-972	1296	121,5

Para o estado fundamental 100 só contribuem para o deslocamento de energia os estados não-degenerados. Contribuições estas desconsideradas na tabela acima.

Pela tabela acima, vemos que as correções para as placas CC e PP são da mesma ordem, enquanto para as placas CP são uma ordem de magnitude menor.

Vamos agora analisar o caso limite quando o átomo está próximo a uma única placa, sendo esta perfeitamente condutora ou perfeitamente permeável ⁶. Para o primeiro caso, basta tomarmos o limite da equação (1.70) para um átomo muito próximo da placa condutora, isto é, $z/L \rightarrow 0$, o que resulta em:

$$\Delta\epsilon_{n,j}^C = -\frac{e^2}{64\pi z^3} \left[\langle \epsilon_{n,j} | (r_x^2 + r_y^2) | \epsilon_{n,j} \rangle + 2\langle \epsilon_{n,j} | r_z^2 | \epsilon_{n,j} \rangle \right]. \quad (1.84)$$

Vale mencionar que este resultado pode também ser obtido tomando-se o mesmo limite com a configuração de placas CC [10].

Para o caso do átomo estar nas proximidades de uma única placa permeável, seria mais conveniente para os cálculos ter uma expressão para as correções nos níveis de energia para uma placa permeável em $z = 0$ e uma placa condutora em $z = L$. Isto pode ser conseguido fazendo a substituição $z \rightarrow -(z - L)$ em (1.70):

$$\Delta\epsilon_{n,j} = -\frac{e^2}{512\pi L^3} \left[\langle \epsilon_{n,j} | (r_x^2 + r_y^2) | \epsilon_{n,j} \rangle G_+(-(z - L)) + 2\langle \epsilon_{n,j} | r_z^2 | \epsilon_{n,j} \rangle G_-(-(z - L)) \right]. \quad (1.85)$$

Podemos agora tomar o limite $z/L \rightarrow 0$ para um átomo muito próximo de uma placa infinitamente permeável:

$$\Delta\epsilon_{n,j}^P = \frac{e^2}{64\pi z^3} \left[\langle \epsilon_{n,j} | (r_x^2 + r_y^2) | \epsilon_{n,j} \rangle + 2\langle \epsilon_{n,j} | r_z^2 | \epsilon_{n,j} \rangle \right]. \quad (1.86)$$

Esta expressão poderia também ser obtida tomando-se o limite $z/L \rightarrow 0$ na equação (1.74). É interessante notar que as correções aos níveis de energia para o caso de uma única placa infinitamente permeável têm o mesmo módulo, e sinal contrário, que as correções aos níveis atômicos para o caso de uma única placa perfeitamente condutora.

⁶Quando consideramos o átomo próximo de uma das placas, estamos comparando z (distância do átomo à placa esquerda) e $z - L$ (distância do átomo à placa direita) com L (distância entre as placas), porém lembre-se que estamos tomando a aproximação de dipolo, considerando o raio atômico muito menor do que os três parâmetros de distância mencionados acima.

1.5 Comentários Finais

Neste capítulo, pudemos ver que a modificação dos modos do campo eletromagnético no vácuo devido à presença de placas materiais pode alterar os níveis de energia de um átomo que esteja nas vizinhanças das placas, pois este está em interação com o campo eletromagnético. Sendo estas alterações dependentes da distância que o átomo se encontra das placas, podemos dizer que o átomo funciona como uma partícula teste para os modos do campo eletromagnético, podendo sondá-lo localmente.

Esse fenômeno é de grande importância sob vários aspectos. Para a física teórica, ele dá mais subsídios para compreendermos melhor conceitos fundamentais da Eletrodinâmica Quântica, como por exemplo as flutuações de campos quânticos no vácuo e a interação da matéria com a radiação no interior de cavidades. Experimentalmente, fenômenos como esse têm grande valia, pois permitem testes mais precisos da EDQ. Além disso, medições de constantes físicas atômicas atualmente têm atingido grande precisão, tornando-se relevante considerar influências das vizinhanças dos átomos nos dados experimentais para poder confrontá-los com as previsões teóricas.

Considerar a influência de placas permeáveis nos níveis de energia atômicos foi de grande valia, pois nos permitiu a comparação de novos resultados com os já existentes na literatura para placas condutoras e forneceu uma maior variedade de resultados teóricos que podem ser confrontados com dados experimentais.

Como último comentário, gostaríamos de ressaltar a importância de se estudar a influência de placas permeáveis em diferentes situações físicas [57, 58] para a nanotecnologia, pois na escala nanométrica as forças de Casimir podem se tornar relevantes. Configurações adequadas utilizando placas permeáveis podem produzir forças de Casimir repulsivas, uma vez que forças puramente atrativas podem impor limites à construção de dispositivos nanométricos.

Capítulo 2

O Efeito Scharnhorst e a Eletrodinâmica de Born-Infeld

Neste capítulo investigamos como a velocidade da luz é alterada quando uma onda luminosa se propaga numa região entre duas placas paralelas e perfeitamente condutoras, mas supondo que a dinâmica dos campos eletromagnéticos seja descrita por uma densidade de lagrangiana que generaliza, ligeiramente, a de Euler-Heisenberg (que representa a lagrangiana efetiva da EDQ a um laço). A densidade de lagrangiana a ser considerada contém, como casos particulares, a de Euler-Heisenberg e a de Born-Infeld. De certa forma, podemos dizer que investigamos qual seria o efeito Scharnhorst para tais densidades de lagrangiana. Utilizamos uma técnica de cálculo introduzida por Barton, que envolve diretamente a determinação de alguns correlatores dos operadores de campo eletromagnético, sujeitos às condições de contorno impostas pela presença das placas. Em particular, recuperamos os resultados encontrados na literatura para as densidades de lagrangiana de Euler-Heisenberg e Weisskopf-Schwinger e mostramos, dentro de certas aproximações, que para uma densidade de lagrangiana do tipo Born-Infeld não haveria variação alguma na velocidade da luz entre as placas.

Esse capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 2.1 fazemos uma introdução ao efeito Scharnhorst; na seção 2.2 introduzimos a lagrangiana de Born-Infeld; na seção 2.3 obtemos a lagrangiana de Euler-Heisenberg. Na seção 2.4 obtemos as variações na velocidade da luz quando esta se propaga entre placas paralelas e é descrita por uma lagrangiana mais geral do que a de Euler-Heisenberg. Os comentários finais encontram-se na seção 2.5.

2.1 Introdução

Pela teoria clássica do eletromagnetismo, estabelecida por J.C. Maxwell no final do século XIX, a dinâmica dos campos eletromagnéticos no espaço livre, mas na presença de fontes, é descrita pelas equações

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo ρ e \vec{j} , respectivamente, a densidade de cargas e a densidade de corrente.

No vácuo, ou seja, na ausência de fontes externas, tais equações se reduzem a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.2}$$

que podem ser obtidas por meio da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = \frac{1}{2} \left[\left(-\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right],\tag{2.3}$$

onde as variáveis dinâmicas são os campos $A^\mu(x)$.

O fato de \mathcal{L}_0 conter apenas termos quadráticos nos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} confere a estes a propriedade de obedecerem ao princípio da superposição, pois \mathcal{L}_0 fornece as equações (2.2) que são lineares.

No contexto da EDQ (eletrodinâmica quântica), tal situação relativamente cômoda muda. Mesmo no vácuo, temos a possibilidade de criação (e subsequente aniquilação) de pares de partículas virtuais (elétron-pósitron). Durante suas efêmeras existências, essas partículas podem trocar fótons virtuais umas com as outras. Podem, inclusive, emitir um fóton virtual num dado instante e absorvê-lo num instante posterior. Esses fótons, por sua vez, podem criar novos pares virtuais elétron-pósitron e assim sucessivamente, fazendo com que o estado de vácuo da EDQ seja muito mais rico do que o estado de vácuo na física clássica, inerte e incapaz de responder a qualquer estímulo externo (provocado, por exemplo, por campos externos ou pela presença de placas materiais).

Tais processos virtuais podem dar origem a novos fenômenos físicos, alguns dos quais já foram verificados experimentalmente. Em mais baixa ordem na constante de acoplamento, podemos mencionar alguns desses fenômenos, a saber:

- a) Espalhamento fóton-fóton: a seção de choque deste processo é proporcional a α^4 (α sendo a constante de estrutura fina), e por ser extremamente pequena esse processo ainda não tem verificação experimental.
- b) Espalhamento Delbrück: fótons são espalhados por um campo eletromagnético externo, geralmente gerado por um núcleo pesado de carga Ze . A seção de choque desse processo é proporcional a $(Z\alpha)^4\alpha^2$ e já existe verificação experimental para tal processo.
- c) Divisão de fótons: um único fóton se “divide” em outros dois, após ser espalhado por um campo externo (gerado, por exemplo, por um núcleo de carga Ze como no Espalhamento Delbrück). Tal processo também já possui verificação experimental.

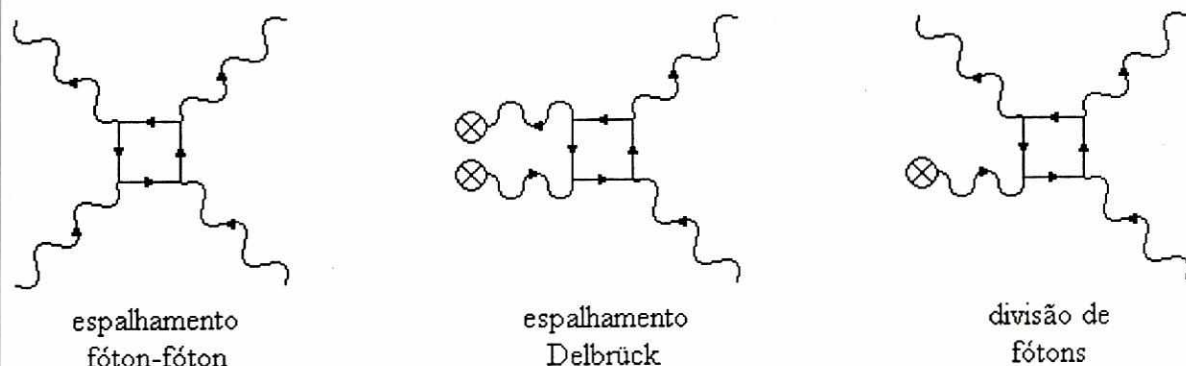


Figura 2.1: Diagramas de processos de baixa ordem na EDQ que envolvem criação de pares virtuais.

Dessa forma, o vácuo da EDQ deixa de ser algo inerte e passa a se comportar como um meio ativo, onde ocorrem processos virtuais que dão origem a propriedades físicas reais. Isso lhe confere propriedades semelhantes àsquelas dos meios materiais, como o fato de possuir uma densidade de energia e de responder a estímulos externos. Esses processos virtuais também influem na dinâmica dos campos eletromagnéticos clássicos no vácuo, já que tais campos interagem não só com as correntes clássicas \vec{j} , mas também com os campos quantizados de matéria, no caso, o campo fermiônico. Este comportamento confere ao vácuo

propriedades eletromagnéticas, como uma permissividade magnética e uma polarizabilidade elétrica, de forma análoga ao que acontece em um meio material. Tais propriedades podem ser alteradas, por exemplo, quando aplicamos um campo eletromagnético externo, ou submetemos o campo de radiação a condições de contorno, ditadas pela presença de placas materiais ou cavidades em geral. Uma consequência imediata de alterações como estas é a possibilidade de mudança na velocidade de uma onda eletromagnética que se propague no vácuo. Em outras palavras, alterações nas propriedades eletromagnéticas do vácuo podem resultar em variações na velocidade de propagação da luz.

Modificações na velocidade da luz no vácuo devido a aplicação de campos magnéticos externos foram discutidas inicialmente em 1952 por J. S. Toll [59] e reconsideradas posteriormente no início dos anos 70 [60, 61, 62] (veja também [63] e referências aí contidas). Para o caso da EDQ em espaços curvos, o trabalho de Drummond e Hathrell [64] levantou a possibilidade de uma propagação superluminal (veja também [65] e [66]). Também podemos encontrar discussões a respeito da influência de efeitos térmicos na propagação da luz [67, 68, 12].

Outra situação já discutida na literatura, e de especial interesse neste capítulo, é a influência na velocidade da luz ocasionada pela presença de placas paralelas. Esse problema foi abordado em 1990 por Scharnhorst [11] que estudou a propagação de uma onda eletromagnética numa região entre placas paralelas e perfeitamente condutoras (que designaremos por placas de Casimir). Scharnhorst chegou à conclusão de que a componente da velocidade da onda perpendicular às placas se altera, sendo maior do que a velocidade da luz no vácuo na ausência das placas, enquanto a componente da velocidade paralela às placas não sofre modificação alguma. Para compreender esse efeito é necessário ter em mente que ele ocorre devido à interação de três campos:

- (i) o campo clássico de uma onda eletromagnética, cuja velocidade se quer estudar;
- (ii) o campo fermiônico quantizado;
- (iii) o campo de radiação submetido às condições de contorno impostas pela presença das placas.

Ao se propagar no vácuo, a onda eletromagnética interage com o campo fermiônico quantizado (pares virtuais), que por sua vez interage com o campo de radiação. A presença de placas condutoras faz com que o campo de radiação tenha seus modos alterados. Essa

mudança é percebida diretamente pelo campo fermiônico, pois este está em interação com o campo de radiação, e de forma indireta pela onda eletromagnética, que interage com o campo fermiônico. Esse processo pode, portanto, alterar a velocidade de propagação da onda em questão. Resumindo, podemos dizer que o campo clássico da onda eletromagnética interage com o campo de radiação por meio do laço fermiônico. O efeito Scharnhorst, assim chamado desde então, é um efeito da EDQ que se manifesta somente quando consideramos diagramas de Feynman a partir de dois laços.

Para obter perturbativamente a variação na velocidade da luz provocada pelas placas, Scharnhorst calculou os diagramas a dois laços que contribuem para a ação efetiva do campo eletromagnético, mas levando em consideração no cálculo do propagador do fóton as condições de contorno sobre o campo de radiação. Obteve assim as correções relevantes à ação de Maxwell. De posse dessa ação efetiva, Scharnhorst determinou os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo na região entre as placas, e com eles foi capaz de obter o índice de refração e a correspondente velocidade da luz nessa região. Os diagramas que dão origem ao termo de correção considerado por Scharnhorst estão representados na figura 2.2.

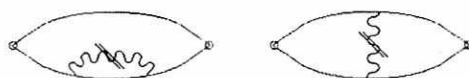


Figura 2.2: Diagramas calculados por Scharnhorst; a dupla linha no propagador do fóton indica que este está submetido a condições de contorno.

O resultado de Scharnhorst foi rederivado por Barton [12] por meio de uma técnica bem mais simples, baseada na ação efetiva de Euler-Heisenberg. Essa técnica foi utilizada posteriormente no cálculo do efeito Scharnhorst com placas de naturezas diferentes, uma infinitamente permeável e outra perfeitamente condutora [52, 53]. Foi também utilizada num cálculo envolvendo a lagrangiana efetiva (a um laço) da EDQ escalar [54].

Em 1995 Latorre, Pascual e Tarrach [68] perceberam que os resultados para variações na velocidade da luz que comentamos até o momento, para as situações de espaços sem curvatura, satisfaziam a chamada “fórmula mágica”

$$\bar{c} = 1 - \frac{44}{135} \alpha^2 \frac{\rho}{m_e^4}, \quad (2.4)$$

sendo \bar{c} a média sobre as polarizações em todas as direções da velocidade da onda, m_e a massa do elétron, α a constante de estrutura fina e ρ a densidade de energia do vácuo, alterada pelas mais diversas circunstâncias ¹. A origem dessa fórmula mágica foi elucidada posteriormente por Gies e Dittrich em 1998 [69, 70].

Neste capítulo, estudamos como a velocidade de uma onda eletromagnética se altera quando ela se propaga entre placas paralelas, mas supondo que a dinâmica dos campos eletromagnéticos seja descrita por uma densidade de lagrangiana ligeiramente mais geral do que a de Euler-Heisenberg e que contém como um caso particular não somente esta última, mas também a densidade de lagrangiana de Born-Infeld. Trabalhamos no regime de campos de baixa intensidade, o que nos permite tomar a lagrangiana de Born-Infeld expandida em mais baixa ordem. Obtemos os resultados por meio da técnica empregada por Barton [12] no cálculo do efeito Scharnhorst.

2.2 A Lagrangiana de Born-Infeld

A idéia de se tomar correções de ordens superiores à lagrangiana de Maxwell surgiu inicialmente dentro da própria eletrodinâmica clássica (com Mie em 1912 [71], e com Born e Infeld em 1934 [72]), com o intuito de resolver problemas desta mesma teoria, essencialmente o problema da existência de um elétron estável. Se este fosse tomado como uma distribuição de cargas, seria instável, devido à repulsão eletrostática; se fosse tomado como uma carga puntiforme, teria uma auto-energia infinita. Uma saída seria pensar em algum tipo de saturação para a energia, sobre algum valor para a intensidade dos campos.

Para construir uma lagrangiana \mathcal{L}_{BI} que exprimisse este fato, Born e Infeld impuseram três condições:

- (i) \mathcal{L}_{BI} deveria ser um escalar de Lorentz;
- (ii) \mathcal{L}_{BI} deveria ser invariante sob transformações de calibre;

¹Para o vácuo de Friedmann-Robertson-Walker (espaço com curvatura) a fórmula mágica (2.4) toma a forma $\bar{c} = 1 - (44/135)\alpha(G_N m_e^2)(\rho/m_e^4)$ [68], sendo G_N a constante de Newton.

(iii) \mathcal{L}_{BI} deveria se reduzir à lagrangiana de Maxwell (2.3) para campos de intensidade muito menor do que um dado valor de saturação.

Sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2), \\ \mathcal{G}^2 &= \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu*}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right)^2 = (\vec{E}\cdot\vec{B})^2\end{aligned}\quad (2.5)$$

os únicos escalares de Lorentz invariantes de calibre da teoria, \mathcal{L}_{BI} deve ser uma função somente dessas variáveis. Em vista disso, Born e Infeld postularam a seguinte lagrangiana para o campo eletromagnético:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BI} &= E_0^2 \left[1 - \left(1 + 2\frac{\mathcal{F}}{E_0^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{E_0^4} \right)^{1/2} \right] \\ &= E_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{E_0^2} - \frac{(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}{E_0^4} \right)^{1/2} \right],\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde E_0 tem o significado de um valor máximo para a intensidade dos campos. Expandindo \mathcal{L}_{BI} para $\mathcal{F}, \mathcal{G} \ll E_0^2$, recuperamos a lagrangiana de Maxwell (2.3). Dessa forma, E_0 não tem relevância se nos restringirmos a campos pequenos. A teoria, não-linear, de Born e Infeld pôde resolver o problema da existência de um elétron estável com tamanho e auto-energia finitos, porém ainda persistiram outros problemas na eletrodinâmica clássica, como a auto-aceleração de partículas carregadas, que ela não foi capaz de resolver.

Um fato interessante a ser comentado é que a lagrangiana de Born-Infeld (2.6) foi escolhida em analogia com a lagrangiana de uma partícula relativística livre,

$$\mathcal{L} = mc^2 \left[1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \right], \quad (2.7)$$

onde c é uma velocidade limite, desempenhando um papel análogo ao de E_0 em \mathcal{L}_{BI} . No limite $v \ll c$ recuperamos a lagrangiana não-relativística $\mathcal{L} = (1/2)mv^2$, e c torna-se irrelevante.

Entendemos como uma lagrangiana do tipo Born-Infeld aquela com a forma

$$\tilde{\mathcal{L}} = E_0^2 \left[1 - \left(1 + 2\frac{\mathcal{F}}{E_0^2} + \gamma\frac{\mathcal{G}^2}{E_0^4} \right)^{1/2} \right], \quad (2.8)$$

sendo γ uma constante qualquer. Obviamente a equação (2.6) é um caso particular de (2.8), com $\gamma = -1$.

Expandindo a equação (2.8) até a ordem E_0^{-2} , obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &\cong -\mathcal{F} + \frac{1}{2E_0^2}(\mathcal{F}^2 - \gamma\mathcal{G}^2) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2E_0^2} \left[\frac{1}{4}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 - \gamma(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right],\end{aligned}\quad (2.9)$$

que nada mais é do que a lagrangiana de Maxwell acrescida de uma correção proporcional a E_0^{-2} . Quanto maior for o parâmetro E_0 , menor será a relevância dessa contribuição.

2.3 A Lagrangiana de Euler-Heisenberg

Na tentativa de descrever a dinâmica do campo eletromagnético clássico, levando em consideração os efeitos ocasionados pela criação de partículas virtuais, podemos tentar obter uma lagrangiana efetiva, acrescentando à lagrangiana de Maxwell (2.3) correções de ordens mais altas em \vec{E} e \vec{B} . Com isso, essa nova lagrangiana irá fornecer equações não-lineares para esses campos, deixando assim de valer o princípio da superposição. A lagrangiana que desempenha esse papel é a chamada lagrangiana de Euler-Heisenberg, e sua obtenção é o conteúdo desta seção. Para cumprir nosso objetivo, utilizaremos o procedimento introduzido por Schwinger em 1951 [73], conhecido como método do tempo próprio.

Na eletrodinâmica clássica, os campos eletromagnéticos são descritos pelas equações de Maxwell, que podem ser obtidas por meio da ação

$$S_{cl}[A] = S_0[A] + S_{int}[A], \quad (2.10)$$

onde definimos a ação livre $S_0[A]$ e a de interação $S_{int}[A]$ por

$$\begin{aligned}S_0[A] &= \int d^4x \mathcal{L}_0(x) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right); \\ S_{int}[A] &= \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) \longrightarrow \frac{\delta S_{int}[A]}{\delta A_\mu(x)} = j^\mu(x).\end{aligned}\quad (2.11)$$

Como de costume, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ e $j^\mu(x)$ designa o quadrvetor densidade de corrente. No vácuo clássico, temos ausência de fontes externas e devemos tomar $j^\mu = 0$, restando apenas $S_0[A]$.

Com o intuito de descrever a dinâmica do campo eletromagnético clássico (não-quantizado) no vácuo, mas levando em conta efeitos originados pela quantização do campo fermiônico, que está acoplado com o campo eletromagnético clássico (por exemplo, efeitos de polarização do vácuo), vamos procurar uma ação efetiva $S_{ef}[A]$ que substitua $S_0[A]$. Para isso, vamos nos basear em (2.10) e (2.11), substituindo $S_{int}[A]$ por uma ação $S_1[A]$,

$$S_{ef}[A] = S_0[A] + S_1[A] , \quad (2.12)$$

e de tal forma que

$$\frac{\delta S_1[A]}{\delta A_\mu(x)} = \langle 0 | \hat{j}^\mu(x) | 0 \rangle , \quad (2.13)$$

em analogia com a expressão (2.11). Na expressão anterior, $|0\rangle$ representa o estado de vácuo do campo de Dirac e $\hat{j}^\mu(x)$ corresponde ao operador densidade de corrente do campo de Dirac, isto é,

$$\hat{j}^\mu(x) = \frac{e}{2} [\hat{\psi}(x), \gamma^\mu \hat{\psi}(x)] = \frac{e}{2} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} [\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(x)] , \quad (2.14)$$

com o operador $\hat{\psi}(x)$ satisfazendo,

$$\gamma^\mu \pi_\mu \hat{\psi}(x) + m \hat{\psi}(x) = 0 \quad , \quad \pi_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu \quad , \quad (2.15)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, x^0), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}', x^0)\} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.16)$$

e as matrizes gamma satisfazendo

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu} , \quad (2.17)$$

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu \quad ; \quad g_{00} = -1 \quad ; \quad g_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3 . \quad (2.18)$$

A quantidade $S_1[A]$ pode ser vista como um termo de correção à ação de Maxwell (2.11) que descreve efeitos quânticos gerados pelo acoplamento entre o campo eletromagnético clássico e o campo quantizado de Dirac, devendo se anular quando $F^{\mu\nu} \rightarrow 0$.

Pela equação (2.14), temos

$$\langle 0 | \hat{j}^\mu(x) | 0 \rangle = e(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \langle 0 | \frac{1}{2} (\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x) - \hat{\psi}_\beta(x) \hat{\psi}_\alpha(x)) | 0 \rangle . \quad (2.19)$$

Note que se tomarmos o limite simétrico em relação à coordenada temporal, ou seja,

$$\text{slim}_{x' \rightarrow x} \equiv \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x'^0 > x^0}} + \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x'^0 < x^0}} \right), \quad (2.20)$$

do produto cronológico

$$T(\hat{\psi}_\alpha(x') \hat{\psi}_\beta(x)) = \theta(x'^0 - x^0) \hat{\psi}_\alpha(x') \hat{\psi}_\beta(x) - \theta(x^0 - x'^0) \hat{\psi}_\beta(x) \hat{\psi}_\alpha(x'), \quad (2.21)$$

obtemos exatamente o operador que aparece do lado direito da equação (2.19). Sendo assim, reescrevemos a equação (2.19) como

$$\langle 0 | \hat{j}^\mu(x) | 0 \rangle = e \text{slim}_{x' \rightarrow x} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \langle 0 | T(\hat{\psi}_\alpha(x') \hat{\psi}_\beta(x)) | 0 \rangle. \quad (2.22)$$

Pela definição do propagador da equação de Dirac,

$$G_{\beta\alpha}(x, x' | A) = i \langle 0 | T(\hat{\psi}_\beta(x) \hat{\psi}_\alpha(x')) | 0 \rangle = -i \langle 0 | T(\hat{\psi}_\alpha(x') \hat{\psi}_\beta(x)) | 0 \rangle, \quad (2.23)$$

a equação (2.22) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{j}^\mu(x) | 0 \rangle &= ie \text{slim}_{x' \rightarrow x} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} G_{\beta\alpha}(x, x' | A) \\ &= ie \text{tr}[\gamma^\mu G(x, x | A)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A partir das equações (2.13) e (2.24), obtemos

$$\frac{\delta S_1[A]}{\delta A_\mu(x)} = ie \text{tr}[\gamma^\mu G(x, x | A)] \implies \delta S_1[A] = ie \int dx \delta A_\mu(x) \text{tr}[\gamma^\mu G(x, x | A)]. \quad (2.25)$$

O propagador (2.23) satisfaz a equação diferencial

$$[(\gamma^\mu \pi_\mu)_{\alpha\beta} + m \delta_{\alpha\beta}] G_{\beta\gamma}(x, x' | A) = \delta_{\alpha\gamma} \delta(x - x'), \quad (2.26)$$

que pode ser interpretada como a representação de uma equação de operadores no espaço de configurações:

$$(\gamma \hat{\pi} + m) \hat{G}[A] = 1 \quad ; \quad G(x, x' | A) = \langle x | \hat{G}[A] | x' \rangle. \quad (2.27)$$

Definindo o operador $\delta \hat{A}_\mu(x)$ tal que

$$\langle x | \delta \hat{A}_\mu(x) | x' \rangle = \delta(x - x') \delta A_\mu(x), \quad (2.28)$$

e usando a definição (2.27), reescrevemos a equação (2.25) como:

$$\delta S_1[A] = ie \text{Tr}(\gamma \delta \hat{A} \hat{G}[A]) , \quad (2.29)$$

onde Tr designa o traço nos índices de espiniores e nas coordenadas contínuas de espaço tempo. Considerando o fato de que $-e\gamma\delta\hat{A} = \delta(\gamma\hat{\pi})$ e utilizando a representação de tempo próprio de Schwinger [73] para $\hat{G}[A]$, a saber,

$$\begin{aligned} \hat{G}[A] &= \frac{1}{\gamma\hat{\pi} + m} \\ &= \frac{\gamma\hat{\pi} - m}{(\gamma\hat{\pi})^2 - m^2} \\ &= i(m - \gamma\hat{\pi}) \int_0^\infty ds \exp \left[-is \left(m^2 - (\gamma\hat{\pi})^2 \right) \right] , \end{aligned} \quad (2.30)$$

a equação (2.29) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \delta S_1[A] &= -\text{Tr} \left[\delta(\gamma\hat{\pi}) \gamma\hat{\pi} \int_0^\infty ds \exp \left[-i \left(m^2 - (\gamma\hat{\pi})^2 \right) s \right] \right] \\ &= \delta \left\{ \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\int_0^\infty ds s^{-1} \exp \left[-i \left(m^2 - (\gamma\hat{\pi})^2 \right) s \right] \right] \right\} , \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde usamos o fato de que o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ se anula. Integrando essa equação, obtemos a chamada representação de tempo próprio de Schwinger para S_1 :

$$S_1[A] = \text{Tr} \left[\frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp \left[-i \left(m^2 - (\gamma\hat{\pi})^2 \right) s \right] \right] + C_1 , \quad (2.32)$$

onde a constante de integração C_1 deve garantir a condição de normalização $S_1[A=0] = 0$, podendo ser infinita se necessário. Escrevendo $S_1[A]$ como

Isso pode ser infinito! $S_1[A] = \int d^4x \mathcal{L}_1(x) + C_1$ *$\text{Tr} \gamma \rightarrow 0$*

$$S_1[A] = \int d^4x \mathcal{L}_1(x) + C_1 \quad (2.33)$$

e comparando com o resultado (2.32), podemos escrever:

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \text{tr} K(x, x; s) , \quad (2.34)$$

$\int_0^\infty ds$

onde definimos

$$K(x', x''; s) = \langle x' | e^{-is\hat{H}} | x'' \rangle , \quad (2.35)$$

com

$$\hat{\mathcal{H}} = -(\gamma\hat{\pi})^2 = \hat{\pi}^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (2.36)$$

A função $K(x', x''; s)$ desempenha o papel de um propagador de Feynman não-relativístico em $4 + 1$ dimensões, com s fazendo o papel de tempo e $\hat{\mathcal{H}}$ o papel de hamiltoniana. Por esse motivo, é comum denominar o operador $\hat{\mathcal{H}}$ de hamiltoniana de tempo próprio.

O tratamento usado até agora foi geral, valendo para campos eletromagnéticos com quaisquer características. No entanto, não é possível calcular exatamente a função $K(x', x''; s)$ em um caso geral e, se quisermos prosseguir, devemos simplificar o problema. Sendo assim, vamos nos restringir ao caso em que os campos eletromagnéticos são lentamente variáveis e aproximadamente uniformes.

2.3.1 Campos Lentamente Variáveis e Aproximadamente Uniformes

Vamos calcular \mathcal{L}_1 para campos eletromagnéticos lentamente variáveis e aproximadamente uniformes, de modo que, em primeira aproximação, possamos escrever $F_{\mu\nu} \sim \text{constante}$.

Existem diversas formas de se calcular propagadores de Feynman. Nesta subseção, vamos obter o propagador (2.35) utilizando um método operatorial introduzido por Schwinger em 1951 [73]. Trata-se de um método elegante e muito conveniente em certos casos, mas que, talvez por motivos históricos, tem sido empregado basicamente no cálculo de funções de Green relativísticas [38, 73, 74, 75, 76, 77]. No entanto, esse método pode ser aplicado igualmente em problemas não relativísticos [78, 79, 80, 81, 82]. (Uma discussão introdutória desse método pode ser encontrada em [82]. Nessa referência, para que o método de Schwinger pudesse ser comparado com outros encontrados na literatura, o propagador do oscilador harmônico foi calculado explicitamente por meio de três métodos diferentes, a saber: pelo método de Schwinger, por integrais de Feynman e pelo método algébrico.) Vejamos como aplicar o método de Schwinger no caso de nosso interesse.

Considere a partícula (imaginária) descrita pela hamiltoniana de tempo próprio $\hat{\mathcal{H}}$, função dos operadores \hat{x} e $\hat{\pi}$. A quantidade $K(x', x''; s)$ pode ser interpretada, como já mencionamos, como um propagador de Feynman num espaço com uma dimensão extra, onde s faz o papel

do tempo. A partir da Eq. (2.35), vemos que $K(x', x''; s)$ satisfaz a equação

$$i \frac{\partial}{\partial s} K(x', x''; s) = \langle x' | e^{-is\hat{\mathcal{H}}} \hat{\mathcal{H}} | x'' \rangle , \quad (2.37)$$

sendo $|x'\rangle$ e $|x''\rangle$ autovetores do operador de posição \hat{x} :

$$\hat{x}|x'\rangle = x'|x'\rangle \quad , \quad \hat{x}|x''\rangle = x''|x''\rangle . \quad (2.38)$$

O método de Schwinger baseia-se na observação de que se utilizarmos o que seria o análogo do quadro de Heisenberg, ou seja, se definirmos operadores dependentes de s tais que

$$\hat{O}(s) = e^{i\hat{\mathcal{H}}s} \hat{O} e^{-i\hat{\mathcal{H}}s} , \quad (2.39)$$

e utilizarmos os autovetores de $\hat{x}(s)$ e $\hat{x}(0)$ com autovalores, respectivamente, dados por x' e x'' , a equação diferencial para $K(x', x''; s)$, (2.37), toma uma forma extremamente conveniente. Note que definindo

$$|x'(s)\rangle := e^{i\hat{\mathcal{H}}s} |x'\rangle \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(s)|x'(s)\rangle = x'|x'(s)\rangle , \quad (2.40)$$

o propagador $K(x', x''; s)$ pode ser escrito como $\langle x'(s) | x''(0) \rangle$, e a equação (2.37) se torna

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x'(s) | x''(0) \rangle = \langle x'(s) | \hat{\mathcal{H}}(\hat{x}, \hat{\pi}) | x''(0) \rangle . \quad (2.41)$$

O método de Schwinger consiste então em três etapas, como segue:

(1) Inicialmente, resolvemos as equações de Heisenberg para os operadores \hat{x}_μ e $\hat{\pi}_\mu$:

$$i \frac{d\hat{x}_\mu}{ds} = [\hat{x}_\mu, \hat{\mathcal{H}}] \quad , \quad i \frac{d\hat{\pi}_\mu}{ds} = [\hat{\pi}_\mu, \hat{\mathcal{H}}] . \quad (2.42)$$

(2) De posse dos resultados obtidos em (1), escrevemos a hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ em função somente dos operadores $\hat{x}_\mu(0)$ e $\hat{x}_\mu(s)$, de modo que em cada um de seus termos $\hat{x}_\mu(0)$ apareça sempre à direita, e $\hat{x}_\mu(s)$ sempre à esquerda, o que pode ser feito com o auxílio do comutador $[\hat{x}_\mu(0), \hat{x}_\nu(s)]$. Estando a Hamiltoniana devidamente ordenada, é fácil perceber que

$$\langle x'(s) | \hat{\mathcal{H}} | x''(0) \rangle = f(x', x''; s) \langle x'(s) | x''(0) \rangle , \quad (2.43)$$

onde $f(x', x''; s)$ não contém operadores! Portanto, usando as equações (2.41) e (2.43), e integrando em s , obtemos

$$\langle x'(s) | x''(0) \rangle = g(x', x'') \exp \left[-i \int^s ds' f(x', x''; s') \right], \quad (2.44)$$

onde $g(x', x'')$ é uma função arbitrária de x' e x'' .

(3) O terceiro e último passo consiste em determinar $g(x', x'')$, o que é feito impondo-se as condições

$$\begin{aligned} \langle x'(s) | \hat{\pi}_\mu(s) | x''(0) \rangle &= -i \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \langle x'(s) | x''(0) \rangle - e A_\mu(x') \langle x'(s) | x''(0) \rangle, \\ \langle x'(s) | \hat{\pi}_\mu(0) | x''(0) \rangle &= i \frac{\partial}{\partial x''^\mu} \langle x'(s) | x''(0) \rangle - e A_\mu(x'') \langle x'(s) | x''(0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Isto determina $g(x', x'')$ a menos de uma constante multiplicativa, que pode ser encontrada ao impormos a condição

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle x'(s) | x''(0) \rangle = \delta^4(x' - x''), \quad (2.46)$$

sempre satisfeita por um propagador.

Vamos agora aplicar o método descrito acima para o propagador (2.35), com $F_{\mu\nu}$ constante. Inserindo a hamiltoniana (2.36) nas equações (2.42) e usando as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\mu(s), \hat{\pi}_\nu(s)] &= [\hat{x}_\mu(0), \hat{\pi}_\nu(0)] = ig_{\mu\nu}, \\ [\hat{\pi}_\mu(s), \hat{\pi}_\nu(s)] &= [\hat{\pi}_\mu(0), \hat{\pi}_\nu(0)] = ie\hat{F}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

obtemos

$$\frac{d\hat{x}_\mu(s)}{ds} = 2\hat{\pi}_\mu(s), \quad \frac{d\hat{\pi}_\mu(s)}{ds} = 2e\hat{F}_{\mu\nu}\hat{\pi}^\nu(s). \quad (2.48)$$

Definindo as matrizes coluna $\hat{\Pi}$ e \hat{X} , e a matriz 4×4 \hat{F} ,

$$(\hat{\Pi})_\mu = \hat{\pi}^\mu, \quad (\hat{X})_\mu = \hat{x}^\mu, \quad (\hat{F})_{\mu\nu} = \hat{F}^\mu_\nu, \quad (2.49)$$

as equações (2.48) podem ser reescritas como

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}(s)}{ds} = 2\hat{\Pi}(s) \quad , \quad \frac{d\hat{\Pi}(s)}{ds} = 2e\hat{\mathbf{F}}\hat{\Pi}(s) \quad , \quad (2.50)$$

cujas soluções são dadas por

$$\hat{\Pi}(s) = e^{2e\hat{\mathbf{F}}s}\hat{\Pi}(0) \quad , \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0) &= \left(\frac{e^{2e\hat{\mathbf{F}}s} - 1}{e\hat{\mathbf{F}}} \right) \hat{\Pi}(0) \\ &= 2(e\hat{\mathbf{F}})^{-1} e^{e\hat{\mathbf{F}}s} \sinh(e\hat{\mathbf{F}}s) \hat{\Pi}(0). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Conseqüentemente, podemos expressar $\hat{\Pi}(s)$ e $\hat{\Pi}(0)$ em termos de $\hat{\mathbf{X}}(s)$ e $\hat{\mathbf{X}}(0)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(0) &= \frac{1}{2} e\hat{\mathbf{F}} e^{-e\hat{\mathbf{F}}s} \sinh^{-1}(e\hat{\mathbf{F}}s) (\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0)) \quad , \\ \hat{\Pi}(s) &= \frac{1}{2} e\hat{\mathbf{F}} e^{e\hat{\mathbf{F}}s} \sinh^{-1}(e\hat{\mathbf{F}}s) (\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0)) \quad . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para ordenar a hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$, é conveniente definir as matrizes 4×4

$$(\sigma)_{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} \quad , \quad (\mathbf{g}^{-1})_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.54)$$

Utilizando os resultados (2.53) (2.54), (C.4) e (C.5) na equação (2.36), podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} e\sigma\mathbf{g}\hat{\mathbf{F}} &= \hat{\pi}^\mu(s)\hat{\pi}_\mu(s) = \hat{\Pi}^T(s)\mathbf{g}\hat{\Pi}(s) \\ &= (\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0))^T \frac{1}{2} \left(\frac{e\hat{\mathbf{F}}}{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)} \right)^T e^{e\hat{\mathbf{F}}Ts} \mathbf{g} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{e\hat{\mathbf{F}}e^{e\hat{\mathbf{F}}s}}{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)} \right) (\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0)) \\ &= (\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0))^T \mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{X}}(s) - \hat{\mathbf{X}}(0)) \\ &= \hat{\mathbf{X}}^T(s)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(s) + \hat{\mathbf{X}}^T(0)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(0) - \hat{\mathbf{X}}^T(s)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(0) + \\ &\quad - \hat{\mathbf{X}}^T(0)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(s) \quad , \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde definimos

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{4} \frac{e^2 \hat{\mathbf{F}}^2}{\sinh^2(e \hat{\mathbf{F}} s)} . \quad (2.56)$$

Todos os termos presentes em (2.55) estão devidamente ordenados, com exceção do último.

A partir do resultado (2.52), das definições (2.49) e (2.54), das primeiras relações (2.47) e da equação (C.5), podemos calcular o comutador

$$\begin{aligned} [(\hat{\mathbf{X}})_\mu(0), (\hat{\mathbf{X}})_\nu(s)] &= \left[(\hat{\mathbf{X}})_\mu(0), (\hat{\mathbf{X}})_\nu(0) + \left(2(e \hat{\mathbf{F}})^{-1} e^{e \hat{\mathbf{F}} s} \sinh(e \hat{\mathbf{F}} s) \right)_{\nu\rho} \hat{\Pi}_\rho(0) \right] \\ &= i(\mathbf{g}^{-1})_{\mu\rho} \left(2(e \hat{\mathbf{F}})^{-1} e^{e \hat{\mathbf{F}} s} \sinh(e \hat{\mathbf{F}} s) \right)_{\nu\rho} \\ &= i \left[\mathbf{g}^{-1} \left(2(e \hat{\mathbf{F}})^{-1} e^{e \hat{\mathbf{F}} s} \sinh(e \hat{\mathbf{F}} s) \right)^T \right]_{\mu\nu} \\ &= i \left[\mathbf{g}^{-1} 2 e^{e \hat{\mathbf{F}}^T s} \left(\frac{\sinh(e \hat{\mathbf{F}} s)}{(e \hat{\mathbf{F}})} \right)^T \right]_{\mu\nu} \\ &= i \left[2 e^{-e \hat{\mathbf{F}} s} \left(\frac{\sinh(e \hat{\mathbf{F}} s)}{(e \hat{\mathbf{F}})} \right) \mathbf{g}^{-1} \right]_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (2.57)$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^T(0) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(s) &= (\mathbf{g} \hat{\mathbf{K}})_{\mu\nu} (\hat{\mathbf{X}})_\mu(0) (\hat{\mathbf{X}})_\nu(s) \\ &= (\hat{\mathbf{X}})_\nu(s) (\hat{\mathbf{K}}^T \mathbf{g})_{\nu\mu} (\hat{\mathbf{X}})_\mu(0) + (\mathbf{g} \hat{\mathbf{K}})_{\mu\nu} [(\hat{\mathbf{X}})_\mu(0), (\hat{\mathbf{X}})_\nu(s)] \\ &= \hat{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(0) + 2i \text{tr} \left[\mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} e^{e \hat{\mathbf{F}} s} \left(\frac{\sinh(e \hat{\mathbf{F}} s)}{(e \hat{\mathbf{F}})} \right) \mathbf{g}^{-1} \right] . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Usando a propriedade cíclica do traço e a definição (2.56) de $\hat{\mathbf{K}}$, reescrevemos a equação (2.58) na forma

$$\hat{\mathbf{X}}^T(0) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(s) = \hat{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(0) + \frac{i}{2} \text{tr} \left[e^{e \hat{\mathbf{F}} s} \left(\frac{e \hat{\mathbf{F}}}{\sinh(e \hat{\mathbf{F}} s)} \right) \right] . \quad (2.59)$$

Considerando o fato de que $\text{tr} \hat{\mathbf{F}} = 0$ e $e^{e \hat{\mathbf{F}} s} = \cosh(e \hat{\mathbf{F}} s) + \sinh(e \hat{\mathbf{F}} s)$, podemos simplificar o traço acima, o que nos fornece

$$\hat{\mathbf{X}}^T(0) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(s) = \hat{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{g} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{X}}(0) + \frac{i}{2} \text{tr} [e \hat{\mathbf{F}} \coth(e \hat{\mathbf{F}} s)] . \quad (2.60)$$

Desse modo, com a expressão (2.60) ordenamos o lado direito da equação (2.55)

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & \hat{\mathbf{X}}^T(s)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(s) + \hat{\mathbf{X}}^T(0)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(0) - 2\hat{\mathbf{X}}^T(s)\mathbf{g}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{X}}(0) + \\ & -\frac{i}{2}\text{tr}[e\hat{\mathbf{F}}\coth(e\hat{\mathbf{F}}s)] - \frac{1}{2}e\sigma\mathbf{g}\hat{\mathbf{F}}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Substituindo o resultado (2.61) em (2.43) e (2.44), obtemos respectivamente,

$$\begin{aligned}f(x', x''; s) &= \frac{\langle x'(s) | \hat{\mathcal{H}} | x''(0) \rangle}{\langle x'(s) | x''(0) \rangle} \\ &= \frac{e^2}{4}(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')^T \mathbf{g} \mathbf{F}^2 \sinh^{-2}(e\mathbf{F}s)(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \\ &\quad - \frac{i}{2}\text{tr}[e\mathbf{F}\coth(e\mathbf{F}s)] - \frac{1}{2}e\sigma\mathbf{g}\mathbf{F}\end{aligned}\quad (2.62)$$

e

$$\begin{aligned}\langle x'(s) | x''(0) \rangle &= g(x', x'') \exp\left[\frac{ie}{4}(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')^T \mathbf{g} \mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s)(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\ln\left(\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{(e\mathbf{F})}\right)\right] \exp\left(\frac{i}{2}e\sigma\mathbf{g}\mathbf{F}s\right) \\ &= \frac{g(x', x'')}{s^2} \det^{-1/2}\left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{(e\mathbf{F}s)}\right] \exp\left(\frac{i}{2}e\sigma\mathbf{g}\mathbf{F}s\right) \times \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ie}{4}(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')^T \mathbf{g} \mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s)(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')\right],\end{aligned}\quad (2.63)$$

onde usamos o fato de que $\det A = \exp[\text{tr}(\ln A)]$ e definimos a matriz coluna \mathbf{X} analogamente às definições (2.49).

Resta-nos agora encontrar $g(x', x'')$. Com esse objetivo, devemos impor inicialmente as condições dadas pelas equações (2.45). Antes, porém, vamos utilizar as expressões (2.49) e (2.53) para escrever os operadores $\hat{\pi}_\mu(s)$ e $\hat{\pi}_\mu(0)$ como:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_\mu(s) &= g_{\mu\nu}(\hat{\Pi}(s))_\nu \\
&= g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} e\mathbf{F} e^{e\mathbf{F}s} \sinh^{-1}(e\mathbf{F}s) \right)_{\nu\gamma} [(\mathbf{X}(s))_\gamma - (\mathbf{X}(0))_\gamma] \\
\hat{\pi}_\mu(0) &= g_{\mu\nu}(\hat{\Pi}(0))_\nu \\
&= g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} e\mathbf{F} e^{-e\mathbf{F}s} \sinh^{-1}(e\mathbf{F}s) \right)_{\nu\gamma} [(\mathbf{X}(s))_\gamma - (\mathbf{X}(0))_\gamma] .
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Dessa forma, o lado esquerdo das equações (2.45) podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
\langle x'(s) | \hat{\pi}_\mu(s) | x''(0) \rangle &= \left[\frac{1}{2} g e\mathbf{F} e^{e\mathbf{F}s} \sinh^{-1}(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right]_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle \\
\langle x'(s) | \hat{\pi}_\mu(0) | x''(0) \rangle &= \left[\frac{1}{2} g e\mathbf{F} e^{-e\mathbf{F}s} \sinh^{-1}(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right]_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle .
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Com o intuito de encontrar o lado direito de (2.45), usamos o resultado (2.63) para computar as derivadas $\partial'_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle$ e $\partial''_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle$. Após algumas manipulações triviais obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle x'(s) | x''(0) \rangle}{\partial x'^\mu} &= \left[\frac{1}{g(x', x'')} \frac{\partial g(x', x'')}{\partial x'^\mu} + \frac{ie}{2} \left(g\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right)_\mu \right] \langle x'(s) | x''(0) \rangle , \\
\frac{\partial \langle x'(s) | x''(0) \rangle}{\partial x''^\mu} &= \left[\frac{1}{g(x', x'')} \frac{\partial g(x', x'')}{\partial x''^\mu} - \frac{ie}{2} \left(g\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right)_\mu \right] \langle x'(s) | x''(0) \rangle .
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Com o uso das equações (2.45), (2.65) e (2.66), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x', x'')} \frac{\partial g(x', x'')}{\partial x'^\mu} &= ie \left[A(x') + \frac{1}{2} g\mathbf{F} (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right]_\mu , \\
\frac{1}{g(x', x'')} \frac{\partial g(x', x'')}{\partial x''^\mu} &= -ie \left[A(x'') + \frac{1}{2} g\mathbf{F} (\mathbf{X}'' - \mathbf{X}') \right]_\mu .
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Escrevendo o lado esquerdo de ambas as equações (2.67) como a derivada de um logaritmo, e integrando-as ao longo de um caminho arbitrário Γ , com ponto inicial em x'' e ponto final em x' , ou seja

$$\begin{aligned}\int_{x'',\Gamma}^{x'} \frac{\partial \ln g(\xi, x'')}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu &= ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu, \\ \int_{x'',\Gamma}^{x'} \frac{\partial \ln g(x', \xi)}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu &= -ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu, \quad (2.68)\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}g(x', x''; \Gamma) &= g(x'', x''; \Gamma) \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu \right\}, \\ g(x', x''; \Gamma) &= g(x', x'; \Gamma) \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu \right\}. \quad (2.69)\end{aligned}$$

Derivando a primeira destas equações em relação a x''^μ e a segunda em relação a x'^μ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x', x''; \Gamma)}{\partial x''^\mu} &= \frac{\partial g(x'', x''; \Gamma)}{\partial x''^\mu} \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\gamma(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\gamma\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\gamma \right\} \\ &\quad - ieg(x', x''; \Gamma) \left[A(x'') + \frac{1}{2}\mathbf{gF}(\mathbf{X}'' - \mathbf{X}') \right]_\mu, \\ \frac{\partial g(x', x''; \Gamma)}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial g(x', x'; \Gamma)}{\partial x'^\mu} \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\gamma(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\gamma\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\gamma \right\} \\ &\quad + ieg(x', x''; \Gamma) \left[A(x') + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right]_\mu. \quad (2.70)\end{aligned}$$

Comparando as equações (2.67) e (2.70) somos levados à conclusão de que

$$\frac{\partial g(x'', x''; \Gamma)}{\partial x''^\mu} = 0, \quad \frac{\partial g(x', x'; \Gamma)}{\partial x'^\mu} = 0, \quad (2.71)$$

e conseqüentemente,

$$g(x'', x''; \Gamma) = g(x', x'; \Gamma) = \text{constante}. \quad (2.72)$$

Substituindo os resultados acima nas equações (2.69), obtemos

$$\begin{aligned}g(x', x''; \Gamma) &= C \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu \right\}, \\ g(x', x''; \Gamma) &= C \exp \left\{ ie \int_{x'',\Gamma}^{x'} \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{gF})_{\mu\nu}(\xi^\nu - x''^\nu) \right] d\xi^\mu \right\}. \quad (2.73)\end{aligned}$$

Ambas as integrais acima independem do caminho de integração, pois os respectivos integrandos têm rotacional nulo. Portanto, podemos escolher o caminho Γ da forma mais conveniente possível. Vamos escolher a linha reta que liga os pontos x' e x'' . Devido à propriedade de anti-simetria do tensor $F_{\mu\nu}$, é imediato verificar que

$$\int_{x'', \text{reta}}^{x'} (\mathbf{gF})_{\mu\nu} (\xi^\nu - x''^\nu) d\xi^\mu = \int_{x'', \text{reta}}^{x'} (\mathbf{gF})_{\mu\nu} (\xi^\nu - x'^\nu) d\xi^\mu = 0. \quad (2.74)$$

Com isso, as equações (2.73) nos fornecem

$$g(x', x'') = C \exp \left(ie \int_{x'', \text{reta}}^{x'} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right). \quad (2.75)$$

Substituindo este resultado na expressão (2.63), obtemos

$$\begin{aligned} \langle x'(s) | x''(0) \rangle &= \frac{C}{s^2} \det^{-1/2} \left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{(e\mathbf{F}s)} \right] \exp \left(ie \int_{x'', \text{reta}}^{x'} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{i}{2} e \sigma \mathbf{gF}s \right) \exp \left[\frac{ie}{4} (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')^T \mathbf{gF} \coth(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Resta-nos ainda encontrar a constante C utilizando a condição inicial (2.46). Quando $s \rightarrow 0^+$ podemos escrever

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{(e\mathbf{F}s)} \right] \cong \det^{-1/2}(1) = 1, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s) = \mathbf{F} \frac{\cosh(e\mathbf{F}s)}{\sinh(e\mathbf{F}s)} \cong \mathbf{F} \frac{1}{(e\mathbf{F}s)} = \frac{1}{es}. \quad (2.78)$$

Com isso, escrevemos o limite $s \rightarrow 0^+$ da equação (2.76) como

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle x'(s) | x''(0) \rangle &= \exp \left(ie \int_{x'', \text{reta}}^{x'} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \\ &\times \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{C}{s^2} \exp \left(\frac{-1}{4is} [-(x'^0 - x''^0)^2 + (x'^1 - x''^1)^2 + (x'^2 - x''^2)^2 + (x'^3 - x''^3)^2] \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Comparando a equação acima com a representação da função delta

$$\delta(y) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left(\frac{-y^2}{4a^2} \right), \quad (2.80)$$

tomamos $C = -i/(4\pi)^2$, de modo que o limite (2.79) forneça

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle x'(s) | x''(0) \rangle &= \delta^4(x' - x'') \exp \left(ie \int_{x'', \text{reta}}^{x'} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \\ &= \delta^4(x' - x'') , \end{aligned} \quad (2.81)$$

de acordo com a condição (2.46). Com isso, o propagador (2.76) é finalmente escrito como

$$\begin{aligned} \langle x'(s) | x''(0) \rangle &= \frac{-i}{(4\pi s)^2} \det^{-1/2} \left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{(e\mathbf{F}s)} \right] \exp \left(\frac{i}{2} e \sigma \mathbf{g} \mathbf{F} s \right) \times \\ &\times \exp \left(ie \int_{x'', \text{reta}}^{x'} A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \exp \left[\frac{ie}{4} (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')^T \mathbf{g} \mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s) (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \right] . \end{aligned} \quad (2.82)$$

Com todos esses resultados, podemos agora voltar atrás e calcular a correção \mathcal{L}_1 . Para isso, substituímos o resultado (2.82) na equação (2.34) e fazemos a rotação de Wick $s \rightarrow -is$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}s} \right] \text{tr} \exp \left(\frac{1}{2} e \sigma \mathbf{F} s \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh(esX)}{\Im \cosh(esX)} \right] , \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde usamos os resultados (D.7) e (D.16) do Apêndice D, e definimos $X^2 = (\vec{B} + i\vec{E})^2$. A expressão (2.83) para campos fracos se reduz a

$$\mathcal{L}_1 \cong -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \left[1 + \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] . \quad (2.84)$$

onde usamos a definição (2.5) de \mathcal{F} . Acrescentando a \mathcal{L}_1 em (2.83) um termo constante (independente de \vec{E} e \vec{B}) de modo a fazê-la se anular na ausência de campos, podemos escrever a lagrangiana efetiva para o sistema como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ &= - \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \right] \mathcal{F} + \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh(esX)}{\Im \cosh(esX)} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Renormalizando os campos e a carga e de modo que

$$\mathcal{F}_{ren} + i\mathcal{G}_{ren} = (1 + Ce^2)(\mathcal{F} + i\mathcal{G}) \quad , \quad e_{ren}^2 = e^2/(1 + Ce^2) \quad , \quad (2.86)$$

onde definimos a quantidade infinita

$$C = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \quad , \quad (2.87)$$

obtemos a chamada lagrangiana de Euler-Heisenberg [73, 83, 84]

$$\mathcal{L}_{ef} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh(esX)}{\Im \cosh(esX)} - 1 - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} \right] . \quad (2.88)$$

Na expressão anterior suprimimos os índices *ren* das quantidades renormalizadas.

Expandindo a lagrangiana (2.88) para campos fracos, obtemos

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{e^4}{360\pi^2 m^4} [(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 7(\vec{E} \cdot \vec{B})^2] . \quad (2.89)$$

Por abuso de linguagem (como é feito usualmente na literatura), vamos nos referir à expressão acima também como lagrangiana de Euler-Heisenberg.

Recuperando as constantes \hbar e c temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{mc^2} [(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 7(\vec{E} \cdot \vec{B})^2] \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2(E_{0,EH})^2} \left[\frac{1}{4}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + \frac{7}{4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] , \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \cong 1/137$ é a constante de estrutura fina, e

$$E_{0,EH} = \left[\frac{45\pi^3 mc^2}{2\alpha^2 \lambda_C^3} \right]^{1/2} \quad (2.91)$$

uma constante com dimensões de campo elétrico, análoga a E_0 na equação (2.9), sendo $\lambda_C = 2\pi\hbar/mc$ o comprimento de onda Compton.

2.4 O Efeito Scharnhorst e a Técnica de Barton

Esta seção tem por meta expor o cálculo de Barton [12] para o efeito Scharnhorst [11] e calcular a variação na velocidade da luz que se propaga numa região entre placas paralelas, mas usando uma lagrangiana efetiva ligeiramente mais geral do que a de Euler-Heisenberg e que contém, como casos particulares, esta última e a de Born-Infeld. Podemos alcançar esses objetivos simultaneamente, como veremos a seguir.

Note que as lagrangianas (2.89) e (2.9) podem ser escritas de uma forma genérica como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L} , \quad (2.92)$$

sendo \mathcal{L}_0 a lagrangiana de Maxwell (2.3) e $\Delta\mathcal{L}$ um termo de correção que tem a forma

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= 4\tilde{\alpha}\mathcal{F}^2 + \beta\mathcal{G}^2 \\ &= \tilde{\alpha}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + \beta(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 , \end{aligned} \quad (2.93)$$

onde α e β são constantes reais.

Vamos agora utilizar a técnica de Barton para obter a variação na velocidade da luz, supondo que a eletrodinâmica seja descrita por uma densidade de lagrangiana com a forma genérica que acabamos de escrever. Para isso, temos de lançar mão do fato, bem conhecido da eletrodinâmica clássica [12], que uma correção $\Delta\mathcal{L}$ à lagrangiana de Maxwell leva à criação de um vetor de polarização \vec{P} e de magnetização \vec{M} dados, respectivamente, por

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta\vec{E}} , \quad \vec{M} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta\vec{B}} . \quad (2.94)$$

Para a expressão de $\Delta\mathcal{L}$ em questão, (2.93), temos

$$P_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta E_i} = \frac{1}{4\pi} \left[4\tilde{\alpha}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)E_i + 2\beta(\vec{E} \cdot \vec{B})B_i \right] , \quad (2.95)$$

$$M_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\Delta\mathcal{L}}{\delta B_i} = \frac{1}{4\pi} \left[-4\tilde{\alpha}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)B_i + 2\beta(\vec{E} \cdot \vec{B})E_i \right] . \quad (2.96)$$

O passo principal na técnica que estamos empregando consiste em substituir nas expressões (2.95) e (2.96) os campos eletromagnéticos \vec{E} e \vec{B} por uma soma de dois campos, um clássico

e outro quantizado, isto é, fazemos nessas expressões a substituição

$$\vec{E} = \vec{e} + \vec{\tilde{E}} \quad , \quad \vec{B} = \vec{b} + \vec{\tilde{B}} . \quad (2.97)$$

Sendo \vec{e} e \vec{b} campos clássicos que descrevem a onda cuja propagação desejamos estudar, e $\vec{\tilde{E}}$ e $\vec{\tilde{B}}$ campos quânticos, que serão tomados, dentro do espírito da teoria de perturbação, como operadores de campo livres, sem interação, exceto pela alteração de seus modos devido à presença das placas. Dentro dessa aproximação, é válido tomar a expansão dos campos quantizados em termos de operadores de criação e aniquilação, como feito usualmente na EDQ.

Substituindo a expressão (2.97) nas equações (2.95) e (2.96), tomando o valor esperado no vácuo, e separando os termos lineares nos campos clássicos \vec{e} e \vec{b} , obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_i \rangle_{||} &= \frac{\tilde{\alpha}}{\pi} \left[\langle (\vec{\tilde{E}}^2 - \vec{\tilde{B}}^2) \mathbf{E}_i \rangle_{||} + \left(\langle \vec{\tilde{E}}^2 \rangle_{||} - \langle \vec{\tilde{B}}^2 \rangle_{||} \right) e_i + 2 \langle \mathbf{E}_j \mathbf{E}_i \rangle_{||} e_j + (\vec{e}^2 - \vec{b}^2) e_i \right] + \\ &\quad + \frac{\beta}{2\pi} \left[\langle (\mathbf{E}_j \mathbf{B}_j) \mathbf{B}_i \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i \rangle_{||} e_j + b_j b_i e_j \right] \\ &= p_i + \frac{\tilde{\alpha}}{\pi} \left[\langle (\vec{\tilde{E}}^2 - \vec{\tilde{B}}^2) \mathbf{E}_i \rangle_{||} + (\vec{e}^2 - \vec{b}^2) e_i \right] + \frac{\beta}{2\pi} \left[\langle (\mathbf{E}_j \mathbf{B}_j) \mathbf{B}_i \rangle_{||} + b_j b_i e_j \right] , \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \langle M_i \rangle_{||} &= -\frac{\tilde{\alpha}}{\pi} \left[\langle (\vec{\tilde{E}}^2 - \vec{\tilde{B}}^2) \mathbf{B}_i \rangle_{||} + \left(\langle \vec{\tilde{E}}^2 \rangle_{||} - \langle \vec{\tilde{B}}^2 \rangle_{||} \right) b_i - 2 \langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i \rangle_{||} b_j + (\vec{e}^2 - \vec{b}^2) b_i \right] + \\ &\quad + \frac{\beta}{2\pi} \left[\langle (\mathbf{E}_j \mathbf{B}_j) \mathbf{E}_i \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i \rangle_{||} b_j + e_i e_j b_j \right] \\ &= m_i - \frac{\tilde{\alpha}}{\pi} \left[\langle (\vec{\tilde{E}}^2 - \vec{\tilde{B}}^2) \mathbf{B}_i \rangle_{||} + (\vec{e}^2 - \vec{b}^2) b_i \right] + \frac{\beta}{2\pi} \left[\langle (\mathbf{E}_j \mathbf{B}_j) \mathbf{E}_i \rangle_{||} + e_i e_j b_j \right] , \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde o símbolo $\langle \dots \rangle_{||}$ significa que estamos levando em consideração as condições de contorno desejadas. Usamos ainda o fato de que $\langle \mathbf{E}_i \mathbf{B}_j \rangle_{||} = 0$ e definimos \vec{p} e \vec{m} como sendo, respectivamente, os termos da polarização elétrica (2.98) e da magnetização (2.99) que correspondem às respostas do vácuo lineares nos campos clássicos. Estes vetores nos permitem obter as polarizabilidades elétrica $\chi_{ij}^{(e)}$ e magnética $\chi_{ij}^{(m)}$ do vácuo, como segue:

$$p_i = \frac{1}{4\pi} \left[4\tilde{\alpha} \left(\langle \vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2 \rangle_{\parallel} \delta_{ij} + 2\langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{\parallel} \right) + 2\beta \langle \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j \rangle_{\parallel} \right] e_j = \chi_{ij}^{(e)} e_j , \quad (2.100)$$

$$m_i = \frac{1}{4\pi} \left[4\tilde{\alpha} \left(-\langle \vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2 \rangle_{\parallel} \delta_{ij} + 2\langle \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j \rangle_{\parallel} \right) + 2\beta \langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{\parallel} \right] b_j = \chi_{ij}^{(m)} b_j . \quad (2.101)$$

De posse das quantidades $\chi_{ij}^{(e)}$ e $\chi_{ij}^{(m)}$, encontramos a permissividade elétrica ϵ_{ij} e permeabilidade magnética μ_{ij}

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + \Delta\epsilon_{ij} , \\ \mu_{ij} &= \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^{(m)} = \delta_{ij} + \Delta\mu_{ij} . \end{aligned} \quad (2.102)$$

Utilizando as equações (2.100), (2.101) e (2.102), temos

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{ij} &= 4\tilde{\alpha} \left(\langle \vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2 \rangle_{\parallel} \delta_{ij} + 2\langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{\parallel} \right) + 2\beta \langle \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j \rangle_{\parallel} , \\ \Delta\mu_{ij} &= 4\tilde{\alpha} \left(-\langle \vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2 \rangle_{\parallel} \delta_{ij} + 2\langle \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j \rangle_{\parallel} \right) + 2\beta \langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{\parallel} . \end{aligned} \quad (2.103)$$

Correções nas expressões de ϵ_{ij} e μ_{ij} provocam uma variação no índice de refração $n = (\epsilon\mu)^{1/2}$, dada em primeira ordem por

$$\Delta n = \frac{1}{2}(\Delta\epsilon + \Delta\mu) . \quad (2.104)$$

Esta variação, por sua vez, fornece a velocidade corrigida c' da onda:

$$c' = \frac{c}{n'} = \frac{c}{n + \Delta n} \cong \left(1 - \frac{\Delta n}{n} \right) \frac{c}{n} = 1 - \Delta n , \quad (2.105)$$

onde usamos o fato de que no vácuo livre (sem condições de contorno) o índice de refração n é igual a unidade, e no nosso sistema de unidades $c = 1$.

Com essas considerações, podemos encontrar então qual é a influência na velocidade de propagação da luz devida à presença de duas placas infinitas, dispostas uma paralelamente a outra, supondo que a eletrodinâmica seja descrita por uma lagrangiana com a forma (2.92).

De um modo geral, podemos ter uma onda se propagando na direção perpendicular às placas, que no nosso sistema de coordenadas corresponde a uma propagação na direção de \hat{z} , ou uma onda se propagando paralelamente às placas, por exemplo, na direção de \hat{x} . Em cada

um desses casos, existem duas polarizações possíveis, com suas respectivas susceptibilidades elétrica e magnética, e correspondentes variações nos índices de refração Δn , que podem ser obtidos por meio de (2.103) e (2.104), como indicado abaixo:

• Propagação paralela às placas ($\vec{k} = \pm |k| \hat{x}$)

1. Polarização na direção \hat{y} :

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_2 \hat{y} \\ \vec{b} &= b_3 \hat{z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon_{22} \\ \Delta\mu &= \Delta\mu_{33} \end{aligned}, \quad (2.106)$$

$$\Delta n = 4\tilde{\alpha} \left(\langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2 \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 \rangle_{||} \right) + \beta \left(\langle \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 \rangle_{||} + \langle \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3 \rangle_{||} \right). \quad (2.107)$$

2. Polarização na direção \hat{z} :

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_3 \hat{z} \\ \vec{b} &= b_2 \hat{y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon_{33} \\ \Delta\mu &= \Delta\mu_{22} \end{aligned}, \quad (2.108)$$

$$\Delta n = 4\tilde{\alpha} \left(\langle \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3 \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 \rangle_{||} \right) + \beta \left(\langle \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 \rangle_{||} + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2 \rangle_{||} \right). \quad (2.109)$$

• Propagação perpendicular as placas ($\vec{k} = \pm |k| \hat{z}$)

1. Polarização na direção \hat{x} :

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_1 \hat{x} \\ \vec{b} &= b_2 \hat{y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon_{11} \\ \Delta\mu &= \Delta\mu_{22} \end{aligned}, \quad (2.110)$$

$$\Delta n = 4\tilde{\alpha} \left(\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1 \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 \rangle_{||} \right) + \beta \left(\langle \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 \rangle_{||} + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2 \rangle_{||} \right). \quad (2.111)$$

2. Polarização na direção \hat{y} :

$$\begin{aligned} \vec{e} &= e_2 \hat{y} \\ \vec{b} &= b_1 \hat{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon &= \Delta\epsilon_{22} \\ \Delta\mu &= \Delta\mu_{11} \end{aligned}, \quad (2.112)$$

$$\Delta n = 4\tilde{\alpha} \left(\langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2 \rangle_{||} + \langle \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 \rangle_{||} \right) + \beta \left(\langle \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 \rangle_{||} + \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1 \rangle_{||} \right). \quad (2.113)$$

Daqui por diante, vamos nos restringir a três condições de contorno distintas.

(i) Duas Placas Condutoras-(CC)

Esta configuração se refere a duas placas perfeitamente condutoras dispostas uma paralelamente a outra. Os correlatores dos campos eletromagnéticos submetidos a estas condições podem ser obtidos por meio da mesma técnica empregada na seção 1.3 [10] e são dados por

$$\begin{aligned}\langle 0|E_1^2(x)|0\rangle &= \langle 0|E_2^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_3^2(x)|0\rangle = \frac{\pi^2}{48L^4} \left(F(\theta) - \frac{1}{15} \right), \\ \langle 0|E_3^2(x)|0\rangle &= -\langle 0|B_1^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_2^2(x)|0\rangle = \frac{\pi^2}{48L^4} \left(F(\theta) + \frac{1}{15} \right),\end{aligned}\quad (2.114)$$

sendo a função $F(\theta)$ e a quantidade θ definidas em (1.76) e (1.51), respectivamente.

Substituindo os resultados (2.114) nas equações (2.107) e (2.109), obtemos variação nula para o índice de refração de uma onda se propagando paralelamente às placas:

$$\Delta n_{\parallel}^{(CC)} = 0 ; \quad (2.115)$$

sendo assim, não existe variação na velocidade da luz paralela às placas.

Para uma onda se propagando perpendicularmente às placas, as equações (2.114), (2.111) e (2.113) nos fornecem

$$\Delta n_{\perp}^{(CC)} = -\frac{\pi^2}{2^3 3^2 5} \frac{1}{L^4} (4\tilde{\alpha} + \beta) . \quad (2.116)$$

(ii) Duas Placas Permeáveis-(PP)

Neste caso as duas placas em questão são infinitamente permeáveis. Os correlatores dos campos eletromagnéticos para esta configuração de placas são dados por [46]

$$\begin{aligned}\langle 0|E_1^2(x)|0\rangle &= \langle 0|E_2^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_3^2(x)|0\rangle = -\frac{\pi^2}{48L^4} \left(F(\theta) + \frac{1}{15} \right), \\ \langle 0|E_3^2(x)|0\rangle &= -\langle 0|B_1^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_2^2(x)|0\rangle = -\frac{\pi^2}{48L^4} \left(F(\theta) - \frac{1}{15} \right).\end{aligned}\quad (2.117)$$

Substituindo os resultados (2.117) nas equações (2.107), (2.109), (2.111) e (2.113), obtemos os mesmos resultados que os encontrados para as condições CC

$$\Delta n_{\parallel}^{(PP)} = 0 ; \quad (2.118)$$

$$\Delta n_{\perp}^{(PP)} = \Delta n_{\perp}^{(CC)} = -\frac{\pi^2}{2^3 3^2 5} \frac{1}{L^4} (4\tilde{\alpha} + \beta) . \quad (2.119)$$

(iii) Uma Placa Condutora e uma Permeável-(CP)

Esta configuração corresponde a duas placas paralelas, uma perfeitamente condutora, localizada no plano $z = 0$, e outra infinitamente permável, localizada em $z = L$. Os correlatores de campo elétrico, a menos de fatores divergentes, são dados pelas equações (1.56). Os correlatores de campo magnético podem ser calculados de forma análoga ao que fizemos para o campo elétrico. Os resultados são:

$$\begin{aligned}\langle 0|E_1^2(x)|0\rangle &= \langle 0|E_2^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_3^2(x)|0\rangle = \frac{\pi^2}{96L^4} \left(G(\theta) + \frac{7}{60} \right), \\ \langle 0|E_3^2(x)|0\rangle &= -\langle 0|B_1^2(x)|0\rangle = -\langle 0|B_2^2(x)|0\rangle = \frac{\pi^2}{48L^4} \left(G(\theta) - \frac{7}{60} \right),\end{aligned}\quad (2.120)$$

sendo a função $G(\theta)$ definida em (1.54). Substituindo os resultados (2.120) nas equações (2.107), (2.109), (2.111) e (2.113), obtemos

$$\Delta n_{\parallel}^{(\text{CP})} = 0, \quad (2.121)$$

$$\Delta n_{\perp}^{(\text{CP})} = -\frac{7}{8}\Delta n_{\perp}^{(\text{CC})} = \frac{7\pi^2}{2^6 3^2 5} \frac{1}{L^4} (4\tilde{\alpha} + \beta). \quad (2.122)$$

Pelas equações (2.115), (2.118) e (2.121) fica claro que para nenhuma das condições de contorno consideradas temos alteração na velocidade da luz quando esta se propaga paralelamente às placas, quaisquer que sejam os coeficientes $\tilde{\alpha}$ e β .

Para uma propagação em uma direção arbitrária, fazendo um ângulo θ com a normal às placas (direção \hat{z}), a equação (2.105) se torna

$$c'(\theta) = 1 - \Delta n_{\perp} \cos^2 \theta. \quad (2.123)$$

No intuito de encontrar uma “fórmula mágica” para a lagrangiana (2.92), tomamos a média da velocidade (2.123) nas polarizações e em todas as direções

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} c'(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= 1 - \frac{\Delta n_{\perp}}{3},\end{aligned}\quad (2.124)$$

e calculamos a densidade de energia do campo eletromagnético no vácuo,

$$\rho = \frac{1}{2} \langle 0 | (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) | 0 \rangle, \quad (2.125)$$

para as três condições de contorno consideradas, o que pode ser feito com o auxílio dos correlatores (2.114), (2.117) e (2.120),

$$\rho^{CC} = \rho^{PP} = -\frac{\pi^2}{2^4 3^2 5} \frac{1}{L^4} \quad , \quad \rho^{CP} = -\frac{7}{8} \rho^{CC} = \frac{7\pi^2}{2^7 3^2 5} \frac{1}{L^4} . \quad (2.126)$$

Utilizando as equações (2.126), (2.124), (2.116), (2.119) e (2.122), temos que

$$\begin{aligned} \bar{c}'^{CC} &= 1 - \frac{2}{3}(4\tilde{\alpha} + 2\beta)\rho^{CC} \\ \bar{c}'^{PP} &= 1 - \frac{2}{3}(4\tilde{\alpha} + 2\beta)\rho^{PP} \\ \bar{c}'^{CP} &= 1 - \frac{2}{3}(4\tilde{\alpha} + 2\beta)\rho^{CP} , \end{aligned} \quad (2.127)$$

ou de forma geral

$$\bar{c}' = 1 - \frac{2}{3}(4\tilde{\alpha} + 2\beta)\rho , \quad (2.128)$$

que é a fórmula mágica para a lagrangiana (2.92).

Os coeficientes $\tilde{\alpha}$ e β para a lagrangiana de Euler-Heisenberg podem ser encontrados ao compararmos as equações (2.93), (2.92) e (2.89)

$$\tilde{\alpha} = \frac{e^4}{360\pi^2 m^4} \quad , \quad \beta = 7\tilde{\alpha} = \frac{7e^4}{360\pi^2 m^4} . \quad (2.129)$$

Utilizando as equações (2.116), (2.119), (2.122) e (2.105), concluimos que a velocidade de propagação c'_\perp da luz, quando esta se propaga perpendicularmente às placas, para cada uma das condições de contorno consideradas, é dada por

$$\begin{aligned} (c')_\perp^{(CC)} = (c')_\perp^{(PP)} &= 1 + \frac{11\pi^2}{2^2 3^4 5^2} \frac{\alpha^2}{(mL)^4} \\ &= 1 + \frac{11\alpha^2}{2^6 3^4 5^2 \pi^2} \left(\frac{\lambda_C}{L} \right)^4 > 1 , \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} (c')_\perp^{(CP)} &= 1 - \frac{7}{8} \frac{11\pi^2}{2^2 3^4 5^2} \frac{\alpha^2}{(mL)^4} \\ &= 1 - \frac{77\alpha^2}{2^9 3^4 5^2 \pi^2} \left(\frac{\lambda_C}{L} \right)^4 < 1 , \end{aligned} \quad (2.131)$$

sendo λ_C o comprimento de onda Compton $\lambda_C = 2\pi/m$.

Ao substituírmos os valores de $\tilde{\alpha}$ e β dados em (2.129) na equação (2.128) obtemos a fórmula mágica (2.4).

Para uma lagrangiana do tipo Born-Infeld (2.9), os coeficientes $\tilde{\alpha}$ e β são dados por

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{8E_0^2} \quad , \quad \beta = -\gamma \frac{1}{2E_0^2} . \quad (2.132)$$

Com o auxílio de (2.116), (2.119), (2.122) e (2.105), obtemos

$$(c')_{\perp}^{(\text{CC})} = (c')_{\perp}^{(\text{PP})} = 1 + \frac{\pi^2}{2^4 3^2 5} (1 - \gamma) \frac{1}{(E_0 L^2)^2} , \quad (2.133)$$

$$(c')_{\perp}^{(\text{CP})} = 1 - \frac{7\pi^2}{2^7 3^2 5} (1 - \gamma) \frac{1}{(E_0 L^2)^2} . \quad (2.134)$$

Substituindo os coeficientes apresentados em (2.129) na equação (2.128) obtemos a fórmula mágica para uma lagrangiana do tipo Born-Infeld

$$\bar{c}' = 1 - \frac{1}{3} (1 - \gamma) \frac{\rho}{E_0^2} \quad (2.135)$$

2.5 Comentários Finais

Na seção anterior aplicamos a técnica introduzida por Barton [12] para obter a variação da velocidade de propagação da luz ocasionada pela alteração do campo de radiação quando este fica submetido às condições de contorno impostas pela presença de placas materiais (lembre-se que o campo clássico da onda eletromagnética interage, indiretamente, com o campo de radiação, devido à polarização do vácuo). Discutimos três configurações de placas paralelas diferentes, envolvendo placas perfeitamente condutoras e perfeitamente permeáveis.

Para uma lagrangiana com a forma geral (2.93), vemos pelos resultados (2.115), (2.118) e (2.121) que a velocidade de uma onda se propagando paralelamente às placas não se altera.

Para uma propagação perpendicular às placas, as condições de contorno (CC) e (PP) fornecem o mesmo resultado para a variação na velocidade da luz, como indicam as equações (2.116) e (2.119) respectivamente.

Já para a condição (CP) podemos constatar, pela equação (2.122), que a variação na velocidade da luz tem sinal oposto ao que encontramos para as outras duas condições. Esse resultado está relacionado com o que ocorre no efeito Casimir, onde encontramos a mesma força atrativa entre as placas para as condições (CC) e (PP), e uma força repulsiva para (CP). De fato, analisando a relação existente entre a variação na velocidade da luz δc e a densidade de energia do vácuo ρ , constatada por Latorre e colaboradores [68] e dada pela equação (2.4) para o caso da EDQ usual, esse resultado já era esperado, devido à proporcionalidade entre δc e ρ . Uma outra consequência imediata dessa proporcionalidade é que a variação δc para as condições (CP) é $-7/8$ das variações correspondentes com as outras duas condições de contorno, como pode ser verificado comparando as equações (2.116), (2.119) e (2.122)

Ao considerarmos lagrangianas do tipo Born-Infeld, dadas por (2.9) com γ genérico, somos levados a um fato interessante: de acordo com (2.133) e (2.134), se tomarmos um fator $\gamma < 1$ teremos

$$\gamma < 1 \quad \Rightarrow \quad (c')_{\perp}^{(CC)} = (c')_{\perp}^{(PP)} > 1 \quad , \quad (c')_{\perp}^{(CP)} < 1 . \quad (2.136)$$

Já no caso em que $\gamma > 1$, obtemos

$$\gamma > 1 \quad \Rightarrow \quad (c')_{\perp}^{(CC)} = (c')_{\perp}^{(PP)} < 1 \quad , \quad (c')_{\perp}^{(CP)} > 1 . \quad (2.137)$$

No entanto, se tomarmos $\gamma = 1$ não se constata, na aproximação considerada (ordem $1/E_0^2$), nenhuma variação na velocidade da luz devido à presença das placas materiais. Ou seja, temos

$$\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad (c')_{\perp}^{(CC)} = (c')_{\perp}^{(PP)} = (c')_{\perp}^{(CP)} = 1 \quad (2.138)$$

O fato de termos obtido velocidades de propagação da luz maiores do que $c = 1$ não está em desacordo com a causalidade, estas são velocidades de fase, e esses resultados valem somente para baixas frequências. Para fazermos um estudo a esse respeito, deveríamos ter considerado a propagação de um pacote de onda, investigando qual seria a velocidade da frente desse pacote, quantidade esta que não deve ultrapassar $c = 1$. Porém, para termos um pacote com frente bem definida, precisamos considerar suas componentes de Fourier em todo o espectro, inclusive nos altos valores de frequências, situação onde os resultados apresentados não se aplicam mais.

Como último comentário, gostaríamos de enfatizar que com a técnica de Barton, empregada na seção anterior, também poderíamos ter obtido a variação da velocidade da luz provocada pelas mais diversas circunstâncias, como efeitos térmicos, condições de contorno de outros tipos, etc. Para isso, bastaria tomar o valor esperado do campo eletromagnético em (2.103) no estado correspondente.

Capítulo 3

Correções Radiativas ao Efeito Casimir

Neste capítulo estudamos o efeito Casimir para campos com interação. Em particular, calculamos as primeiras correções radiativas à energia de Casimir de um campo escalar com massa com auto-interação $\lambda\phi^4$ sujeito a condições de contorno em fronteiras planas e paralelas entre si. Várias condições são consideradas, dentre elas a condição mista (Dirichlet-Neumann), cuja peculiaridade reside no fato de que mesmo para a configuração de placas paralelas ela dá origem a uma força repulsiva entre as placas. Os limites de massa nula para as correções em ordem λ concordam com os resultados da literatura [24]. Já os cálculos envolvendo campos massivos, revelam um resultado interessante, e um dos mais importantes desta tese, a saber: embora a energia de Casimir de um campo escalar sem massa calculada com as condições de contorno de Dirichlet seja idêntica àquela calculada com condições de contorno de Neumann, mesmo se incluirmos as primeiras correções radiativas (resultado inesperado, pois os modos do campo são diferentes), o mesmo não ocorre para campos massivos.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 3.1 fazemos uma breve introdução ao efeito Casimir. Na seção 3.2 apresentamos os cálculos do efeito Casimir para o campo eletromagnético entre placas paralelas e perfeitamente condutoras. Na seção seguinte, calculamos a energia de Casimir de um campo escalar com massa, mas utilizando diretamente técnicas funcionais. Na seção 3.4 passamos a discutir as correções radiativas ao efeito Casimir no modelo $\lambda\phi^4$ e, finalmente, na seção 3.5 encontram-se comentários finais.

3.1 Introdução ao Efeito Casimir

O efeito Casimir, assim chamado em homenagem ao físico holandês Hendrik B. G. Casimir que o previu teoricamente em 1948 [1], consiste essencialmente na atração entre duas placas neutras, paralelas e perfeitamente condutoras — em outras palavras, um capacitor plano descarregado —, localizadas no vácuo. Obviamente, tal força não pode ser explicada a partir da física clássica. Sua origem é genuinamente quântica. No entanto, a novidade do resultado de Casimir não estava no fato de que dois objetos neutros pudessem se atrair, uma vez que London [85], em 1930, já havia explicado com a mecânica quântica a força de atração entre dois átomos (ou moléculas) neutros, porém polarizáveis, conhecida como força de van der Waals. A novidade de seu trabalho estava na técnica empregada por ele no cálculo dessa força, baseada, como veremos, na energia de ponto zero do campo eletromagnético quantizado na presença das placas.

De fato, a história do efeito Casimir está intimamente relacionada com as forças de van der Waals; o próprio interesse de Casimir na época não era a interação entre duas placas neutras e condutoras, mas sim como o retardamento causado pela finitude da velocidade da luz afetava as forças de London-van der Waals. Esse interesse se originou nos resultados encontrados por Verwey e Overbeek [86] relacionados ao estudo da estabilidade de certos sistemas coloidais. Eles chegaram à conclusão de que, para que houvesse acordo entre teoria e experimentos, o potencial de interação interatômico deveria cair mais rapidamente do que $1/r^6$ (potencial previsto por London) para grandes distâncias. Mais ainda, chegaram a conjecturar que a razão para essa mudança na lei de força tinha origem no retardamento da interação eletromagnética, cujos efeitos tornavam-se perceptíveis a grandes distâncias. Ou seja, a teoria de London deveria ser modificada para grandes distâncias a fim de incorporar os efeitos do retardamento. Foram justamente Casimir e Polder os primeiros a calcular explicitamente tais efeitos utilizando métodos perturbativos em eletrodinâmica quântica [87]. Eles mostraram que para distâncias interatômicas tais que o tempo de percurso da luz entre os átomos é da ordem de tempos característicos do átomo, o potencial interatômico passa a se comportar como $1/r^7$. Na época, esse resultado causou muito mais impacto do que o trabalho que deu origem ao efeito Casimir. Essa mudança na lei de potência da interação de van der Waals quando se passa do regime não retardado (pequenas separações entre os átomos) ao

regime retardado (grandes separações entre os átomos) só foi verificada experimentalmente vinte anos após a sua previsão, por Tabor e Winterton [88]. Usando folhas de mica, eles verificaram que havia uma mudança na lei de potência da força interatômica para distâncias da ordem de 150\AA ; essa distância corresponde aproximadamente ao comprimento de onda da transição dominante do material utilizado.

Embora o cálculo de Casimir e Polder [87] tenha sido longo e trabalhoso, o resultado final se revelou relativamente simples. Esse fato sugeriu a eles que deveria haver um procedimento muito mais simples que fornecesse o mesmo resultado, como fica claro em suas próprias palavras¹:

A forma muito simples da Eq. (56) e a fórmula análoga (25) sugerem que deveria ser possível derivar essas expressões, talvez a menos de fatores numéricos, por meio de considerações mais elementares. Isso seria desejável uma vez que daria um respaldo físico maior para o nosso resultado, um resultado que na nossa opinião é muito notável. Até o momento não fomos capazes de encontrar tal argumento simples.

Foi então que, numa conversa com Niels Bohr, Casimir ouviu a sugestão de que seu resultado poderia ter alguma relação com a energia de ponto zero². Uma simples sugestão, mas o suficiente para colocar Casimir no caminho certo. Pouco tempo se passou para que Casimir rederivasse seu resultado utilizando o conceito de energia de ponto zero, num trabalho que foi publicado apenas em 1949 [91] (maiores detalhes sobre as motivações iniciais de Casimir podem ser encontradas em [92]). A novidade do trabalho de Casimir estava então no fato de que a força entre dois corpos macroscópicos colocados no vácuo pode ser calculada pela variação da energia de ponto zero (devidamente regularizada e renormalizada) do campo eletromagnético quantizado, sujeito às condições de contorno impostas pela presença de tais corpos. Esse método deve fornecer o mesmo resultado para a força entre os corpos que aquele

¹Tradução feita pelo autor desta tese.

²A energia de ponto zero apareceu na física pela primeira vez num trabalho de Max Planck em 1911 [89], bem antes que a mecânica quântica estivesse bem estabelecida e que a sua derivação fosse feita a partir do formalismo matricial de Heisenberg em 1925. Durante muitos anos, mesmo após 1925, ainda foi um tema controvertido nos debates entre os especialistas da física quântica. Para maiores detalhes sobre a história da energia de ponto zero, veja, por exemplo, a referência [90].

obtido pela integração das forças de van der Waals entre os átomos (moléculas) desses corpos, desde que se leve em consideração os efeitos de retardamento e a não-aditividade das forças de van der Waals.

As forças de Casimir em geral são muito pequenas. Para se ter uma idéia quantitativa, a força por unidade de área entre duas placas condutoras separadas por uma distância a , calculada por Casimir em 1948, é dada por [1]:

$$\frac{F(a)}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \approx -0,013 \frac{1}{(a/\mu\text{m})^4} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}, \quad (3.1)$$

onde L^2 corresponde à área de cada placa. Para $a = 1\mu\text{m}$, por exemplo, a pressão de Casimir é aproximadamente 10^{-8} vezes a pressão atmosférica. Muito embora sejam diminutas tais forças, elas podem ser medidas experimentalmente. O primeiro experimento realizado com o intuito de verificar a existência do efeito Casimir foi feito por M. J. Sparnaay em 1958 [13]. No entanto, ele pôde apenas afirmar que seus resultados experimentais eram compatíveis com a previsão teórica feita por Casimir. Quatro décadas se passaram até que novos experimentos fossem realizados diretamente com metais (não necessariamente com duas placas paralelas), mas dessa vez com uma acurácia muito maior [14]. A boa precisão experimental obtida por técnicas modernas — a maior parte dos experimentos recentes foi feita utilizando-se microscópios de força atômica — exigiu que a comparação entre os experimentos e a teoria fosse feita com fórmulas teóricas que já levassem em consideração efeitos de temperatura, da rugosidade dos materiais envolvidos e da condutividade finita dos metais. Portanto, podemos afirmar hoje em dia que o efeito Casimir existe, ou seja, está muito bem confirmado experimentalmente e trata-se, sem dúvida, de um dos efeitos macroscópicos mais espetaculares com origem na teoria quântica de campos³.

Até 1960, aproximadamente, o efeito Casimir e tópicos relacionados a esse efeito, como as forças de van der Waals, eram estudados por um pequeno grupo de pesquisadores, basicamente na Holanda e na extinta União Soviética. No entanto, nas décadas seguintes, o efeito Casimir se tornou um campo de pesquisa bastante ativo. A razão para isso reside, em

³Para uma introdução ao efeito Casimir, sugerimos as referências [18, 93], além, é claro, do artigo original de Casimir[1] (uma tradução desse artigo para o português pode ser encontrada na Ref. [19]). Para discussões mais elaboradas e detalhadas, sugerimos as Refs. [5, 15, 16, 17]. Há ainda livros que, embora dedicados a temas mais gerais, contêm uma boa discussão do efeito Casimir [94, 95].

parte, no fato de que o efeito Casimir, entendido como uma alteração da energia do vácuo de um campo quântico devido à imposição de condições de contorno, não é uma peculiaridade exibida apenas pelo campo eletromagnético. Qualquer campo relativístico, bosônico ou fermiônico, definido em uma variedade com topologia não-trivial terá, em princípio, sua densidade de energia no estado de vácuo modificada. Ou seja, a energia de ponto zero tanto de um campo escalar quanto de um campo fermiônico é alterada quando tais campos são submetidos a condições de contorno. Isso ampliou bastante o leque de possíveis aplicações desse efeito. Uma das mais notáveis surgiu nos anos 70, a saber, o chamado modelo de sacola (“bag model”) do MIT [6], no qual os hádrons são concebidos como sacolas contendo quarks e glúons. O confinamento destas partículas dá origem então a uma energia de Casimir que é responsável por até 9% da massa do hádron. Nesse contexto, o efeito Casimir fermiônico foi calculado pela primeira vez por K. Johnson em 1975 (veja a primeira referência em [6]). Vale citar ainda que nos anos 1970 a energia do vácuo quântico passou a ser estudada também em cosmologia.

O efeito Casimir na sua forma genérica se tornou, portanto, uma área de pesquisa extremamente ativa nos dias de hoje. Isso se deve, em grande parte, ao seu caráter interdisciplinar, uma vez que esse efeito é relevante não apenas em eletrodinâmica quântica, mas também na teoria quântica de campos em geral, na física da matéria condensada, na física atômica e molecular, na gravitação e cosmologia, na física matemática e, por que não dizer, na nanotecnologia, na construção de dispositivos microeletromecânicos. Na teoria quântica de campos, as principais aplicações desse efeito são: (i) no modelo de sacola do MIT, já mencionado anteriormente; (ii) em teorias de Kaluza-Klein, nas quais o efeito Casimir proporciona um dos mecanismos mais promissores para explicar a compactificação espontânea das dimensões espaciais extras, e (iii) na possibilidade de impor restrições mais fortes sobre os parâmetros de interações de longo alcance ou na existência de partículas elementares leves previstas por teorias de calibre unificadas, pela supersimetria, supergravidade e teoria de cordas. Já na matéria condensada, o efeito Casimir leva à existência de forças entre fronteiras materiais muito próximas entre si, e é responsável por algumas propriedades de filmes finos, devendo ser levado em consideração em cálculos de tensão superficial e calor latente. Na cosmologia, esse efeito pode ter sido relevante no processo de inflação do Universo. Na física matemática, os cálculos de energias de Casimir têm estimulado o desenvolvimento de

novas técnicas de regularização e renormalização, como por exemplo o método da função zeta generalizada. (Para maiores detalhes e referências mais específicas sobre todas essas aplicações, veja a Ref. [17].)

Concluimos esta seção comentando sobre um último tema de pesquisa sobre o efeito Casimir, e que corresponde justamente à parte principal deste capítulo, a saber: o cálculo de suas primeiras correções radiativas. Em comparação com o que já foi feito para o caso de campos não interagentes, o número de trabalhos que consideram o efeito Casimir em campos com interação é extremamente reduzido, como veremos. No caso da eletrodinâmica quântica, a primeira correção radiativa ao efeito já foi discutida [17, 20], e se revelou muito pequena. Os experimentos atuais ainda não possuem precisão suficiente para detectá-la. Apesar disso, esse é um cálculo de grande importância do ponto vista teórico, pois permite, num contexto mais simples, examinar as dificuldades que se interpõem à renormalização de modelos de teoria de campos definidos em espaços-tempos curvos ou com fronteiras, e que por esse motivo não exibem invariância de Poincaré. Neste capítulo obteremos resultados apenas para as correções radiativas de um campo escalar com massa com auto-interação quártica (o modelo $\lambda\phi^4$).

3.2 O Efeito Casimir Eletromagnético

Nesta seção apresentamos explicitamente o cálculo da energia de Casimir para o campo eletromagnético na presença de duas placas neutras, paralelas e perfeitamente condutoras — a configuração investigada originalmente por Casimir [1]. Nosso procedimento será análogo ao das referências [1, 38]. O cálculo a ser apresentado tem relevância não apenas histórica, mas será útil para estabelecer notações e introduzir alguns conceitos fundamentais, tais como as idéias de regularização e renormalização no contexto do efeito Casimir.

Por conveniência, vamos escolher os eixos cartesianos de modo que uma das placas esteja localizada em $z = 0$ e a outra em $z = a$. As condições de contorno impostas por esta configuração de placas sobre o campo eletromagnético são dadas por

$$\begin{cases} \hat{z} \times \vec{E}(t, x, y, 0) = \vec{0} \\ \hat{z} \cdot \vec{B}(t, x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z} \times \vec{E}(t, x, y, a) = \vec{0} \\ \hat{z} \cdot \vec{B}(t, x, y, a) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Tais condições restringem as frequências dos modos do campo eletromagnético a:

$$\omega_{\vec{k}} = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

sendo que para $n = 0$ só existe um estado de polarização para o campo. Desse modo, a energia do campo no estado de vácuo, contida na região entre as placas, é dada formalmente por:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \\ &= \frac{\hbar c}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[|\vec{k}_{\parallel}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\vec{k}_{\parallel} := k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$, L^2 é a área de cada placa, e σ denota o estado de polarização do campo.

Como a energia de Casimir é definida como a variação da energia do campo no estado de vácuo devido à imposição de condições de contorno, devemos subtrair da expressão (3.4) a energia do campo na região entre as placas, porém sem a presença das mesmas ⁴, dada por

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar c}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} a \frac{dk_z}{2\pi} 2\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2} \\ &= \frac{\hbar c}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn 2\sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

na qual fizemos a transformação de variável $n := ak_z/\pi$. Sendo assim, a energia de Casimir por unidade de área é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(a) &= \frac{E - E_0}{L^2} \\ &= \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \left[\frac{k_{\parallel}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta expressão ainda carece de significado físico, uma vez que se trata da subtração de duas quantidades divergentes. Devemos então adotar um procedimento de regularização a fim de

⁴Na verdade, deveríamos ter considerado também as contribuições das regiões exteriores às placas. No entanto, como as frequências dos modos do campo não se alteram nestas regiões com a presença das placas, tais contribuições se cancelam no processo de subtração.

extrair um resultado finito e dotado de interpretação física. Como para altas frequências as placas se tornam transparentes para os modos do campo, é natural introduzir uma função de corte que elimine os modos de alta frequência, eliminando assim a divergência ultravioleta na equação (3.6). Procedendo dessa maneira, obtemos:

$$\mathcal{E}(a) = \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3} \int_0^\infty du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u}\right) + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right) - \int_0^\infty dn \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right) \right], \quad (3.7)$$

onde fizemos a transformação de variável $u = a^2 k_{\parallel}^2 / \pi^2$ e introduzimos a função de corte f . Esta função deve ser tal que $f(k_{\parallel}) = 1$ para $k_{\parallel} \ll k_m$ e $f(k_{\parallel}) = 0$ para $k_{\parallel} \gg k_m$, onde k_m é da ordem do inverso do raio atômico. Em lugar de apresentarmos a função f explicitamente, vamos somente impor que ela ainda satisfaça as seguintes propriedades: (i) $f(0) = 1$, e (ii) todas as suas derivadas se anulam na origem.

Definindo a nova função

$$F(n) := \int_0^\infty du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right), \quad (3.8)$$

a equação (3.7) pode ser escrita como

$$\mathcal{E}(a) = \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^\infty dn F(n) \right]. \quad (3.9)$$

É conveniente, neste momento, utilizarmos a fórmula de Euler-MacLaurin, dada por

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^\infty dn F(n) = -\frac{B_2}{2!} F'(0) - \frac{B_4}{4!} F'''(0) + \dots, \quad (3.10)$$

onde os números de Bernoulli B_n são definidos por por meio da série de Taylor da função $g(y) = y/(e^y - 1)$:

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{m=0}^\infty B_m \frac{y^m}{m!} \quad (|y| < 2\pi). \quad (3.11)$$

A fim de calcular as derivadas de F , reescrevemos esta função numa forma mais adequada:

$$F(n) = \int_{n^2}^\infty du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{a}\right). \quad (3.12)$$

Desse modo, temos

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{n\pi}{a}\right). \quad (3.13)$$

Utilizando então as propriedades da função f , é simples mostrar que $F'(0) = 0$, $F'''(0) = -4$, e que todas as outras derivadas de ordem superior são nulas na origem. Conseqüentemente, a energia de Casimir por unidade de área é dada por

$$\mathcal{E}(a) = \frac{\hbar c \pi^2 B_4}{a^3 4!} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}, \quad (3.14)$$

onde usamos o fato de que $B_4 = -1/30$. Podemos agora calcular a pressão sobre as placas utilizando a relação

$$\frac{F}{L^2} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}, \quad (3.15)$$

chegando assim ao resultado obtido por Casimir em 1948, dado pela equação (3.1).

Poderíamos ter calculado a pressão de Casimir utilizando outros métodos de regularização. Vale enfatizar, contudo, que um resultado físico não deve depender do procedimento de regularização adotado. Cálculos explícitos com outros métodos podem ser encontrados na referência [17], e reproduzem o resultado (3.14).

3.3 Método Funcional para o Campo Escalar Livre

Nesta seção, vamos reobter o resultado já conhecido para a energia de Casimir de um campo escalar com massa sujeito a condições de contorno de Dirichlet em dois planos paralelos entre si. Em princípio, esse resultado pode ser obtido por um procedimento totalmente análogo ao da seção anterior. No entanto, vamos utilizar aqui um método funcional, introduzido por Bordag *et al.* (veja a primeira referência em [20]), mas ainda não empregado no problema que vamos abordar. Além disso, utilizaremos essa mesma técnica no cálculo da primeira correção radiativa à energia de Casimir no modelo $\lambda\phi^4$ sem massa, a ser apresentado na próxima seção.

O funcional gerador de funções de Green de um campo escalar livre ϕ , de massa m , é dado por

$$W[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + J(x)\phi(x)] \right\} \quad (3.16)$$

onde N é um fator de normalização, escolhido de tal forma que $W[0] = 1$, e \mathcal{L} é a densidade lagrangiana da teoria ⁵,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (3.17)$$

A energia desse campo, no estado de vácuo, pode ser obtida por meio da integração, em todo o espaço, do valor esperado no vácuo da componente 00 do tensor de energia-momento:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3 \vec{x} \langle T^{00}(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow x} \int d^3 \vec{x} \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\mu} + m^2 \right) \langle T(\phi(x)\phi(y)) \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde usamos regularização por separação de pontos.

As condições de contorno impostas sobre o campo escalar são dadas por

$$\phi(t, \vec{x}_\parallel, x^3 = 0) = 0, \quad \phi(t, \vec{x}_\parallel, x^3 = a) = 0, \quad (3.19)$$

onde $\vec{x}_\parallel = (x^1, x^2)$. Daqui em diante chamaremos estas condições de Dirichlet-Dirichlet, ou de forma abreviada, de condições DD.

Vamos então obter o funcional gerador $W_{DD}[J]$ do campo escalar submetido às condições de contorno (3.19). Com esse objetivo, note que a integral funcional (3.16) do campo livre (sem condições de contorno) é efetuada considerando todas as configurações de campo ϕ . Para a situação em que estamos interessados, temos de restringir essa integração somente sobre as configurações de campo que satisfaçam a condição de contorno que estamos considerando, ou seja, devemos fazer a integral somente sobre os campos ϕ que satisfaçam a condição (3.19):

$$W_{DD}[J] = N \int \mathcal{D}\phi|_{DD} \exp \left\{ i \int d^4 x [\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + J(x)\phi(x)] \right\}. \quad (3.20)$$

A restrição às funções ϕ em (3.20) pode ser efetuada por meio da inserção de funcionais delta

$$W_{DD}[J] = N \int \mathcal{D}\phi \delta[\phi|_{x^3=0}] \delta[\phi|_{x^3=a}] \exp \left\{ i \int d^4 x [\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)] \right\}. \quad (3.21)$$

⁵Convenções: $\hbar = c = 1$, $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$; índices gregos variam de 0 a 3, e subentende-se uma soma quando houver índices repetidos: $x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$.

Esses funcionais delta, por definição, vão fazer com que sejam nulas as contribuições para a integral oriundas de configurações de campo que não satisfaçam as condições de contorno (3.19). A representação integral para cada um desses funcionais é dada por

$$\delta[\phi|_{x^3=a_k}] = \int \mathcal{D}B^k \exp\left(i \int d^4x \delta(x^3 - a_k) B^k(x_{\parallel}) \phi(x)\right) , \quad k = 1, 2 , \quad (3.22)$$

onde $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $x_{\parallel} = (x^0, x^1, x^2, 0)$ e $B^k(x_{\parallel})$ é um campo auxiliar cujo domínio é o plano $x^3 = a_k$. Note que não existe soma em k no lado direito de (3.22).

Substituindo a expressão (3.22) na equação (3.21), obtemos:

$$W_{DD}[J] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B^1 \mathcal{D}B^2 \exp\left\{i \int d^4x [\delta(x^3 - a_k) B^k(x_{\parallel}) \phi(x) + \mathcal{L}(x) + J(x) \phi(x)]\right\} , \quad (3.23)$$

onde está implícita uma soma no índice k .

A expressão (3.23) tem uma interpretação interessante: o integrando na primeira exponencial pode ser visto como uma densidade lagrangiana $\mathcal{L}_S(x) = \delta(x^3 - a_k) B^k(x_{\parallel}) \phi(x)$ que simula a presença das superfícies $x^3 = a_k$ ($k = 1, 2$) onde o campo se anula.

A fim de escrever a integral (3.23) em uma forma gaussiana, fazemos a seguinte translação no campo ϕ :

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) - \int d^4y \delta(y^3 - a_k) B^k(y_{\parallel}) D(x - y) , \quad (3.24)$$

onde $D(x - y)$ é o propagador do campo livre, que satisfaz a equação

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) D(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y). \quad (3.25)$$

Tendo em vista que o jacobiano de uma translação é igual à unidade, após a transformação (3.24) o funcional (3.23) toma a forma

$$\begin{aligned} W_{DD}[J] = & N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B^1 \mathcal{D}B^2 \exp\left\{i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi(x) (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \phi(x) + J(x) \phi(x)\right]\right\} \\ & \times \exp\left\{-i \int \int d^4x d^4y \left[\frac{1}{2} B^k(x_{\parallel}) \delta(x^3 - a_k) D(x - y) \delta(y^3 - a_l) B^l(y_{\parallel}) \right. \right. \\ & \left. \left. + J(x) D(x - y) \delta(y^3 - a_k) B^k(y_{\parallel})\right]\right\} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde temos somas implícitas em k e l .

Note que o funcional acima foi separado em duas integrais gaussianas, uma no campo ϕ , e outra nos campos B^k . A integral em ϕ fornece o conhecido funcional gerador do campo escalar,

$$W[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y) \right\}, \quad (3.27)$$

enquanto a integral em B^k fornece (veja Apêndice E)

$$\bar{W}_{DD}[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) \bar{D}(x, y) J(y) \right\}, \quad (3.28)$$

onde definimos

$$\bar{D}(x-y) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{L(k_{\parallel})} \Lambda(k_{\parallel}, x^3, y^3) e^{-ik_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}, \quad (3.29)$$

$$\Lambda(k_{\parallel}, x^3, y^3) = \text{tr} \left[R^{(DD)}(k_{\parallel}, x^3, y^3) \frac{h^{-1}(k_{\parallel})}{i} \right], \quad (3.30)$$

$$R_{kl}^{(DD)}(k_{\parallel}, x^3, y^3) = \exp \{ iL(k_{\parallel}) (|x^3 - a_k| + |y^3 - a_l|) \}, \quad (3.31)$$

$$L(k_{\parallel}) = \sqrt{k_{\parallel}^2 - m^2} = \sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - m^2}, \quad (3.32)$$

$$(h^{-1})_{kl}(k_{\parallel}) = \frac{i}{2 \text{sen}(La)} [(e^{-iLa} + 1) \delta_{kl} - 1], \quad (3.33)$$

e usamos a notação na qual $k_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) = \sum_{\mu=0}^2 k^{\mu}(x_{\mu} - y_{\mu})$.

Com o auxílio dos resultados (3.27) e (3.28), podemos escrever a equação (3.26) como

$$W_{DD}[J] = W[J] \bar{W}_{DD}[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) [D(x-y) + \bar{D}(x, y)] J(y) \right\}. \quad (3.34)$$

Note que este funcional gerador tem a mesma estrutura que o funcional para o caso em que o campo não está submetido a condições de contorno, dado pela equação (3.27). No entanto, ao invés do propagador $D(x-y)$, temos agora a soma $D(x-y) + \bar{D}(x, y)$. Portanto, podemos desenvolver toda a teoria quântica para o campo escalar sob as condições DD em estreita analogia com o caso do campo livre.

De posse do funcional (3.34), obtemos diretamente o produto de tempo ordenado do campo $\phi(x)$ sob condições DD:

$$\langle T\phi(x)\phi(y) \rangle^{(DD)} = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 W_{DD}[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} = i [D(x-y) + \bar{D}(x,y)] . \quad (3.35)$$

Para o cálculo da energia de Casimir, utilizamos a expressão acima e a equação (3.18):

$$E = \frac{i}{2} \lim_{y \rightarrow x} \int d^3 \vec{x} \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\mu} + m^2 \right) [D(x-y) + \bar{D}(x,y)] . \quad (3.36)$$

A integral que envolve o propagador do campo livre $D(x-y)$ fornece um resultado independente da distância a , que nada mais é do que a energia do campo livre no estado de vácuo. Como já dito, esta quantidade infinita não nos interessa e será eliminada.

Utilizando a representação de Fourier para $\bar{D}(x,y)$, a equação (3.29), e tomando o limite $y \rightarrow x$ ao longo do eixo x^3 , a equação (3.36) se torna

$$E = -\frac{i}{2} A \lim_{y^3 \rightarrow x^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx^3 \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2L} \left[(k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + m^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial y^3} \right] \Lambda(k_{\parallel}, x^3, y^3) , \quad (3.37)$$

onde A representa a área das superfícies onde o campo se anula.

Usando a definição de Λ , dada por (3.30), tomando o limite $y^3 \rightarrow x^3$, e integrando em x^3 , obtemos

$$E = -\frac{i}{2} A \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2L} \left\{ \left[\left(\frac{i}{L} + a \right) \frac{2}{i} - a \frac{e^{-iLa}}{\text{sen}(La)} \right] [(k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + m^2] \right. \\ \left. - L^2 \left[\left(\frac{i}{L} - a \right) \frac{2}{i} + a \frac{e^{-iLa}}{\text{sen}(La)} \right] \right\} . \quad (3.38)$$

Esta integral fornece uma parte divergente, independente de a e proporcional à área A , que é interpretada como a auto-energia das placas, e pode ser eliminada. Com isto, e usando a definição de L , dada por (3.32), escrevemos, após algumas manipulações algébricas, a energia de Casimir por unidade de área como

$$\mathcal{E}(a) = \frac{E}{A} = -a \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{L} \frac{e^{iLa}}{e^{iLa} - e^{-iLa}} (k^0)^2 . \quad (3.39)$$

Para efetuarmos essa integral, fazemos uma rotação de Wick:

$$k^0 \rightarrow ip^0, \quad k^1 \rightarrow p^1, \quad k^2 \rightarrow p^2 , \quad (3.40)$$

que implica

$$d^3 k_{\parallel} \rightarrow i d^3 p, \quad L \rightarrow i \sqrt{r^2 + m^2}, \quad (3.41)$$

onde definimos a quantidade $r = \sqrt{(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2}$. Substituindo esses resultados na integral (3.39), passando para coordenadas esféricas e integrando a parte angular, obtemos

$$\mathcal{E}(a) = -\frac{2}{3} \frac{a}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dr \frac{r^4}{\sqrt{r^2 + m^2}} \frac{\exp(-a\sqrt{r^2 + m^2})}{\exp(a\sqrt{r^2 + m^2}) - \exp(-a\sqrt{r^2 + m^2})}. \quad (3.42)$$

Mudando a variável de integração de r para $x = \sqrt{r^2 + m^2}/m$, chegamos a

$$\mathcal{E}(a) = -\frac{2}{3} \frac{am^4}{(2\pi)^2} \int_1^\infty dx (x^2 - 1)^{3/2} \frac{e^{-xma}}{e^{xma} - e^{-xma}}. \quad (3.43)$$

A razão envolvendo as exponenciais acima pode ser escrita como

$$\frac{e^{-xma}}{e^{xma} - e^{-xma}} = \sum_{n=1}^\infty e^{-2xman}, \quad (3.44)$$

o que fornece para a integral (3.43) a expressão

$$\mathcal{E}(a) = -\frac{2}{3} \frac{1}{(2\pi)^2} am^4 \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty dx (x^2 - 1)^{3/2} e^{-2xman}. \quad (3.45)$$

Utilizando a representação para a função de Bessel modificada $K_\nu(z)$ [96],

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu - 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty dx (x^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-zx}, \quad (3.46)$$

obtemos, finalmente, a energia de Casimir por unidade de área para o problema em questão:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{a} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} K_2(2man), \quad (3.47)$$

em pleno acordo com os resultados da literatura [15].

Como último comentário, gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que, embora tenhamos calculado apenas a energia de Casimir do campo sob condições DD, poderíamos também ter calculado qualquer outra quantidade referente a este campo sob estas condições, como por exemplo, funções de Green mais genéricas, uma vez que estabelecemos o funcional gerador da teoria sob condições DD.

3.4 Correções Radiativas ao Efeito Casimir

Nesta seção, calcularemos explicitamente as primeiras correções radiativas ao efeito Casimir de um campo escalar com auto-interação $\lambda\phi^4$. Iniciaremos com o cálculo para um campo de massa nula sob condições DD. Em seguida, abordaremos o problema mais complexo de um campo escalar massivo, incluindo, nesse caso, outras condições de contorno.

A interação de um campo quantizado, mesmo em seu estado de vácuo, com placas materiais já é extremamente complicada, motivo pelo qual simulamos tal interação impondo condições de contorno bastante idealizadas. Como consequência, mesmo quando tratamos um campo não interagente, mas sujeito a condições de contorno, encontramos um deslocamento da energia do vácuo de tal campo, como já mencionado em seções anteriores. Portanto, surgem forças entre corpos macroscópicos colocados no vácuo, referidas muitas vezes como forças de Casimir. Note que, nesta aproximação (campos não interagentes), nenhuma constante de acoplamento aparece na expressão da força, apenas constantes universais como \hbar , c e obviamente parâmetros geométricos característicos do sistema em estudo.

No entanto, os campos da Natureza são interagentes e o efeito Casimir deve ser calculado, em princípio, para tais campos em todas as ordens. Como essa é uma tarefa extremamente difícil, recorre-se à teoria de perturbação e calcula-se, por exemplo, a correção em primeira ordem na constante de acoplamento ao efeito Casimir. Apesar de existir uma vasta literatura sobre efeito Casimir, é surpreendente que não se tenha considerado, com maior frequência, campos em interação no estudo de tal efeito. No caso da EDQ, a primeira correção radiativa já foi discutida [20, 17], e se revelou muito pequena. O caso de campos escalares também foi discutido na literatura [21, 23, 24, 25, 97, 98, 99, 100].

Os experimentos atuais ainda não têm precisão suficiente para poder detectar correções radiativas às forças de Casimir. Apesar disso, esse é um cálculo de grande importância do ponto vista teórico, pois permite, num contexto mais simples, examinar as dificuldades — e eventualmente tentar saná-las — que se interpõem à renormalização de modelos de teoria de campos definidos em espaços-tempos curvos ou com fronteiras, e que por esse motivo não exibem invariância de Poincaré.

Um fato interessante a respeito do efeito Casimir é que a um laço (ordem zero em λ) ele depende somente das frequências do campo, e não dos seus modos. Em outras palavras, em

ordem zero na constante de acoplamento a energia de Casimir pode ser escrita simplesmente como a energia de ponto zero do campo, devidamente regularizada e renormalizada. Uma consequência imediata desse fato é que, nessa ordem, a energia de Casimir de um campo escalar sujeito a condições de Dirichlet é exatamente igual àquela calculada com condições de Neumann. No entanto, em ordens mais altas na constante de acoplamento, era de se esperar que essa igualdade deixasse de existir. Surpreendentemente, isso não acontece para o caso de um campo escalar sem massa, pelo menos em primeira ordem na constante de acoplamento [24].

Até o momento, não havia nenhum cálculo na literatura para o campo escalar com massa com auto-interação $\lambda\phi^4$ e não se sabia, portanto, se esta igualdade permanecia válida ainda para o caso de um campo com massa. Nesta seção, mostraremos explicitamente que tal igualdade deixa de ser válida em tal caso [99].

3.4.1 Campo Escalar sem Massa

Nesta subseção apresentaremos o cálculo da primeira correção radiativa à energia de Casimir, para o caso de um campo escalar sem massa, com auto-interação descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\mathcal{L}_I} + \mathcal{L}_{ct} , \quad (3.48)$$

onde \mathcal{L}_{ct} contém os contratermos de renormalização. Por conveniência, vamos considerar inicialmente que o campo ϕ tenha massa e, no momento oportuno, vamos tomá-la como sendo nula.

É um resultado bem estabelecido da TQC que a energia do campo escalar pode ser obtida pela expressão [30, 101]

$$E = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{i}{T} \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int d^3 \vec{x} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \right] \right\} , \quad (3.49)$$

onde, a fim de garantir a convergência da integral funcional, acrescenta-se uma parte imaginária negativa à massa, $m \rightarrow m - i\epsilon$.

Se quisermos trabalhar com o campo escalar submetido às condições de contorno (3.19), devemos considerar na integral funcional acima somente os campos que satisfaçam tais con-

dições, ou seja

$$E = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{i}{T} \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi|_{DD} \exp \left[i \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \right] \right\}. \quad (3.50)$$

Como veremos a seguir, em primeira ordem em teoria de perturbação, somente a massa é renormalizada, por isso só vamos precisar do contratermo de massa em \mathcal{L}_{ct} :

$$\mathcal{L}_{ct} = -\frac{\delta m^2}{2} \phi^2. \quad (3.51)$$

Como usualmente é feito em teoria de perturbação na TQC, sendo \mathcal{L}_I e \mathcal{L}_{ct} dependentes somente dos campos ϕ , podemos reescrever a equação(3.50) como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{T} \ln \left\{ \exp \left[i \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int d^3\vec{x} \left(\mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) + \mathcal{L}_{ct} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right) \right] W_{DD}[J]|_{J=0} \right\}, \quad (3.52)$$

onde

$$W_{DD}[T, J] = \int \mathcal{D}\phi|_{DD} \exp \left(i \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int d^3\vec{x} [\mathcal{L}_0(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + J(x)\phi(x)] \right) \quad (3.53)$$

é o funcional gerador de funções de Green a tempo finito da teoria livre (isto é, sem interação), mas satisfazendo as condições de contorno DD nos planos $x^3 = 0$ e $x^3 = a$.

Expandindo a exponencial que envolve \mathcal{L}_I e \mathcal{L}_{ct} em (3.52) até primeira ordem em λ e δm^2 , obtemos

$$E = E^0 + E^1, \quad (3.54)$$

onde o primeiro termo,

$$E^0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{T} \ln W_{DD}[T, 0], \quad (3.55)$$

fornece a energia de Casimir em ordem λ^0 (veja a equação (3.47)), e o segundo termo,

$$E^1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{T W_{DD}[T, 0]} \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int d^3\vec{x} \left[\mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) + \mathcal{L}_{ct} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right] W_{DD}[T, J]|_{J=0}, \quad (3.56)$$

fornece a primeira correção radiativa à energia de Casimir.

Note que, a menos de uma constante de normalização, $W_{DD}[T \rightarrow \infty, J]$ coincide com o funcional gerador $W_{DD}[J]$ definido na Seção 3.3 pela equação (3.20). Assim, utilizando a

expressão (3.34) para $W_{DD}[J]$ e as expressões explícitas de \mathcal{L}_I e \mathcal{L}_{ct} , definidas em (3.48) e (3.51), obtemos os seguintes resultados:

$$W_{DD}[0]^{-1} \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) W_{DD}[J]|_{J=0} = -\frac{\lambda}{4!} 3 \left(\frac{1}{i} \right)^2 [D(0) + \bar{D}(x, x)]^2, \quad (3.57)$$

$$W_{DD}[0]^{-1} \mathcal{L}_{ct} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) W_{DD}[J]|_{J=0} = -\frac{\delta m^2}{2} i [D(0) + \bar{D}(x, x)]. \quad (3.58)$$

Levando estes resultados em (3.56), tendo em mente que $D(0)$ não depende de x e que $\bar{D}(x, x)$ só depende da terceira coordenada espacial x^3 , obtemos

$$E^1 = A \int dx^3 \left(-\frac{\lambda}{8} [D(0) + \bar{D}(x, x)]^2 + i \frac{\delta m^2}{2} [D(0) + \bar{D}(x, x)] \right), \quad (3.59)$$

onde $A = \int d^2 \vec{x}_{\parallel}$ é a área das placas onde o campo se anula.

A correção à energia de Casimir por unidade de área, em ordem λ^1 , é então dada por

$$\mathcal{E}^1(a) = - \int dx^3 \left(\frac{\lambda}{8} D(0) - i \frac{\delta m^2}{2} \right) D(0) - \int dx^3 \left(\frac{\lambda}{4} D(0) - i \frac{\delta m^2}{2} \right) \bar{D}(x, x) - \frac{\lambda}{8} \int dx^3 \bar{D}^2(x, x). \quad (3.60)$$

O primeiro termo no lado direito da equação (3.60) fornece uma contribuição para a energia proporcional ao volume espacial $A \int dx^3$, e nada mais é do que a correção à energia do campo, no estado de vácuo, mas sem a consideração das condições de contorno, podendo, portanto, ser descartada.

O fator de renormalização de massa δm^2 , que aparece no segundo termo no lado direito da equação (3.60), é fixado impondo-se que a auto-energia do campo seja finita. Em primeira ordem na constante de acoplamento, ela é dada por

$$\Sigma(x, x) = \frac{i\lambda}{2} [D(0) + \bar{D}(x, x)] + \delta m^2. \quad (3.61)$$

Para eliminar a parte divergente que aparece na expressão (3.61) devemos escolher δm^2 de tal forma que

$$\frac{i\lambda}{2} D(0) + \delta m^2 = \mu^2 < \infty. \quad (3.62)$$

Levando este resultado em (3.61), tomando o limite $a \rightarrow \infty$ e usando o fato de que nesse limite $\bar{D}(x, x) \rightarrow 0$ longe das placas, obtemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Sigma(x, x) = \mu^2. \quad (3.63)$$

A constante μ^2 pode ser fixada impondo-se ainda que $\Sigma \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow \infty$. Com essa condição, obtemos um valor nulo para a constante μ^2 . Conseqüentemente, o contratermo de massa em (3.62) é dado por

$$\delta m^2 = -\frac{i\lambda}{2}D(0) , \quad (3.64)$$

fazendo com que o segundo termo do lado direito da equação (3.60) seja nulo. Assim, a energia de Casimir por unidade de área, devidamente renormalizada ⁶, é dada por

$$\mathcal{E}^1(a) = -\frac{\lambda}{8} \int dx^3 \bar{D}^2(x, x) . \quad (3.65)$$

Com o auxílio da representação de Fourier de $\bar{D}(x, y)$, dada pela equação (3.29), temos

$$\mathcal{E}^1(a) = -\frac{\lambda}{32} \int dx^3 [I(x^3, a)]^2 , \quad (3.66)$$

onde definimos a integral

$$I(x^3, a) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{1}{L(k_{\parallel})} \text{tr} \left[R^{(DD)}(k_{\parallel}, x^3, x^3) \frac{h^{-1}(k_{\parallel})}{i} \right] . \quad (3.67)$$

Utilizando as definições (3.30)–(3.33), podemos calcular explicitamente o traço acima, obtendo

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[R^{(DD)}(k_{\parallel}, x^3, x^3) \frac{h^{-1}(k_{\parallel})}{i} \right] \\ &= \frac{1}{2 \text{sen}(La)} \left[e^{-iLa} \left(e^{2iL|x^3-a_1|} + e^{2iL|x^3-a_2|} \right) - 2e^{iL(|x^3-a_1|+|x^3-a_2|)} \right] . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Substituindo esse resultado na integral (3.67) e fazendo uma rotação de Wick, descrita em (3.40), obtemos

$$I(x^3, a) = -i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2l \text{sh}(la)} \left[e^{la} \left(e^{-2l|x^3-a_1|} + e^{-2l|x^3-a_2|} \right) - 2e^{-l(|x^3-a_1|+|x^3-a_2|)} \right] , \quad (3.69)$$

onde definimos $l := \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Daqui para a frente, vamos nos restringir ao caso de massa nula, $m = 0$. Tomando $a_1 = 0$ e $a_2 = a$, passando para coordenadas esféricas, e integrando no ângulo sólido, escrevemos a integral (3.69) como

⁶Na verdade, como veremos a seguir, é necessário fazer ainda uma renormalização aditiva na expressão (3.65)

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p dp}{2 \operatorname{sh}(pa)} \left[e^{pa} \left(e^{-2p|x^3|} + e^{-2p|x^3-a|} \right) - 2e^{-p(|x^3|+|x^3-a|)} \right]. \quad (3.70)$$

Devido à presença dos módulos na integral acima, temos de considerar três possibilidades separadamente:

1. Região com $x^3 < 0$:

Para tal situação, a equação (3.70) é escrita na forma

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p dp \frac{e^{2px^3}}{2 \operatorname{sh}(pa)} \left[e^{pa} (1 + e^{-2pa}) - 2e^{-pa} \right]. \quad (3.71)$$

Fazendo ainda algumas manipulações algébricas no integrando e efetuando a integração, obtemos

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p e^{-2p|x^3|} = -i \frac{1}{2^3 \pi^2} \frac{1}{(x^3)^2}. \quad (3.72)$$

2. Região com $x^3 > a$:

Neste caso, a equação (3.70) se torna

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p dp \frac{e^{-2p(x^3-a)}}{2 \operatorname{sh}(pa)} \left[e^{pa} (e^{-2pa} + 1) - 2e^{-pa} \right] \quad (3.73)$$

e, de forma análoga ao caso anterior, obtemos

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p e^{-2p|x^3-a|} = -i \frac{1}{2^3 \pi^2} \frac{1}{(x^3 - a)^2}. \quad (3.74)$$

3. Região com $0 < x^3 < a$:

Para esta região, a equação (3.70), após algumas manipulações algébricas, toma a forma

$$I(x^3, a) = -i \frac{1}{2\pi^2} \int p dp \frac{e^{-pa}}{2 \operatorname{sh}(pa)} \left(e^{-2p(x^3-a)} + e^{2px^3} - 2 \right). \quad (3.75)$$

Note que $1/\operatorname{sh}(pa)$ pode ser escrita em termos de uma série, a saber,

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(pa)} = \frac{2}{e^{pa} - e^{-pa}} = 2e^{-pa} \frac{1}{1 - e^{-2pa}} = 2e^{-pa} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2pan}. \quad (3.76)$$

Dessa forma, a integral (3.75) é dada por

$$\begin{aligned}
I(x^3, a) &= -i \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp p e^{-2pa(n+1)} \left(e^{-2p(x^3-a)} + e^{2px^3} - 2 \right) \\
&= -i \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} dp p e^{-2p[x^3+(n-1)a]} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} dp p e^{-2p(na-x^3)} - 2 \int_0^{\infty} dp p e^{-2pna} \right], \tag{3.77}
\end{aligned}$$

onde alteramos o índice de soma na segunda linha. Efetuando as integrais, obtemos

$$I(x^3, a) = i \frac{1}{2^3 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(an)^2} - \frac{1}{(x^3 + (n-1)a)^2} - \frac{1}{(x^3 - na)^2} \right]. \tag{3.78}$$

Substituindo os resultados (3.72), (3.74) e (3.78) na equação (3.66), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^1(a) &= \frac{\lambda}{2^{11} \pi^4} \left\{ \int_{-\infty}^0 dx^3 \frac{1}{(x^3)^4} + \int_a^{\infty} dx^3 \frac{1}{(x^3 - a)^4} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^a dx^3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(an)^2} - \frac{1}{(x^3 + (n-1)a)^2} - \frac{1}{(x^3 - na)^2} \right) \right]^2 \right\}. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

As duas primeiras integrais fornecem contribuições divergentes, porém independentes da distância a entre as placas, e portanto podem ser descartadas, pois não contribuem para a força de Casimir. Se pensarmos na energia propriamente dita, $E^1 = \mathcal{E}^1 A$, essas contribuições serão proporcionais à área A das placas, e podem ser interpretadas como sua auto-energia.

A energia de Casimir por unidade de área é dada então por

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{2^{11} \pi^4} \int_0^a dx^3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(an)^2} - \frac{1}{(x^3 + (n-1)a)^2} - \frac{1}{(x^3 - na)^2} \right) \right]^2. \tag{3.80}$$

Note que o somatório pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(na)^2} - \frac{1}{(x^3 + (n-1)a)^2} - \frac{1}{(x^3 - na)^2} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{[(x^3/a) + n]^2} - \frac{1}{[(x^3/a) - (n+1)]^2} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} [2\psi'(1) - \psi'(x^3/a) - \psi'(1 - x^3/a)], \tag{3.81}
\end{aligned}$$

sendo ψ a função digamma [96, 25]. A combinação de derivadas da função digamma que aparece em (3.81) pode ser expressa em termos de funções trigonométricas [25]:

$$2\psi'(1) - \psi'(x^3/a) - \psi'(1 - x^3/a) = -\pi^2 \left[\csc\left(\frac{\pi x^3}{a}\right) - \frac{1}{3} \right]. \quad (3.82)$$

Com isto, reescrevemos a equação (3.80) na forma

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{2^{11}} \frac{1}{a^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{a-\epsilon} dx^3 \left[\csc^2\left(\frac{\pi x^3}{a}\right) - \frac{1}{3} \right]^2, \quad (3.83)$$

onde usamos um fator de regularização ϵ nos limites de integração, de modo a poder identificar eventuais divergências. A integral (3.83) pode ser facilmente resolvida, fornecendo

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{2^{11}} \frac{1}{a^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2a}{3\pi} \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{a}\right) \csc^2\left(\frac{\pi\epsilon}{a}\right) + \frac{1}{9}a - \frac{2}{9}\epsilon \right]. \quad (3.84)$$

Expandindo as funções trigonométricas acima em potências de ϵ , obtemos

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{2^{11}} \frac{1}{a^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2a^4}{3\pi^4} \frac{1}{\epsilon^3} + \frac{a}{9} + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (3.85)$$

O primeiro termo da expressão acima, apesar de divergente, não depende da distância a , e de forma análoga ao que foi dito a respeito das duas primeiras integrais na expressão (3.79), esse termo também está associado à auto-energia das fronteiras, podendo ser desprezado por não ter relevância física. Com estas considerações chegamos, finalmente, à primeira correção radiativa à energia de Casimir por unidade de área para o campo escalar neutro sem massa:

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{2^{11} 3^2} \frac{1}{a^3}. \quad (3.86)$$

Esse resultado coincide com os apresentados na literatura, obtidos por outros métodos [23, 24]. Procedendo da mesma forma, nós calculamos a primeira correção radiativa à energia de Casimir com o campo satisfazendo condições de Neumann nas fronteiras, e chegamos ao mesmo resultado (3.86) para o campo satisfazendo condições de Dirichlet. No entanto, como veremos a seguir, tal igualdade não será mais válida para o caso de um campo com massa.

3.4.2 Campo Escalar com Massa

Nesta subseção vamos calcular a primeira correção radiativa à energia de Casimir para campos com massa em $D = d+1$ dimensões e salientar as principais diferenças em relação ao caso

de campos sem massa, discutido anteriormente. Abordaremos explicitamente três condições de contorno diferentes, a saber:

1. Condições Dirichlet-Dirichlet (DD):

$$\phi(x)|_{x^d=0} = 0, \quad \phi(x)|_{x^d=a} = 0; \quad (3.87)$$

2. Condições Neumann-Neumann (NN):

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^d} \right|_{x^d=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^d} \right|_{x^d=a} = 0; \quad (3.88)$$

3. Condições Dirichlet-Neumann (DN):

$$\phi(x)|_{x^d=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^d} \right|_{x^d=a} = 0. \quad (3.89)$$

Diferentemente do que fizemos até agora, nesta subseção iremos trabalhar na versão euclidiana da teoria de campos. De forma análoga ao que fizemos para obter a equação (3.59), podemos escrever a primeira correção radiativa à energia de Casimir, para as três condições de contorno mencionadas, como

$$\mathcal{E}^1(a) = \int_0^a dx^d \left[\frac{\lambda}{8} G_E^2(x, x) + \frac{\delta m^2}{2} G_E(x, x) \right], \quad (3.90)$$

sendo $G_E(x, x')$ a função de Green euclidiana do campo escalar submetido às condições de contorno apropriadas. Em termos de diagramas de Feynman, a contribuição em ordem λ à energia de Casimir é dada pelos diagramas mostrados na figura 3.1.



Figura 3.1: Diagramas que contribuem para a primeira correção radiativa: (A) contribuição de dois laços, (B) contratermo de massa.

Analogamente ao que foi feito na seção anterior, a integração nas regiões exteriores às fronteiras ($x^d < 0$ e $x^d > 0$) foram descartadas, pois embora estas forneçam resultados

divergentes, eles são independentes da distância a entre as fronteiras (veja a equação (3.79)) e não têm relevância física.

Para cada uma das condições de contorno consideradas, na região do espaço situada entre as fronteiras localizadas em $x^d = 0$ e $x^d = a$, o propagador euclidiano pode ser expresso como

$$G_E(x, x') = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \int \frac{d^{d-1}\vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\omega(\tau-\tau')} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot (\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}'_{\parallel})} \sum_n \frac{\varphi_n(x^d) \varphi_n^*(x'^d)}{\omega^2 + \vec{k}_{\parallel}^2 + m^2 + (k_n^d)^2}, \quad (3.91)$$

onde $\vec{x}_{\parallel} = (x^1, \dots, x^{d-1})$ denota as coordenadas espaciais paralelas às placas, e as autofunções $\varphi_n(x^d)$ e os momentos quantizados k_n^d são dados em cada caso por

$$DD: \quad \varphi_n(x^d) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n^d x^d), \quad k_n^d = \frac{\pi}{a} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.92)$$

$$NN: \quad \varphi_n(x^d) = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{n,0})}{a}} \cos(k_n^d x^d), \quad k_n^d = \frac{\pi}{a} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.93)$$

$$DN: \quad \varphi_n(x^d) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n^d x^d), \quad k_n^d = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.94)$$

Tomando pontos coincidentes, a função de Green é escrita na forma

$$G_E(x, x) = \sum_n \left(\int \frac{d\omega d^{d-1}\vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega^2 + \vec{k}_{\parallel}^2 + \omega_n^2} \right) \varphi_n(x^d) \varphi_n^*(x^d), \quad (3.95)$$

onde definimos

$$\omega_n = \sqrt{m^2 + (k_n^d)^2}. \quad (3.96)$$

A integral em (3.95) diverge para $d \geq 2$, mas pode ser definida por continuação analítica do resultado para $d < 2$. Obtemos, assim [30],

$$G_E(x, x) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n^{d-2} \varphi_n(x^d) \varphi_n^*(x^d). \quad (3.97)$$

Tendo em mente que as funções $\varphi_n(x^d)$ são normalizadas,

$$\int_0^a \varphi_n(x^d) \varphi_n^*(x^d) dx^d = 1, \quad (3.98)$$

podemos escrever

$$\int_0^a dx^d G_E(x, x) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n^{d-2}, \quad (3.99)$$

$$\int_0^a dx^d G_E^2(x, x) = \frac{\Gamma^2(1 - d/2)}{(4\pi)^d} \sum_n \sum_j \omega_n^{d-2} \omega_j^{d-2} \Delta_{j,n}, \quad (3.100)$$

onde definimos

$$\Delta_{j,n} = \int_0^a dx^d \varphi_n(x^d) \varphi_n^*(x^d) \varphi_j(x^d) \varphi_j^*(x^d). \quad (3.101)$$

Com os resultados (3.99) e (3.100) reescrevemos a equação (3.90) como

$$\mathcal{E}^1(a) = \frac{\lambda}{8} \frac{\Gamma^2(1 - d/2)}{(4\pi)^d} \sum_n \sum_j \omega_n^{d-2} \omega_j^{d-2} \Delta_{j,n} + \frac{\delta m^2}{2} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n^{d-2}. \quad (3.102)$$

Vamos neste ponto voltar a atenção para o contratermo de renormalização δm^2 . A função de Green que aparece em (3.90) pode ser expressa na forma

$$G_E(x, x') = G_{E,0}(x, x') + \bar{G}_E(x, x'), \quad (3.103)$$

onde $G_{E,0}(x, x')$ é a função de Green euclidiana para o campo livre (sem condições de contorno), e $\bar{G}_E(x, x')$ uma correção introduzida pelas condições de contorno, que se anula para $a \rightarrow \infty$. Note que na seção anterior calculamos $\bar{G}(x, x')$ para as condições DD.

O uso de (3.103) em (3.90) resulta em

$$\mathcal{E}^1(a) = \int_0^a dx^d \left[\left(\frac{\lambda}{8} G_0(x, x) + \frac{\delta m^2}{2} \right) G_0(x, x) + \left(\frac{\lambda}{4} G_0(x, x) + \frac{\delta m^2}{2} \right) \bar{G}(x, x) + \frac{\lambda}{8} \bar{G}^2(x, x) \right]. \quad (3.104)$$

O primeiro termo do lado direito fornece uma contribuição uniforme para a densidade de energia de Casimir e, por esse motivo, apesar de ser divergente, pode ser ignorado.

O contratermo de massa δm^2 é obtido de forma análoga ao que foi feito na seção anterior:

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2} G_0(x, x). \quad (3.105)$$

Com isso, o segundo termo no lado direito de (3.90) se anula.

Usando agora a representação espectral da função de Green do campo livre [17],

$$G_0(x, x') = \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\omega(\tau-\tau')} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \quad (3.106)$$

e definindo o vetor $k = (\omega, k^1, \dots, k^d)$, reescrevemos o contratermo de massa (3.105) na forma

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^{d+1} k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (3.107)$$

A integral acima é divergente para $d \geq 1$, mas pode ser definida por continuação analítica do resultado para $d < 1$, obtemos assim [30],

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(1 - (d+1)/2)}{(4\pi)^{(d+1)/2}} m^{d-1}. \quad (3.108)$$

De agora em diante, discutiremos cada uma das condições de contorno, DD, NN e DN, separadamente.

Condições Dirichlet-Dirichlet (DD)

Com as definições das autofunções (3.92), podemos calcular explicitamente os fatores $\Delta_{j,n}$ definidos em (3.101), obtendo

$$\Delta_{j,n}|_{DD} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_{j,n} \right). \quad (3.109)$$

Com este resultado, a soma dupla presente no primeiro termo de (3.102) se torna

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n^{d-2} \omega_j^{d-2} \Delta_{n,j} &= \frac{1}{a} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{d-2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{2d-4} \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[F^2(2-d, a) + \frac{1}{2} F(4-2d, a) \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde a função F é definida como

$$F(s, a) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[m^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s/2}, \quad \Re(s) > 1. \quad (3.111)$$

A extensão analítica de $F(s, a)$ para $\Re(s) \leq 1$, necessária para que a equação (3.110) faça sentido em $d \geq 1$, é discutida no Apêndice F.

Expressando também o somatório no segundo termo do lado direito da equação (3.102) em termos da função F , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{DD}^1(a) &= \frac{\lambda}{8} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} \frac{1}{a} \left[F^2(2-d, a) + \frac{1}{2} F(4-2d, a) \right] + \frac{\delta m^2}{2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} F(2-d, a) \\
&= \frac{\lambda}{8a} \left[\frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} F(2-d, a) + \frac{2a\delta m^2}{\lambda} \right]^2 - \frac{(\delta m^2)^2}{2\lambda} a \\
&\quad + \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} F(4-2d, a) .
\end{aligned} \tag{3.112}$$

O termo $(\delta m^2)^2 a / 2\lambda$ na expressão acima, por ser proporcional à distância entre as placas, pode ser descartado por argumentos já discutidos anteriormente. Substituindo no restante da expressão acima a função F por sua forma alternativa (F.7), e δm^2 por (3.108), chegamos finalmente ao resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{DD}^1(a) &= \frac{\lambda}{8a} \left[\frac{4am^{d-1}}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(d-1)/2}(2man)}{(man)^{(d-1)/2}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \right]^2 \\
&\quad + \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} \left\{ -\frac{1}{2} m^{2d-4} + \frac{1}{2} \frac{am^{2d-3}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2-d)} \left[\Gamma\left(\frac{3-2d}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(2d-3)/2}(2man)}{(man)^{(2d-3)/2}} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Obviamente, o caso de maior interesse é quando temos $d = 3$ dimensões espaciais, quando então a expressão acima fornece

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{DD}^1(a) \Big|_{d=3} &= \frac{\lambda}{8a} \left[\frac{4am^2}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2man)}{(man)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-1/2)}{(4\pi)^{3/2}} m \right]^2 - \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(-1/2)}{(4\pi)^3} \frac{m^2}{2} \\
&= \frac{\lambda m^2}{2^9 a \pi^2} \left[\left(1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2man)}{n} \right)^2 - 1 \right] .
\end{aligned} \tag{3.114}$$

A expressão (3.114) fornece, assim, a primeira correção radiativa à energia de Casimir (por unidade de área das placas) de um campo escalar com massa em três dimensões espaciais submetido às condições DD.

Condições Neumann-Neumann (NN)

Substituindo as autofunções (3.93) na expressão (3.101), obtém-se

$$\Delta_{n,j}|_{NN} = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{2} (\delta_{n,j} - \delta_{n,0} \delta_{j,0}) \right]. \quad (3.115)$$

Sendo assim, a soma dupla do primeiro termo da equação (3.102) é escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_n^{d-2} \omega_j^{d-2} \Delta_{n,j} &= \frac{1}{a} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{d-2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{2d-4} \right] \\ &= \frac{1}{a} \left\{ [F(2-d, a) + m^{d-2}]^2 + \frac{1}{2} F(4-2d, a) \right\} \end{aligned} \quad (3.116)$$

O somatório presente no segundo termo do lado direito de (3.102) também pode expresso em termos da função F definida em (3.111):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{d-2} = m^{2-d} + F(2-d, a). \quad (3.117)$$

Substituindo as equações (3.116) e (3.117) em (3.102), obtém-se, após algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{NN}^1(a) &= \frac{\lambda}{8a} \left\{ \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} [F(2-d, a) + m^{d-2}] + \frac{2a \delta m^2}{\lambda} \right\}^2 \\ &\quad - \frac{(\delta m^2)^2}{2\lambda} a + \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} F(4-2d, a). \end{aligned} \quad (3.118)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.118) pode ser descartado, pelas mesmas razões apresentadas ao analisarmos a equação (3.112). Substituindo no restante da expressão acima a função F por sua forma alternativa (F.7), e δm^2 por (3.108), temos finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{NN}^1(a) &= \frac{\lambda}{8a} \left[\frac{4am^{d-1}}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(d-1)/2}(2man)}{(man)^{(d-1)/2}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \right]^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} \left\{ -\frac{1}{2} m^{2d-4} + \frac{1}{2} \frac{am^{2d-3}}{\sqrt{\pi} \Gamma(2-d)} \left[\Gamma\left(\frac{3-2d}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(2d-3)/2}(2man)}{(man)^{(2d-3)/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

No caso de três dimensões espaciais, $d = 3$, obtemos

$$\mathcal{E}_{NN}^1(a) \Big|_{d=3} = \frac{\lambda m^2}{2^9 a \pi^2} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2man)}{n} \right)^2 - 1 \right], \quad (3.120)$$

A expressão (3.120) fornece a primeira correção radiativa à energia de Casimir, por unidade de área, para o campo escalar com massa submetido às condições NN.

Condições Dirichlet-Neumann (DN)

Para estas condições de contorno, os fatores (3.101) são obtidos a partir de (3.94):

$$\Delta_{n,j}|_{DN} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_{n,j} \right). \quad (3.121)$$

Com este resultado, a dupla soma presente no primeiro termo do lado direito de (3.102) é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_n^{d-2} \omega_j^{d-2} \Delta_{n,j} = \frac{1}{a} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{d-2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{2d-4} \right]. \quad (3.122)$$

A fim de expressar o resultado acima em termos da função F , notemos que no caso das condições DN tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{-s} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[m^2 + (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-s/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[m^2 + k^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-s/2} - \sum_{k=0}^{\infty} \left[m^2 + (2k)^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-s/2} \\ &= F(s, 2a) - F(s, a). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Assim, podemos reescrever a equação (3.102) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{DN}^1(a) &= \frac{\lambda}{8a} \left\{ \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} [F(2-d, 2a) - F(2-d, a)] + \frac{2a \delta m^2}{\lambda} \right\}^2 \\ &\quad - \frac{(\delta m^2)^2}{2\lambda} a + \frac{\lambda}{16a} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{(4\pi)^d} [F(4-2d, 2a) - F(4-2d, a)]. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Finalmente, substituindo F por (F.7) e δm^2 por (3.108) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{DN}^1(a) = & \frac{\lambda}{8a} \left[\frac{4am^{d-1}}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(d-1)/2}(4amn)}{(2amn)^{(d-1)/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(d-1)/2}(2amn)}{(amn)^{(d-1)/2}} \right) \right]^2 \\
& + \frac{\lambda m^{2d-3}}{16(4\pi)^{d+1/2}} \frac{\Gamma^2(1-d/2)}{\Gamma(2-d)} \left[\Gamma\left(\frac{3-2d}{2}\right) \right. \\
& \left. + 4 \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(2d-3)/2}(4amn)}{(2amn)^{(2d-3)/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{(2d-3)/2}(2amn)}{(amn)^{(2d-3)/2}} \right) \right], \quad (3.125)
\end{aligned}$$

onde, tal como fizemos nos casos DD e NN, descartamos o segundo termo do lado direito da equação (3.124).

Tomando $d = 3$ na expressão acima, obtemos finalmente a primeira correção radiativa à energia de Casimir, por unidade de área, para o campo escalar em três dimensões espaciais, submetido às condições DN.

$$\mathcal{E}_{DN}^1(a) \Big|_{d=3} = \frac{\lambda m^2}{2^7 \pi^4 a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(4man) - K_1(2man)}{n} \right)^2. \quad (3.126)$$

Com o objetivo de comparar as primeiras correções radiativas à energia de Casimir para as três condições de contorno consideradas, escrevemos os resultados (3.114), (3.120) e (3.126) como

$$\mathcal{E}_{DD}^1(a) \Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^9 \pi^2 a^3} F_{DD}(ma), \quad (3.127)$$

$$\mathcal{E}_{NN}^1(a) \Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^9 \pi^2 a^3} F_{NN}(ma), \quad (3.128)$$

$$\mathcal{E}_{DN}^1(a) \Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^9 \pi^2 a^3} F_{DN}(ma), \quad (3.129)$$

onde definimos as funções

$$F_{DD}(ma) = (ma)^2 \left[\left(1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2man)}{n} \right)^2 - 1 \right], \quad (3.130)$$

$$F_{NN}(ma) = (ma)^2 \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2man)}{n} \right)^2 - 1 \right], \quad (3.131)$$

$$F_{DN}(ma) = (ma)^2 \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(4man) - K_1(2man)}{n} \right)^2. \quad (3.132)$$

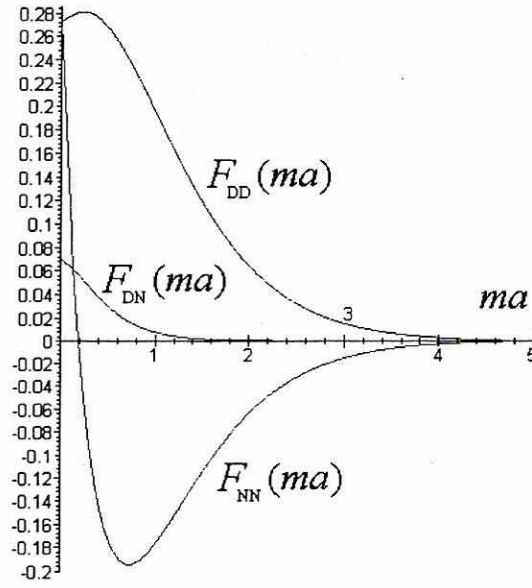


Figura 3.2: Gráficos das funções $F_{DD}(ma)$, $F_{NN}(ma)$ e $F_{DN}(ma)$

A figura 3.2 exhibe os gráficos das funções F_{DD} , F_{NN} e F_{DN} .

Note que a correção à energia de Casimir para as condições DD e DN é estritamente positiva, enquanto para a condição NN ela torna-se negativa para $ma \gtrsim 0,2$.

Finalizamos esta seção analisando os limites de massa pequena ($ma \ll 1$) e massa grande ($ma \gg 1$) nas expressões obtidas para a energia de Casimir por unidade de área calculadas com as condições de contorno DD, NN e DN, dadas respectivamente pelas equações (3.114), (3.120) e (3.126).

A fim de obter o limite de massa pequena, usamos o resultado (ver Apêndice G)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nz) = \frac{\pi^2}{6z} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left[\ln\left(\frac{z}{4\pi}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] z + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.133)$$

válido para $0 < z \ll 1$, nas equações (3.114), (3.120) e (3.126), o que nos fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{DD}^1(a) \Big|_{d=3} &= \frac{\lambda}{2^{11} 3^2 a^3} \left\{ 1 - \frac{12(ma)^2}{\pi^2} \left[\ln(ma) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma + \frac{5}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}[(ma)^4 \ln^2(ma)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\mathcal{E}_{NN}^1(a)\Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^{11}3^2a^3} \left\{ 1 - \frac{24ma}{\pi} - \frac{12(ma)^2}{\pi^2} \left[\ln(ma) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma - \frac{19}{2} \right] + \mathcal{O}[(ma)^3 \ln(ma)] \right\}, \quad (3.135)$$

$$\mathcal{E}_{DN}^1(a)\Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^{11}3^2a^3} \left\{ 1 + \frac{24(ma)^2}{\pi^2} \left[\ln(ma) + \ln(2\pi) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}[(ma)^4 \ln^2(ma)] \right\}. \quad (3.136)$$

Em particular, quando a massa do campo é nula, as expressões acima se tornam

$$\mathcal{E}_{DD}^1(a)\Big|_{d=3} = \mathcal{E}_{NN}^1(a)\Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^{11}3^2a^3}, \quad \mathcal{E}_{DN}^1(a)\Big|_{d=3} = \frac{\lambda}{2^{13}3^2a^3}, \quad (3.137)$$

em plena concordância com os resultados encontrados na literatura [23, 24]. Note que, de acordo com a equação (3.137), a primeira correção radiativa à energia de Casimir do campo escalar sem massa é a mesma nos casos DD e NN. No entanto, de acordo com os resultados (3.114) e (3.120), essa igualdade deixa de valer quando o campo possui massa. Isso pode ser constatado claramente na figura 3.2.

Para grandes valores de massa ($ma \gg 1$), usamos o limite assintótico das funções de Bessel $K_\nu(z)$ [96],

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + \mathcal{O}(z^{-1})] \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.138)$$

nas equações (3.114), (3.120) e (3.126), o que nos permite escrever

$$\mathcal{E}_{DD}^1(a)\Big|_{d=3} = -\mathcal{E}_{NN}^1(a)\Big|_{d=3} \sim \frac{\lambda m^{3/2}}{2^8 \pi^{5/2} a^{3/2}} \exp(-2ma), \quad (3.139)$$

$$\mathcal{E}_{DN}^1(a)\Big|_{d=3} \sim \frac{\lambda m}{2^9 \pi^3 a^2} \exp(-4ma). \quad (3.140)$$

Note que a correção à energia de Casimir para as condições DN cai bem mais rápido em comparação com as outras duas condições DD e NN. É interessante notar também que no limite de grandes valores de massa, a correção à energia de Casimir para as condições DD é oposta a que encontramos no caso NN.

3.5 Comentários Finais

Neste capítulo, rederivamos a primeira correção radiativa à energia de Casimir para um campo escalar sem massa com auto-interação $\lambda\phi^4$ utilizando a técnica de integrais funcionais, até então não empregada para esse caso. Embora ela não apresente nenhuma vantagem aparente no caso de fronteiras planas, suspeitamos de que essa técnica forneça uma maneira sistemática de se calcular a força de Casimir entre fronteiras curvas (por exemplo, entre um plano e uma esfera).

Em seguida, obtivemos o resultado mais importante desta tese: calculamos pela primeira vez a correção radiativa em ordem λ à energia de Casimir para um campo escalar com massa, também com auto-interação $\lambda\phi^4$. Nesse caso, os cálculos foram feitos considerando-se três condições de contorno diferentes, a saber, as condições DD, NN e DN, definidas anteriormente. Analisando os resultados (3.114) e (3.120), constatamos que a igualdade que existe entre a primeira correção radiativa à energia de Casimir de um campo escalar sem massa submetido às condições DD e NN (veja a equação (3.137)) deixa de existir no caso de campos com massa. Finalmente, analisando as equações (3.134)–(3.136) podemos constatar que as condições NN são as mais sensíveis à massa do campo, se pensarmos nesta como uma pequena perturbação à teoria sem massa.

Conclusões e Perspectivas

Finalizamos esta tese resumindo os principais resultados apresentados em cada capítulo, e apontando algumas perspectivas para futuros trabalhos relacionados aos tópicos aqui abordados.

Em linhas gerais, fizemos nesta tese um estudo a respeito da influência de cavidades em fenômenos perturbativos da Teoria Quântica de Campos. Abordamos problemas envolvendo desde um campo escalar com auto-interação $\lambda\phi^4$, até problemas relacionados com a Eletrodinâmica Quântica e com a Eletrodinâmica de Born-Infeld. Em todos esses casos, correções radiativas foram calculadas supondo que os campos em questão estivessem submetidos a condições de contorno em planos paralelos entre si. Resultados foram obtidos para diversas condições de contorno.

No Capítulo 1 estudamos a influência causada pela presença de placas paralelas no espectro de energia de um átomo de Hidrogênio. Usando teoria de perturbação de segunda ordem, obtivemos os deslocamentos nos níveis de energia do átomo quando este está localizado na região entre as placas. Os correlatores do campo eletromagnético relevantes foram calculados por meio do método de separação de tempo imaginário de Schwinger. Consideramos, em particular, o caso no qual uma das placas é perfeitamente condutora, e a outra, infinitamente permeável, configuração à qual nos referimos por CP. Comparamos nossos resultados com os já existentes na literatura para outras configurações, como os casos em que as duas placas são perfeitamente condutoras ou infinitamente permeáveis, configurações denominadas, respectivamente, por CC e PP. Observamos algumas peculiaridades, como o fato de que apesar de os deslocamentos nos níveis de energia atômicos para as placas CC e PP terem sempre um sinal determinado, sendo positivo para CC e negativo para PP, para o caso da configuração CP não é possível prever de antemão o sinal dos deslocamentos de energia, que

podem adquirir tanto valores positivos quanto negativos.

A partir dos resultados obtidos, encontramos também os deslocamentos nos níveis de energia de um átomo localizado perto de uma única placa, sendo esta perfeitamente condutora ou infinitamente permeável. É interessante ressaltar que, ao compararmos os deslocamentos nos níveis de energia para estes dois casos, vemos que eles têm o mesmo módulo, mas sinais contrários.

Uma extensão desse estudo seria calcular as alterações nos níveis de energia de um átomo localizado entre placas paralelas, mas considerando também que este esteja em um banho térmico a uma determinada temperatura. Dessa forma, estaríamos considerando também os efeitos que a radiação de corpo negro confinada entre as placas exerce sobre os níveis atômicos. Do ponto de vista técnico, bastaria trocar os correlatores calculados na tese por “correlatores térmicos”, ou seja, médias térmicas de correlatores dos campos. Seria interessante investigar também a influência de outros tipos de cavidades nos níveis de energia atômicos, como por exemplo, cavidades cilíndricas e retangulares.

Ainda nessa linha de pesquisa a respeito de como certas propriedades radiativas de sistemas físicos são afetadas pela sua vizinhança, é nossa intenção investigar também a influência de cavidades no momento anômalo do elétron, mesmo porque a medida mais precisa da EDQ é a do fator $g - 2$. Pretendemos considerar especificamente o caso em que temos duas placas paralelas, sendo pelo menos uma delas infinitamente permeável, e comparar os resultados com os já existentes para placas condutoras.

No capítulo 2 estudamos como a velocidade da luz é alterada quando esta se propaga em uma região entre placas paralelas. Consideramos as mesmas configurações de placas empregadas no estudo dos deslocamentos dos níveis de energia atômicos do Capítulo 1. Empregamos a técnica desenvolvida por Barton no contexto do efeito Scharnhorst para encontrar as alterações na velocidade da luz devido à presença das placas, considerando a dinâmica do campo eletromagnético descrita por uma lagrangiana que generaliza, ligeiramente, a lagrangiana de Euler-Heisenberg, e que tem como caso particular a lagrangiana de Born-Infeld. No caso desta última lagrangiana, mostramos que não há variação alguma na velocidade da luz até a ordem considerada. Esse é um fato curioso pois, mesmo sem levar em conta efeitos quânticos, a lagrangiana de Born-Infeld também fornece variação nula para a velocidade de propagação da luz [102, 103].

Utilizando a técnica de Barton, pretendemos calcular a variação na velocidade da luz percebida por um referencial com aceleração própria constante (movimento hiperbólico) e comparar o resultado com o obtido para um referencial de Lorentz, porém imerso em um banho térmico a uma temperatura determinada, ou seja, considerando o campo de radiação satisfazendo a distribuição de Planck. A motivação para isso é o chamado efeito Unruh-Davies [104, 105], que consiste no fato de que a distribuição de ocupação de estados de partículas observada por um referencial de Lorentz, a temperatura finita, é igual à observada por um referencial em movimento hiperbólico, mas a temperatura zero, se relacionarmos a temperatura do primeiro referencial com a aceleração do segundo de forma apropriada. Nosso objetivo é constatar, ou não, se algo semelhante acontece entre os dois referenciais para a variação na velocidade da luz.

No Capítulo 3 fizemos um estudo sobre o efeito Casimir para o campo escalar. Em particular, calculamos a energia de Casimir para o campo escalar com massa, e sua primeira correção radiativa para o campo sem massa, mas com auto-interação $\lambda\phi^4$. Em ambos os casos, consideramos o campo submetido às condições de Dirichlet em planos paralelos. Apesar desses resultados já existirem na literatura, empregamos, nesse cálculo, uma técnica funcional ainda não utilizada para o campo escalar. Por meio de outra técnica, envolvendo regularização dimensional e extensão analítica, obtivemos pela primeira vez na literatura as correções radiativas à energia de Casimir para um campo escalar com massa e auto-interação $\lambda\phi^4$. Consideramos três condições de contorno, e os resultados obtidos nos levaram a elucidar a questão da igualdade entre as primeiras correções radiativas ao efeito Casimir para o campo escalar sem massa submetido às condições de Dirichlet e de Neumann. Verificamos explicitamente que esta igualdade não persiste no caso do campo escalar com massa.

Mesmo no caso de campos escalares interagentes, há algumas questões que não estão muito claras. Por exemplo, quando consideramos um campo escalar com auto-interação do tipo $\lambda\phi^4$ e impomos condições de contorno de Neumann em planos paralelos, podem ocorrer, dependendo do esquema de regularização, divergências no cálculo da energia de Casimir que, aparentemente, não podem ser absorvidas com a renormalização da massa, da constante de acoplamento ou da função de onda. Dependendo da regularização empregada, parece ser necessário introduzir contratermos de superfície à lagrangiana do sistema. A partir de nossos resultados, pretendemos responder a questões como essa.

Pretendemos ainda calcular as primeiras correções radiativas à energia de Casimir para o campo escalar com massa na teoria $\lambda\phi^4$ para duas outras condições de contorno, a saber: condições periódicas e anti-periódicas. O objetivo aqui é verificar se a razão entre tais energias de Casimir é a mesma que a encontrada no caso sem massa. Esse tipo de estudo pode ajudar a elucidar a influência da massa no efeito Casimir. Embora saibamos que o efeito Casimir se anula quando a massa do campo tende a infinito, pois esse limite corresponde ao limite clássico, uma vez que nesse caso cessam as flutuações quânticas, a maneira como a energia de Casimir varia com a massa não é trivial.

Por fim, pretendemos calcular as correções radiativas ao efeito Casimir no modelo de Schwinger, isto é, na EDQ bidimensional com férmions de massa nula. Como se trata de um modelo exatamente solúvel, esperamos encontrar um resultado exato para essa correção, o que pode vir a esclarecer alguns pontos e ajudar no entendimento de modelos mais realistas em 3+1 dimensões.

Apêndice A

Demonstrando (1.23) e (1.48)

Para demonstrar que os termos cruzados em (1.22) são nulos, consideramos inicialmente que

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\lambda'} | \vec{k}, \lambda \rangle &= 4\pi^2 \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{n, n'} \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}'_{\parallel}) \\
 \langle \vec{k}, \lambda | a_{\vec{k}'}^{\lambda' \dagger} | 0 \rangle &= 4\pi^2 \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{n, n'} \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}'_{\parallel}) \\
 \langle \vec{k}, \lambda | a_{\vec{k}'}^{\lambda'} | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\vec{k}'}^{\lambda' \dagger} | \vec{k}, \lambda \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Com a expansão do campo elétrico (1.47) e as equações (A.1) temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda} \oint_{\vec{k}} \frac{\langle 0 | E_p(\vec{x}, t) | \vec{k}, \lambda \rangle \langle \vec{k}, \lambda | E_v(\vec{x}, t') | 0 \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} &= \\
 = \sum_{\lambda=TE, TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left(\vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}(\vec{x}) \right)_p \left(\vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda*}(\vec{x}) \right)_v e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} .
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Com as definições (1.39) e (1.40), temos para os termos cruzados

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda} \oint_{\vec{k}\lambda} \frac{\langle 0 | E_x(\vec{x}, t) | \vec{k}, \lambda \rangle \langle \vec{k}, \lambda | E_y(\vec{x}, t') | 0 \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} &= \\
 = \sum_{\lambda=TE, TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\omega_{\vec{k}}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \frac{|N_n|^2}{2} \left(\frac{k_z^2}{\omega_{\vec{k}}^2} - 1 \right) k_x k_y \sin^2(k_z z) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\sum_{\lambda} \not\int_{\vec{k}\lambda} \frac{\langle 0|E_x(\vec{x}, t)|\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda|E_z(\vec{x}, t')|0\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} =$$

$$= \sum_{\lambda=TE, TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2\vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{(-i)}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \frac{|N_n|^2}{2\omega_{\vec{k}}} k_{\parallel}^2 k_z k_x \text{sen}(k_z z) \cos(k_z z) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{\lambda} \not\int_{\vec{k}\lambda} \frac{\langle 0|E_y(\vec{x}, t)|\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda|E_z(\vec{x}, t')|0\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} =$$

$$= \sum_{\lambda=TE, TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2\vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{(-i)}{\varepsilon_n - \varepsilon_m - \omega_{\vec{k}}} \frac{|N_n|^2}{2\omega_{\vec{k}}} k_{\parallel}^2 k_z k_y \text{sen}(k_z z) \cos(k_z z) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \quad (\text{A.5})$$

Escrevendo as integrais nas expressões (A.3), (A.4) e (A.5) em coordenadas esféricas, ou seja, fazendo

$$d^2\vec{k}_{\parallel} = k_{\parallel} dk_{\parallel} d\phi k_{\parallel} \quad , \quad k_x = k_{\parallel} \cos(\phi) \quad , \quad k_y = k_{\parallel} \text{sen}(\phi) \quad , \quad \omega_{\vec{k}} = (k_{\parallel}^2 + k_z^2)^{1/2} \quad , \quad (\text{A.6})$$

e integrando na variável angular ϕ , verificamos que as integrais (A.3), (A.4) e (A.5) se anulam; sendo assim, os termos cruzados em (1.22) são nulos, o que demonstra a equação (1.23).

Para demonstrar a equação (1.48), consideramos a expansão (1.47) para o campo elétrico em ambos os lados de (1.48), e utilizamos as equações (A.1), o que fornece

$$\sum_{\lambda} \not\int_{\vec{k}} \left| \langle 0|E_p|\vec{k}, \lambda\rangle \right|^2 = \sum_{\lambda} \not\int_{\vec{k}} \langle 0|E_p|\vec{k}, \lambda\rangle \langle \vec{k}, \lambda|E_p|0\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda=TE, TM} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2\vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left(\vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}(\vec{x}) \right)_p \left(\vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda*}(\vec{x}) \right)_p e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')}$$

$$= \langle 0|E_p E_p|0\rangle \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Soma de Resíduos

Neste apêndice vamos calcular a soma dos resíduos (1.60) internos ao contorno de integração indicado na figura 1.3. Considerando as expressões (1.59) e (1.52) temos que

$$g_{\pm}(Z, \theta; p) = \frac{Z^{-p}e^{-Z/2}}{1 - e^{-Z}} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{Z^{-p}e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} + \frac{Z^{-p}e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right]. \quad (\text{B.1})$$

As funções g_{\pm} têm pólo em $Z = 0$, mas este ponto está fora do contorno 1.3 e deve ser desconsiderado.

O primeiro termo de (B.1) tem pólos simples internos ao contorno 1.3 em $Z = 2n\pi i$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, fornecendo para cada um o resíduo

$$\text{Res}_{Z=2n\pi i} \left(\frac{Z^{-p}e^{-Z/2}}{1 - e^{-Z}} \right) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{(-1)^n}{n^p}. \quad (\text{B.2})$$

O segundo termo de (B.1) tem pólos simples em $Z = 2n\pi i - 2i\theta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, o que resulta em

$$\text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p}e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) = \frac{1}{(2\pi i)^p} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p}. \quad (\text{B.3})$$

Finalmente, para o terceiro termo em (B.1) temos os pólos simples $Z = 2n\pi i + 2i\theta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, com os resíduos

$$\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p}e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) = \frac{1}{(2\pi i)^p} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p}. \quad (\text{B.4})$$

A soma dos resíduos dados por (B.2) é efetuada facilmente como segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{Z=2n\pi i} \left(\frac{Z^{-p} e^{-Z/2}}{1 - e^{-Z}} \right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \text{Res}_{Z=2n\pi i} \left(\frac{Z^{-p} e^{-Z/2}}{1 - e^{-Z}} \right) = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} + (-1)^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} [1 + (-1)^{-p}] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^p} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{1}{2^p} [1 + (-1)^{-p}] \left(\zeta_R(p) - \zeta_H(p, 1/2) \right), \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

onde usamos as definições das funções zeta de Riemann e de Hurwitz, dadas respectivamente pelas expressões

$$\zeta_R(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \zeta_H(p, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}. \quad (\text{B.6})$$

Por questão de conveniência, vamos efetuar as somas dos resíduos dados pelas equações (B.3) e (B.4) em conjunto, como segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) + \text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + \sum_{-1}^{-\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_1^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + \sum_0^{-\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

trocando $n \rightarrow -n$ nas segunda e quarta somas do lado direito da equação (B.7), temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) + \text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + (-1)^{-p} \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right. \\
& \quad \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + (-1)^{-p} \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right], \tag{B.8}
\end{aligned}$$

completando as segunda e terceira somas de modo a fazer-las iniciarem de $n = 0$, reescrevemos a equação (B.8) como

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) + \text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} \left[\sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + (-1)^{-p} \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right. \\
& \quad + \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + (-1)^{-p} \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \\
& \quad \left. - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} - (-1)^{-p} \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} [1 + (-1)^{-p}] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right]. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Separando em cada somatório os termos com n par e n ímpar temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) + \text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} [1 + (-1)^{-p}] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \left(2n - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \right. \\
& \quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \left((2n+1) - \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \left(2n + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} \\
& \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \left((2n+1) + \frac{\theta}{\pi} \right)^{-p} - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{1}{2^p} [1 + (-1)^{-p}] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^{-p} \right. \\
& \quad - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^{-p} \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi} \right)^{-p} - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right]. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Usando as definições (B.6) chegamos finalmente a expressão

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Res}_{Z=2i(n\pi+\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2-i\theta)}}{1 - e^{-(Z-2i\theta)}} \right) + \text{Res}_{Z=2i(n\pi-\theta)} \left(\frac{Z^{-p} e^{-(Z/2+i\theta)}}{1 - e^{-(Z+2i\theta)}} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{1}{2^p} [1 + (-1)^{-p}] \left[\zeta_R \left(p, \frac{\theta}{2\pi} \right) + \zeta_R \left(p, \frac{-\theta}{2\pi} \right) \right. \\
& \quad \left. - \zeta_H \left(p, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi} \right) - \zeta_H \left(p, \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} \right) - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right]. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Com os resultados (B.5) e (B.11), escrevemos a soma dos resíduos de (B.1) como

$$\begin{aligned}
& \sum \text{Res}_{g\pm}(Z, \theta; p) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{1}{2^p} (1 + e^{-i\pi p}) \left[\left(\zeta_R(p) - \zeta_H(p, 1/2) \right) \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{1}{2} \left[\zeta_R \left(p, \frac{\theta}{2\pi} \right) + \zeta_R \left(p, \frac{-\theta}{2\pi} \right) - \zeta_H \left(p, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi} \right) - \zeta_H \left(p, \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} \right) - \left(\frac{-\theta}{\pi} \right)^{-p} \right] \right], \tag{B.12}
\end{aligned}$$

onde, por conveniência, usamos que $-1 = e^{\pi i}$ e consideramos p como um número inteiro, possibilitando escrever $(-1)^{-p} = e^{-\pi i p}$.

Podemos agora tomar o limite

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 3} \left(\frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i p}} \sum \text{Res} g_{\pm}(Z, \theta; p) \right) &= \frac{2\pi i}{(2\pi i)^3} \frac{1}{2^3} \left(\lim_{p \rightarrow 3} \frac{1 + e^{-\pi i p}}{1 - e^{-2\pi i p}} \right) \\ &\times \left[\left(\zeta_R(3) - \zeta_H(3, 1/2) \right) \pm \frac{1}{2} \left[\zeta_H \left(3, \frac{\theta}{2\pi} \right) + \zeta_H \left(3, \frac{-\theta}{2\pi} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta_H \left(3, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{3\pi} \right) - \zeta_H \left(3, \frac{1}{2} - \frac{\theta}{3\pi} \right) + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^3 \right] \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Usando a regra de L'Hospital no lado direito da equação acima, obtemos

$$\lim_{p \rightarrow 3} \left(\frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i p}} \sum \text{Res} g_{\pm}(Z, \theta; p) \right) = \mp \frac{1}{128\pi^2} G_{\mp}(z) , \quad (\text{B.14})$$

onde definimos $G_{\pm}(z)$ em (1.68) e usamos a definição de θ em (1.51).

Apêndice C

Resultados para Manipular a Equação (2.55)

Neste apêndice estabelecemos resultados que nos permitem escrever a equação (2.55).

Pelas definições (2.49) de $\hat{\mathbf{F}}$ e \mathbf{g} podemos mostrar que

$$\hat{\mathbf{F}}^T = -\mathbf{g}\hat{\mathbf{F}}\mathbf{g}^{-1} . \quad (\text{C.1})$$

Iterando a equação (C.1) temos

$$(\hat{\mathbf{F}}^T)^n = (-1)^n \mathbf{g}(\hat{\mathbf{F}})^n \mathbf{g}^{-1} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}}^n = (-1)^n \mathbf{g}^{-1}(\hat{\mathbf{F}}^T)^n \mathbf{g} . \quad (\text{C.2})$$

Sendo assim, para uma dada função $\mathcal{J}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{\mathbf{F}}^T) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\hat{\mathbf{F}}^T)^n = \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} a_n (\hat{\mathbf{F}}^T)^n + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n (\hat{\mathbf{F}}^T)^n \\ &= \mathbf{g} \left[\sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{F}}^n - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{F}}^n \right] \mathbf{g}^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Fazendo $\mathcal{J}(x) = e^{xs}$ e $\mathcal{J}(x) = ex/\sinh(xs)$ na equação (C.3), obtemos respectivamente os resultados (C.4) e (C.5):

$$e^{e\hat{\mathbf{F}}^T s} \mathbf{g} = \mathbf{g} e^{-e\hat{\mathbf{F}} s} , \quad \mathbf{g}^{-1} e^{e\hat{\mathbf{F}}^T s} = e^{-e\hat{\mathbf{F}} s} \mathbf{g}^{-1} \quad (\text{C.4})$$

$$\left(\frac{e\hat{\mathbf{F}}}{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)} \right)^T \mathbf{g} = \mathbf{g} \left(\frac{e\hat{\mathbf{F}}}{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)} \right) , \quad \mathbf{g}^{-1} \left(\frac{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)}{e\hat{\mathbf{F}}} \right)^T = \left(\frac{\sinh(e\hat{\mathbf{F}}s)}{e\hat{\mathbf{F}}} \right) \mathbf{g}^{-1} \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D

Cálculo do Traço e do Determinante Presentes na Equação (2.83)

D.1 Cálculo do Traço da Equação (2.83)

Neste apêndice calculamos o traço presente na equação (2.83), para isso precisamos encontrar os autovalores de $(1/2)\sigma F$. Com esse intuito consideremos inicialmente o produto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\rho}\}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho} + \sigma_{\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu})F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} + \sigma_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\ &= (\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Usando a propriedade

$$\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\rho}\} = \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5,\tag{D.2}$$

onde:

$$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \Rightarrow \gamma_5^2 = -1,\tag{D.3}$$

e a equação (D.1), temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\rho}\}\right)F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \\
&= \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}F_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right)\gamma_5 F_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Com as definições (2.5), a equação (D.2) e a propriedade de anti-simetria de $F_{\mu\nu}$ podemos escrever:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma F\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2 = 2(\mathcal{F} + \gamma_5\mathcal{G}) , \tag{D.5}$$

que nos fornece quatro autovalores para $(1/2)\sigma F$

$$\pm[2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G})]^{1/2} . \tag{D.6}$$

De posse da equação (D.6) podemos finalmente calcular o traço:

$$tr \exp\left(\frac{1}{2}e\sigma F s\right) = 4Re \cosh es[2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})]^{1/2} = 4Re \cosh esX , \tag{D.7}$$

onde definimos

$$X^2 = (\hat{B} + i\hat{E})^2 . \tag{D.8}$$

D.2 Cálculo do Determinante da Equação (2.83)

Neste apêndice calculamos o determinante presente na equação (2.83).

De início precisamos calcular os autovalores de F . Para isso consideramos as relações:

$$F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}^* = -\delta^{\mu\nu}\mathcal{G} , \tag{D.9}$$

$$F_{\mu\lambda}^*F_{\lambda\nu}^* - F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} = 2\delta^{\mu\nu}\mathcal{F} , \tag{D.10}$$

e a equação de autovalores

$$F_{\mu\nu}v_\nu = av_\mu , \tag{D.11}$$

onde definimos v como um autovetor de F , com autovalor a .

Utilizando a equação (D.11) e a relação (D.9) temos

$$F_{\mu\nu}^*v_\nu = -(1/a)\mathcal{G}v_\mu . \tag{D.12}$$

Iterando a equação (D.11) e a equação (D.12), obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} v_\nu &= a^2 v_\mu \\ F_{\mu\lambda}^* F_{\lambda\nu}^* &= (1/a)^2 \mathcal{G} v_\mu . \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Substituindo os as expressões (D.13) na relação (D.10) obtemos a equação

$$a^4 + 2\mathcal{F}a^2 - \mathcal{G}^2 = 0 , \quad (\text{D.14})$$

que fornece os autovalores $a = \pm a_{(1)}$ e $a = \pm a_{(2)}$, sendo:

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= (i/\sqrt{2})[(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2} + (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{1/2}] \\ a_{(2)} &= (i/\sqrt{2})[(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2} - (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{1/2}] . \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Utilizando as equações (D.15), após algumas manipulações, obtemos finalmente o determinante:

$$\begin{aligned} \det^{-1/2} \left[\frac{\text{sen}(eFs)}{(eFs)} \right] &= \left[\left(\frac{\text{sen}(ea_{(1)}s)}{(ea_{(1)}s)} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(ea_{(2)}s)}{(ea_{(2)}s)} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= (es)^2 \frac{\mathcal{G}}{Im \cosh(esX)} , \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

com X definido em (D.8).

Apêndice E

Cálculo do Funcional (3.28)

O funcional $\bar{W}_{DD}[J]$ é dado por (veja a equação (3.26))

$$\begin{aligned} \bar{W}_{DD}[J] = N \int \mathcal{D}B^1 \mathcal{D}B^2 \exp \left\{ -i \int \int d^4x d^4y \left[J(x) D(x-y) \delta(y^3 - a_k) B^k(y_{\parallel}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} B^k(x_{\parallel}) \delta(x^3 - a_k) D(x-y) \delta(y^3 - a_l) B^l(y_{\parallel}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Efetuando as integrais em x^3 e y^3 obtemos

$$\begin{aligned} \bar{W}_{DD}[J] = N' \int \mathcal{D}B^1 \mathcal{D}B^2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \int d^3x_{\parallel} d^3y_{\parallel} B^k(x_{\parallel}) D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, a_k - a_l) B^l(y_{\parallel}) \right. \\ \left. - i \int d^3y_{\parallel} \left[\int d^4x J(x) D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, x^3 - a_k) \right] B^k(y_{\parallel}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

A integral funcional (E.2) é gaussiana, cuja solução é conhecida [30, 106, 107, 108]; o resultado é

$$\bar{W}_{DD}[J] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \int d^3x_{\parallel} d^3y_{\parallel} \mathcal{J}_k(x_{\parallel}) \mathcal{W}^{kl}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \mathcal{J}_l(y_{\parallel}) \right\}, \quad (\text{E.3})$$

onde definimos

$$\mathcal{J}_k(x_{\parallel}) := \int d^4z J(z) D(z_{\parallel} - x_{\parallel}, z^3 - a_k), \quad (\text{E.4})$$

e $\mathcal{W}^{kl}(x_{\parallel} - y_{\parallel})$ é definido como o inverso de $D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, x^3 - a_k)$, ou seja,

$$\int d^3 y_{\parallel} D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, a_k - a_l) \mathcal{W}^{lm}(y_{\parallel} - z_{\parallel}) = \delta_{km} \delta^{(3)}(x_{\parallel} - z_{\parallel}) . \quad (\text{E.5})$$

Para encontrar $\mathcal{W}^{lm}(y_{\parallel} - z_{\parallel})$, consideramos inicialmente a representação de Fourier do propagador,

$$D(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} . \quad (\text{E.6})$$

Integrando em k^3 , e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, x^3 - y^3) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2L(k_{\parallel})} e^{iL|x^3 - y^3|} e^{-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} , \quad (\text{E.7})$$

onde $L(k_{\parallel})$ está definido em (3.32). Em particular, podemos escrever

$$D(x_{\parallel} - y_{\parallel}, a_k - a_l) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2L(k_{\parallel})} h_{kl}(k_{\parallel}) e^{-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} , \quad (\text{E.8})$$

onde definimos

$$h_{kl}(k_{\parallel}) = e^{iL|a_k - a_l|} . \quad (\text{E.9})$$

É agora imediato verificar que a solução de (E.5) é dada por

$$\mathcal{W}^{kl}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} 2iL(k_{\parallel}) (h^{-1})_{kl}(k_{\parallel}) e^{-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} , \quad (\text{E.10})$$

onde h^{-1} é a inversa da matriz h definida em (E.9); seus elementos são dados explicitamente em (3.33).

Substituindo as representações de Fourier (E.10) e (E.7) nas equações (E.3) e (E.4), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{W}_{DD}[J] = & \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \int d^4 z d^4 w J(z) J(w) \right. \\ & \times \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'_{\parallel}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k''_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2L(k'_{\parallel})} 2iL(k_{\parallel}) \frac{-i}{2L(k''_{\parallel})} e^{-ik'_{\parallel} z_{\parallel}} e^{ik''_{\parallel} w_{\parallel}} \\ & \times \sum_{kl} e^{iL(k'_{\parallel})|z^3 - a_k|} (h^{-1})_{kl}(k_{\parallel}) e^{iL(k''_{\parallel})|w^3 - a_l|} \\ & \left. \times \int d^3 x_{\parallel} e^{-i(k_{\parallel} - k'_{\parallel})x_{\parallel}} \int d^3 y_{\parallel} e^{-i(k''_{\parallel} - k_{\parallel})y_{\parallel}} \right\} . \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente em x_{\parallel} , y_{\parallel} , k'_{\parallel} e k''_{\parallel} , obtemos finalmente

$$\bar{W}_{DD}[J] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \int d^4 z d^4 w J(z) \bar{D}(z, w) J(w) \right\}, \quad (\text{E.12})$$

onde definimos

$$\bar{D}(z, w) = - \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik_{\parallel}(z_{\parallel}-w_{\parallel})}}{2L(k_{\parallel})} \sum_{kl} e^{iL(k_{\parallel})(|z^3-a_k|+|w^3-a_l|)} \frac{(h^{-1})_{kl}(k_{\parallel})}{i}. \quad (\text{E.13})$$

Apêndice F

Extensão Analítica de $F(s, a)$

Este apêndice é destinado à obtenção da extensão analítica, para $\Re(s) \leq 1$, da função $F(s, a)$ definida em (3.111), cujo domínio está restrito a $\Re(s) > 1$. Vamos proceder de acordo com a referência [109].

Reescrevendo a equação (3.111) como

$$F(s, a) = -\frac{1}{2} m^{-s} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[m^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s/2}, \quad (\text{F.1})$$

e usando a identidade [96]

$$z^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-zx}, \quad (\text{F.2})$$

podemos reescrever a função F como

$$F(s, a) = -\frac{1}{2} m^{-s} + \frac{1}{2\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} dx x^{s/2-1} e^{-m^2 x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 x/a^2)}. \quad (\text{F.3})$$

Utilizando a fórmula de Poisson,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi^2 n^2}{\alpha}\right), \quad (\text{F.4})$$

na equação (F.3), obtemos

$$\begin{aligned} F(s, a) &= -\frac{1}{2} m^{-s} + \frac{a}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} dx x^{(s-3)/2} e^{-m^2 x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 a^2}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{2} m^{-s} + \frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} dt t^{(s-3)/2} e^{-t} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 a^2 m^2}{t}\right) \right], \quad (\text{F.5}) \end{aligned}$$

onde, na segunda linha, fizemos a mudança de variável de integração $m^2x \rightarrow t$. Finalmente, usando as identidades (F.2) e [96]

$$\int_0^\infty dt t^\nu \exp\left(-t - \frac{\beta^2}{t}\right) = 2\beta^{\nu+1} K_{\nu+1}(2\beta), \quad (\text{F.6})$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada, e o fato de que $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$, obtemos a seguinte expressão alternativa para a função $F(s, a)$:

$$F(s, a) = -\frac{1}{2} m^{-s} + \frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s/2)} \left[\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{K_{(1-s)/2}(2man)}{(man)^{(1-s)/2}} \right]. \quad (\text{F.7})$$

Apesar da expressão acima ter sido obtida sob a hipótese de que $\Re(s) > 1$, ela é bem definida para qualquer s complexo, exceto nos pontos $s = 1, -1, -3, -5, \dots$, onde possui pólos simples. Sendo assim, a equação (F.7) constitui a extensão analítica de $F(s, a)$ para o plano- s complexo.

Apêndice G

Expansão de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} K_1(nz)$ em Série de Potências de z

Neste apêndice vamos deduzir a expansão (3.133) para a função

$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(nz)}{n} \quad (\text{G.1})$$

por meio da transformada de Mellin [110].

A transformada de Mellin de uma função $f(x)$ é definida por

$$F(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx, \quad (\text{G.2})$$

sendo a respectiva transformada inversa dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} F(p) dp, \quad (\text{G.3})$$

onde c é uma constante arbitrária que deve ser tomada à direita dos pólos de $F(p)$.

A transformada de Mellin fornece uma maneira de reescrever uma série infinita como uma integral no plano complexo. Para ilustrar como isso é feito, consideremos a série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \quad (\text{G.4})$$

Substituindo $f(n)$ por (G.3) em (G.4), podemos reescrever S como

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-p} F(p) dp \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \right) dp \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \zeta(p) dp ,
\end{aligned} \tag{G.5}$$

sendo $\zeta(p)$ a função zeta de Riemann.

A expressão (G.5) é conhecida como fórmula da soma de Mellin [110]. Para o caso em que estamos interessados, temos

$$f(n; z) = \frac{K_1(nz)}{n} . \tag{G.6}$$

Sua transformada (G.2) é dada por

$$F(p; z) = \int_0^{\infty} x^{p-2} K_1(xz) dx . \tag{G.7}$$

A integral acima é tabulada [111, fórmula 6.561.16], fornecendo

$$F(p; z) = 2^{p-3} z^{p-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right) \quad (\Re(p) > 2, \quad \Re(z) > 0) . \tag{G.8}$$

Substituindo a expressão (G.8) na fórmula da soma de Mellin, Eq. (G.5), obtemos

$$S(z) = \frac{z}{16\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right) \zeta(p) dp . \tag{G.9}$$

O integrando possui pólos simples em $p = 2$ e $p = 1$, e pólos de segunda ordem em $p = 0, -2, -4, \dots$. Como o pólo mais à direita está em $p = 2$, devemos tomar $c > 2$ na integral (G.9).

Para efetuar a integral (G.9), consideramos outro contorno de integração, como indicado na figura G.1, e utilizamos o teorema dos resíduos para escrever

$$\frac{z}{16\pi i} \left(\int_{\Gamma} + \int_C \right) \left(\frac{2}{z} \right)^p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right) \zeta(p) dp$$

$$= \frac{z}{8} \left[\text{Res}(p=2) + \text{Res}(p=1) + \text{Res}(p=0) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(p=-2n) \right]. \quad (\text{G.10})$$

O integrando acima tende a zero suficientemente rápido quando $|p| \rightarrow \infty$ e $|\arg(p)| < \pi$, de modo a fazer a integração ao longo do caminho Γ se anular. Sendo assim, as integrais (G.9) e (G.10) são iguais, e podemos escrever

$$S(z) = \frac{z}{8} \left[\text{Res}(p=2) + \text{Res}(p=1) + \text{Res}(p=0) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(p=-2n) \right]. \quad (\text{G.11})$$

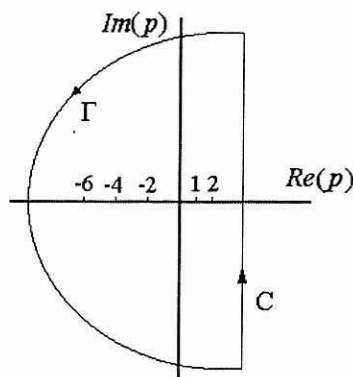


Figura G.1: Contorno de Integração.

O cálculo dos três primeiros resíduos na equação acima fornece

$$\text{Res}(p=2) = \frac{4\pi^2}{3z^2},$$

$$\text{Res}(p=1) = -\frac{4\pi}{z},$$

$$\text{Res}(p=0) = -2 \left[\ln\left(\frac{z}{4\pi}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{G.12})$$

Os resíduos em $p = -2n$ ($n = 1, 2, \dots$) são proporcionais a z^{2n} , sendo portanto desprezíveis suas contribuições para pequenos valores de z . Substituindo os resultados (G.12) na expressão (G.11), obtemos a equação (3.133).

Para finalizar, gostaríamos de comentar que o procedimento utilizado neste apêndice permite obter o resultado mais genérico [112]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\nu} K_{\nu}(nz) &= \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{1}{2} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)} \zeta(2(\nu-l)) \Gamma(\nu-l) \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\nu} + \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \\ &+ \left(\frac{-z}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} \left[\ln\left(\frac{z}{4\pi}\right) - \frac{1}{2} (\psi(1) + \psi(\nu+1)) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{-z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2n) \zeta(1+2n)}{\Gamma(1+n+\nu) \Gamma(1+n)} (-1)^n \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{2n}, \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

válido para $\nu > -1/2$ e $0 < z < 1$. Fazendo $\nu = 1$ e tomando os termos em ordem mais baixa em z , obtemos o resultado (3.133).

Referências Bibliográficas

- [1] H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [2] Serge Haroche e Daniel Kleppner, Physics Today **42** (1), 24 (1989).
- [3] S. Haroche, *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Summer School, section LIII, edited by J. Dalibard, J.M. Raymond e J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1992).
- [4] *Cavity Quantum Electrodynamics*, edited by Paul R. Berman, Academic Press, Orlando, (1994).
- [5] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, New York (1994).
- [6] K. Johnson, Acta Phys. Polonica B **6**, 865 (1975);
A. Chodos e C.B. Thorn, Phys. Lett. B **53**, 359 (1974);
K. Johnson, Sci. Am. **241**, 112 (1979);
- [7] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **320**, 251 (1970).
- [8] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **410**, 141 (1987).
- [9] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **410**, 175 (1987).
- [10] C.A. Lütken e F. Ravndal, Phys. Rev. A **31**, 2082 (1985).
- [11] K. Scharnhorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).
- [12] G. Barton, Phys. Lett. B **237**, 559 (1990).

- [13] M.J. Sparnaay, *Physica* **24**, (1958), 751.
- [14] S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997);
 U. Mohideen e A. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549 (1998) ;
 A. Roy e U. Mohideen, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4380 (1999) ;
 A. Roy, C.-Y. Lin e U. Mohideen, *Phys. Rev. D* **60**, 111101(R) (1999) ;
 B.W. Harris, F. Chen e U. Mohideen, *Phys. Rev. A* **62**, 052109 (2000);
 T. Ederth, *Phys. Rev. A* **62**, 062104 (2000) ;
 H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop e F. Capasso, *Science* **291**, 1941 (2001) ;
 H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop e F. Capasso, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 211801 (2001);
 G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio e G. Ruoso, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 041804 (2002).
- [15] G. Plunien, B. Muller e W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 89 (1986) .
- [16] V. M. Mostepanenko e N. N. Trunov *The Casimir effect and its applications*, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [17] M. Bordag, U. Mohideen, e V. M. Mostepanenko, *Phys. Rep.* **353**, 1 (2001).
- [18] E. Elizalde e A. Romeo, *Am. J. Phys.* **59**, 711 (1991).
- [19] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, *Revista Brasileira de Física* **22**, nº 1 Março, 122 (2000).
- [20] M. Bordag, D. Robaschik, e E. Wieczorek, *Ann. Phys. (N.Y.)* **165**, 192 (1985);
 E. Wieczorek, D. Robaschik, e K. Scharnhorst, *Sov. J. Nucl. Phys.* **44**, 665 (1986);
 D. Robaschik, K. Scharnhorst, e E. Wieczorek, *Ann. Phys.* **174**, 401 (1987);
 M. Bordag e K. Scharnhorst, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3815 (1998);
 M. Bordag e J. Lindig, *Phys. Rev. D* **58**, 045003 (1998);
 F. Ravndal e J. B. Thomassen, *Phys. Rev. D* **63**, 113007 (2001).
- [21] Bernard S. Kay, *Phys. Rev. D* **20**, 3052 (1979).
- [22] David J. Toms, *Phys. Rev. D* **21**, 2805 (1980).

- [23] K. Symanzik, Nuc. Phys. B **190**, 1-44 (1981).
- [24] M. Krech e S. Dietrich, Phys. Rev. A **46**, 1886 (1992).
- [25] Luiz C. de Albuquerque e R. M. Cavalcanti, Phys. Rev. D **65**, 045004 (2002).
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, John Wiley, New York (1977).
- [27] H. M. Nussenzveig, *Notas de Aula de Macanica Quântica*, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1998).
- [28] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1997).
- [29] R. H. Landau, *Quantum Mechanics II, A Second Course in Quantum Theory*, John Wiley, New York (1996).
- [30] M. Kaku, *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*, Oxford University Press (1993).
- [31] W. V. Houston, Phys. Rev. **51**, 446 (1937).
- [32] R. C. Williams, Phys. Rev. **54**, 558 (1938).
- [33] W. E. Lamb, Jr. e R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [34] W. E. Lamb, Jr. e R. C. Retherford, Phys. Rev. **86**, 1014 (1952).
- [35] G. L. Ni, H. B. Wang, J. Yan J e H. L. Li, High Energy Physics-Chinese Edition, **24**, 5, 400-407 (2002).
- [36] H. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [37] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press (1998).
- [38] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., Nova York (1980).
- [39] E. Power, Proc. Roy. Soc. Lond. A **292**, 424 (1966).

- [40] Lütken e F. Ravndal, Phys. Scr. **28**, 209 (1983).
- [41] E.A. Power e T. Thirunamachandran, Phys. Rev. A **25**, 2473 (1982).
- [42] W. Jhe, Phys. Rev. A **43**, 5795 (1990).
- [43] W. Jhe, Phys. Rev. A **44**, 5932 (1991).
- [44] N. Nha e W. Jhe, Phys. Rev. A **54**, 3505 (1996).
- [45] D.T. Alves, C. Farina e A.C. Tort, Phys. Rev. A **61**, 034102 (2000).
- [46] Danilo Teixeira Alves, *Influência de paredes magneticamente permeáveis em alguns efeitos do vácuo quântico*, Tese de Doutorado, CBPF (2002).
- [47] D. T. Alves, F. A. Barone, C. Farina e A. C. Tort, Phys. Rev. A **67**, 022103 (2003).
- [48] Timothy H. Boyer, Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974).
- [49] V. Hushwater, Am. J. Phys. **65**, 381 (1997).
- [50] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. Tenório, Braz. J. Phys. **29**, 371 (1999).
- [51] A. Tenorio, A.C. Tort e F.C. Santos, Phys. Rev. D **60**, 105022 (1999).
- [52] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos e A.C. Tort, Phys. Lett. B **446**, 170 (1999).
- [53] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos e A.C. Tort, *Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions*, 260 (1999).
- [54] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos e A.C. Tort, J. Phys. A **32**, 4463 (1999).
- [55] F.A. Barone e C. Farina, Am. J. Phys. **69**, 232 (2001).
- [56] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1994).
- [57] I.Klich, A. Mann e M. Revzen, Phys. Rev. D **65**, 045005 (2002).
- [58] O. Kenneth, I.Klich, A. Mann e M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **89**, 033001 (2002).

- [59] J. S. Toll, *The Dispersion Relation for Light and Its Application to Problems Involving Electron Pairs*, Ph. D. Thesis, Princeton (1952).
- [60] Z. Bialynicka-Birula e I. Bialynicki-Birula, *Phys. Rev. D* **2**, 2341 (1970).
- [61] S. L. Adler, *Ann. Phys. (NY)* **67**, 599 (1971).
- [62] E. Brezin e C. Itzykson, *Phys. Rev. D* **3**, 618 (1971).
- [63] K. Scharnhorst, *The velocities of light in modified QED vacua*, apresentação no “workshop” “*Superlumial (?) Velocities*”, Cologne, hep-th/9810221 (1998).
- [64] I. T. Drummond e S. J. Hathrell, *Phys. Rev. D* **22**, 343 (1980).
- [65] R. D. Daniels e G. M. Shore, *Nucl. Phys. B* **425**, 634 (1994).
- [66] G. M. Shore, *Nucl. Phys. B* **460**, 379 (1996).
- [67] R. Tarrach, *Phys. Lett. B* **133**, 259 (1983).
- [68] J. I. Latorre, P. Pascual e R. Tarrach, *Nucl. Phys. B* **437**, 60 (1995).
- [69] H. Gies e W. Dittrich, *Phys. Lett. B* **431**, 420 (1998).
- [70] W. Dittrich e H. Gies, *Phys. Rev. D* **58**, 025004 (1998).
- [71] G. Mie, *Ann. Phys.* **37**, 511 (1912); **39**, 1 (1913).
- [72] M. Born e L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A* **144**, 425 (1934).
- [73] Julian Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [74] V. V. Dodonov, I. A. Malkin e V. I. Man’ko, *Lett. Nuovo Cim.* **14**, 241 (1975).
- [75] V. V. Dodonov, I. A. Malkin e V. I. Man’ko, *Physica* **82A**, 113 (1976).
- [76] V. V. Dodonov, I. A. Malkin e V. I. Man’ko, *J. Phys. A* **9**, 1791 (1976).
- [77] J.D. Likken, J. Sonnenschein e N. Weiss, *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 5155 (1991).
- [78] N.J. Morgenstern Horing, H.L. Cui e G. Fiorenza, *Phys. Rev. A* **34**, 612 (1986).

- [79] C. Farina e Antonio Segui-Santonja, *Phys. Lett. A* **184**, 23 (1993).
- [80] S. Rabello e C. Farina, *Phys. Rev. A* **51**, 2614 (1995).
- [81] J. Schwinger, ed. B. G. Englert, *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements*, Springer (2001).
- [82] F. A. Barone, H. Boschi Filho e C. Farina, *Am. J. Phys.* **71**, 483 (2003).
- [83] W. Greiner e J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, New York (1994).
- [84] W. Dittrich e M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
- [85] F. London, *Z. Phys.* **63**, 245 (1930).
- [86] E.J.W. Verwey e J.T.G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids*, Elsevier, Amsterdam (1948).
- [87] H.B.G. Casimir e D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360 (1948).
- [88] D. Tabor e R.H.S. Winterton, *Nature (London)*, **219**, 1120 (1968).
- [89] M. Planck, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. (2)* **13**, 138 (1911).
- [90] Helmut Rechenberg, *Historical Remarks on Zero-Point Energy and the Casimir Effect (1911-1998)*, pág. 10, *Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Cingapura (1998).
- [91] H.B.G. Casimir, *J. Chim. Phys.* **46**, 407 (1949).
- [92] H.B.G. Casimir, *Some Remarks on the History of the so Called Casimir Effect*, pág 3, *Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Cingapura (1998).
- [93] P. W. Milonni e M.-L. Shih, *Contemporary Physics* **33**, 313 (1992).

- [94] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bitsenko e S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapore (1994).
- [95] K. Kirsten, *Spectral Functions in Mathematics and Physics*, Chapman & Hall, Dordrecht - Netherlands (2001).
- [96] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1995).
- [97] L.H. Ford, Phys. Rev. D **22**, 3003 (1980).
- [98] K. Melnikov, Phys. Rev. D **64**, 045002 (2001).
- [99] *Radiative Corrections to the Casimir Effect for the Massive Scalar Field*, F. A. Barone, R. M. Cavalcanti e C. Farina, Anais do XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, <http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxiii>.
- [100] L.H. Ford, Proc. R. Soc. Lond. A **368**, 305 (1979).
- [101] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [102] V.A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello e J.M. Salim, Phys. Let. B **482**, 134 (2000).
- [103] M. Novello, V.A. De Lorenci, J.M. Salim e R. Klippert, Phys. Rev. D **61**, 045001 (2000).
- [104] W.G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [105] P.C.W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
- [106] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag (1996).
- [107] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Perseus Book (1992).
- [108] J. Barcelos Neto, *Notas de Teoria Quântica de Campos*, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1988).

- [109] Jan Ambjørn e Stephen Wolfram, *Ann. Phys.* **147**, 1 (1983).
- [110] B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, Springer (1937).
- [111] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (2000).
- [112] W. H. Braden, *Phys. Rev. D* **25**, 1028 (1982).